

ISSN 2075-6836

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАН



НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «КОСМОНИТ»
ОАО «РОССИЙСКАЯ КОРПОРАЦИЯ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОГО
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ»

А. И. Назаренко

**ПОГРЕШНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ
В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ**

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Р. НАЗИРОВА

СЕРИЯ
МЕХАНИКА, УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Москва, 2010

A. I. Nazarenko

ERRORS OF FORECASTING OF SATELLITE MOTION IN THE EARTH GRAVITY FIELD

Obtaining of authentic statistical estimates of errors is topical for solution of many application problems, for example, for estimating the probability of collisions of satellites, for navigation with using dedicated satellite systems, etc. The content of the book is the development of the technique for estimating satellites' motion errors caused by inaccuracy of the known parameters of Earth's gravity field. Four basic sections of the book outline the following issues: 1) principles of the technique for forecasting correlation matrixes of errors in a satellite's state vector; 2) statistical characteristics of gravitational disturbances; 3) forecasting of the correlation matrix of errors; 4) adjustment of the algorithm parameters.

The book presents numerous examples of solution of considered problems with using the model and real information. The texts of four applied computer programs are given in the Appendix, namely: 1) the program for constructing the autocorrelation functions of random gravitational disturbances in the Earth-centered coordinate system; 2) the program for forecasting the correlation matrix of state vector errors with accounting for a «pure» effect of gravitational disturbances; 3) the program for analyzing the accuracy of so-called TLE; 4) the program for determining the RMS of measurement errors and system's noise using the simulation model.

The author hopes that materials of the book will be useful for a rather wide scope of specialists: researchers, engineers, post-graduate students and students. The list of used sources includes 44 names.

Keywords: gravitational field of the Earth, statistical characteristics, gravitational disturbances, correlation matrix, correlation function, forecasting of errors, adjustment of parameters, computer programs.

Получение достоверных статистических оценок погрешностей является актуальным для решения многих прикладных задач, например, для оценки вероятности столкновений спутников, для навигации с использованием соответствующих спутниковых систем и др. Содержание книги — развитие методики для оценки погрешностей прогнозирования движения спутников, порождаемых неточностью известных параметров гравитационного поля Земли. В четырех основных разделах книги изложены следующие вопросы: 1) основы методики для прогнозирования корреляционных матриц погрешностей вектора состояния спутников; 2) статистические характеристики гравитационных возмущений; 3) прогнозирование корреляционной матрицы погрешностей; 4) настройка параметров алгоритма.

В книге приводятся многочисленные примеры решения рассматриваемых задач с использованием модельной и реальной информации. В приложениях представлены тексты четырех прикладных программ: 1) построения автокорреляционных функций случайных гравитационных возмущений в связанной с Землей системе координат; 2) прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния с учетом «чистого» влияния гравитационных возмущений; 3) анализа точности так называемой TLE; 4) определения СКО погрешностей измерений и шума системы на имитационной модели.

Автор надеется, что материалы книги будут полезны для достаточно широкого круга специалистов: научных работников, инженеров, аспирантов и студентов. Список использованных источников состоит из 44 наименований.

Ключевые слова: гравитационное поле Земли, статистические характеристики, гравитационные возмущения, корреляционная матрица, корреляционная функция, прогнозирование погрешностей, настройка параметров, компьютерные программы.

Редактор: *Корниленко В. С.*
Компьютерная верстка: *Комарова Н. Ю.*

Содержание

Предисловие	5
1. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СПУТНИКОВ	8
1.1. Введение	8
1.2. Дифференциальные уравнения для прогнозирования корреляционной матрицы	14
1.3. Анализ методики прогнозирования корреляционной матрицы при учете взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и случайных возмущений	19
1.4. Определение функций взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$ в процессе уточнения параметров орбит по данным измерений	24
1.5. Простейший пример учета цветного шума	32
1.6. Выводы	37
2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ	39
2.1. Введение	39
2.2. Основные формулы для сферических функций	46
2.3. Дисперсия гравитационных возмущений	47
2.4. Автокорреляционные функции в связанной с Землей системе координат	58
2.5. Автокорреляционные функции для заданной орбиты	64
2.6. Особенности корреляционных функций $k_r(u_1, u_2)$ для резонансных и геостационарных спутников	68
2.7. Выводы	74
3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ	76
3.1. Введение	76
3.2. Основы алгоритма прогнозирования корреляционной матрицы $K_x(t)$	78
3.3. Вычисление двойного интеграла I_0	84
3.4. Вычисление координат в точках пересечения следов орбиты на разных витках	86

3.5. Вычисление двойных интегралов I_{k-j}	92
3.6. Вычисление матричной функции взаимной корреляции $K_{xq}(t, \tau)$ при прогнозировании движения	103
3.7. Прогнозирование корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния	110
3.8 Выводы	114
4. НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА	116
4.1. Проблема выбора значения параметра σ_n	116
4.2. Предварительный выбор значения параметра σ_n по данным о столкновении спутников «Иридиум-33» и «Космос-2251»	119
4.3. Оценка точности определения и прогнозирования орбит спутников типа GPS.	123
4.4. Методика настройки параметров шумов	139
4.5. Выводы	162
Заключение	165
Литература	168
Приложение А. Обоснование формул (2.42) и (2.43)	171
Приложение Б. Программа для построения автокорреляционных функций случайных гравитационных возмущений в связанной с Землей системе координат	176
Приложение В. Программа для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния с учетом «чистого» влияния гравитационных возмущений	181
Приложение Г. Программа для анализа точности TLE на основе их обработки МНК	194
Приложение Д. Программа для определения СКО погрешностей измерений и шума системы на имитационной модели	212
Приложение Е. Фрагменты из истории подготовки монографии ..	224

Предисловие

Прогнозирование небесных тел является предметом исследований старейшей науки — небесной механики. Ее развитие связано с именами таких всемирно известных ученых как Кеплер, Ньютон, Лагранж, Лежандр, Гаусс и многих других. В России фундаментальные монографии по этому разделу науки опубликованы М. Ф. Субботиным (1937) и Г. Н. Дубошиным (1968). Особенность прикладных исследований в данной области — их «штучный» характер, связанный с определением параметров движения относительно немногочисленных небесных тел: Земли, Луны, планет и комет.

После запуска в Советском Союзе в 1957 г. первого искусственного спутника Земли (ИСЗ) и развертывания широкого круга космических исследований появилась новая область применения классической небесной механики — космическая баллистика (астродинамика). На ее содержание оказали существенное влияние:

- запуск большого числа искусственных спутников Земли, решающих различные прикладные задачи (в настоящее время в околоземном пространстве находится более 600 действующих космических аппаратов — КА);
- образование большого числа «фоновых» космических объектов, их обнаружение и контроль текущего состоянием осуществляют Российская и Американская системы контроля космического пространства; в настоящее время в оперативно обновляемом каталоге этих систем находится более 13 000 каталогизированных объектов (КО) (размером более 10...20 см); этот космический мусор стал головной болью для специалистов по решению различных прикладных задач в околоземном пространстве (ОКП);
- реальная опасность случайных столкновений спутников; последним примером является столкновение 10 февраля 2009 г. американского действующего КА «Иридиум-33» и российского, прекратившего работу, КА «Космос-2251»; в результате образовалось более 700 каталогизированных объектов;
- развитие стохастического подхода к описанию движения спутников, при котором в правых частях уравнений движения учитываются случайные возмущения;

- доступность орбитальных данных по большому числу спутников (например, <http://www.space-track.org>) и ряда компьютерных прикладных программ; их можно «скачать» с соответствующих сайтов в Интернете;
- феноменальные достижения в развитии вычислительной техники.

Важной особенностью применения космической баллистики является массовый характер расчетов. Ежедневно в мире выполняются сотни тысяч прогнозов движения спутников. Естественно, что в этих условиях появились необходимость и возможность статистических оценок погрешностей прогнозирования.

Получение достоверных статистических оценок погрешностей особенно актуально для решения многих прикладных задач, например, для оценки вероятности столкновений спутников, навигации с использованием соответствующих спутниковых систем и др. При решении данной задачи широко применяется апостериорный анализ погрешностей прогнозирования, который оказывается вполне уместным для ограниченного числа конкретных спутников. Однако в связи с большим разнообразием орбит такой подход не всегда возможен. Разработка методики для получения априорных статистических характеристик погрешностей прогнозирования движения спутников, пригодных для разнообразных типов орбит, является одной из новых задач космической баллистики.

Первые исследования автора по развитию статистического подхода к априорной оценке погрешностей прогнозирования движения спутников относятся к концу 1960-х – началу 1970-х гг. Они характерны применением «цветного» шума для учета случайных возмущений. В то время такой подход был «пионерским». Полученные результаты были опубликованы в ряде статей (*Назаренко, Маркова, 1973; Анисимов и др., 1975*) и монографии (*Назаренко, Скребушевский, 1981*). Автор выражает признательность Ю. П. Горохову, М. Д. Кислику, А. Д. Курланову, В. И. Мудрову, Р. Р. Назирову, Л. П. Пеллинену и П. Е. Эльясбергу за поддержку проведения этих исследований и участие в обсуждении результатов. Кроме того, он считает необходимым отметить важный вклад, который внесли в практическую реализацию соответствующих алгоритмов его коллеги по работе В. Д. Анисимов, А. Г. Клименко, И. М. Кутепов, Л. Г. Маркова и И. Г. Поздняков.

После проведения упомянутых выше исследований прошло 40 лет. За это время в рассматриваемой области произошли большие изменения:

- достигнуты большие успехи в уточнении параметров гравитационного поля Земли;
- построение априорных статистических характеристик погрешностей прогнозирования спутников стало еще более актуальной задачей;
- в американских изданиях опубликовано несколько работ по рассматриваемой проблеме;
- характеристики вычислительной техники улучшились на несколько порядков.

С учетом изменившейся обстановки возникла необходимость усовершенствовать и доработать развитый ранее подход к расчету априорных статистических характеристик погрешностей прогнозирования спутников в гравитационном поле Земли и на этой основе сделать доступными соответствующие алгоритмы и программы для потребителей. Автор выражает признательность профессору Техасского университета К. Т. Алфренду (К. Т. Alfriend) за интерес и поддержку продолжения исследований по рассматриваемой проблеме (*Nazarenko, Alfriend, 2009*).

Настоящая книга предназначена, в основном, для специалистов, решающих прикладные задачи в области космической баллистики. При обосновании соответствующих алгоритмов автор старался не углубляться в математические «дебри», характерные для решения задач с учетом стохастических факторов. Приводятся многочисленные примеры решения рассматриваемых задач с использованием модельной и реальной информации. Поэтому автор надеется, что материал будет понятен специалистам с инженерной подготовкой.

Основное внимание в книге уделено изложению вопросов, которые в научных публикациях освещены недостаточно. В этом случае автор старался изложить обоснование алгоритмов достаточно полно, и, хотя этот материал может быть труден для освоения специалистами с инженерной подготовкой, он представляется необходимым. При использовании известных методических приемов делаются ссылки на соответствующие публикации.

С целью облегчения применения развитых методов и алгоритмов для решения прикладных задач в книге приводятся тексты основных программ в исходных кодах. Эти программы могут быть полезны не только инженерам-исследователям, но и студентам и аспирантам.

1. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СПУТНИКОВ

1.1. Введение

Традиционный подход к прогнозированию небесных тел, развитый в классических трудах по небесной механике, основан на составлении и решении уравнений движения. Этот подход характерен применением допущения, что все действующие на космический объект силы известны и могут быть учтены в правых частях дифференциальных уравнений движения и что основным источником ошибок прогноза являются погрешности начальных условий. Последние возникают из-за ошибок измерения при определении параметров траектории (начальных условий) по методу наименьших квадратов.

Традиционный подход широко используется при прогнозировании движения ИСЗ. Однако для ИСЗ не все действующие на спутник силы можно считать известными и что во многих случаях не все известные силы могут быть учтены в правых частях дифференциальных уравнений при их интегрировании. Возникающие в связи с этим погрешности модели движения могут отрицательно сказаться на результатах определения и прогнозирования орбит ИСЗ. Например, одним из отрицательных проявлений этих погрешностей является ограничение временного интервала, на котором используются измерения при уточнении начальных условий.

При изучении погрешностей прогнозирования удобно воспользоваться аппаратом теории вероятностей. В частности, не учтенные при прогнозировании возмущающие силы можно считать гауссовым случайным процессом. Для обоснования такого подхода могут быть приведены следующие доводы (*Назаренко, Маркова, 1973*).

- Теория вероятностей применяется не только в тех случаях, когда имеется множество повторяемых событий, но и тогда, когда речь идет о неопределенности выводов. В рассматриваемом случае такая неопределенность имеется, например, относительно

коэффициентов разложения гравитационного потенциала Земли, а также параметров модели атмосферы и баллистического коэффициента спутника.

- Применение характеристик случайных процессов для описания не учтенных факторов не противоречит возможности существования детерминированной закономерности в их проявлении. Так, например, автокорреляционная функция $K_x(t, \tau) = M\{[x(t) - M_x(t)][x(\tau) - M_x(\tau)]\}$ некоего случайного процесса $x(t)$ как раз и характеризует наличие такой закономерности, а изучение корреляции часто служит первым шагом для выявления новых закономерностей.
- Число не учтенных при прогнозировании возмущающих факторов обычно велико, и условия их совместного действия чрезвычайно многообразны, так как могут отличаться расположением данной орбиты относительно поверхности Земли, Луны и Солнца. Так, например, действие тессеральных и секториальных гармоник разложения гравитационного потенциала Земли зависит от взаимного положения восходящего узла орбиты и времени по Гринвичу ($L = \Omega - S_g$, где S_g — звездное время по Гринвичу). Последняя величина быстро меняется, принимает самые разнообразные значения и поэтому у большинства спутников может считаться случайной, равномерно распределенной в интервале $(0, 2\pi)$. Здесь также следует иметь в виду, что не учтенные при прогнозировании возмущения имеют обычно одинаковый порядок, т. е. соизмеримы между собой, так как основные возмущающие факторы известны и учитываются. Это позволяет использовать центральную предельную теорему и принять, что значение возмущений в некоторый момент времени является случайной величиной, распределенной по нормальному закону.
- Известные значения учтенных при прогнозировании возмущающих факторов, например параметров гравитационного поля, представляют собой случайные величины, так как определены по большому числу измерений, содержащих случайные ошибки.
- Торможение в атмосфере, служащее одним из главных возмущающих факторов для низкоорбитальных спутников, существенно зависит от уровня солнечной и геомагнитной активности, которые при прогнозировании можно считать случайными процессами.

- Разделение возмущающих факторов на детерминированные (учтенные при прогнозировании) и случайные не противоречит тому, что в результате изучения законов природы неизвестные возмущающие факторы, которые мы в настоящее время относим к случайным, со временем будут определены. Тогда создадутся условия для включения их в число учитываемых факторов, а характеристики случайных возмущений соответственно изменятся.

В результате применения опорной орбиты и линеаризации исходных дифференциальных уравнений движения спутника могут быть построены дифференциальные уравнения для отклонений от опорного вектора состояния (погрешностей)*

$$\frac{d\delta x}{dt} = A(t)\delta x + B(t)q(t). \quad (1.1)$$

Возмущающие ускорения $q(t)$, которые не учитываются при интегрировании исходных уравнений, будем называть шумом системы. Важным является то, что этот шум существенно отличается от белого шума, т. е. имеется корреляция значений шума в разные моменты времени. Общее решение системы уравнений (1.1) имеет вид

$$\delta x(t) = U(t, t_0)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, \xi)B(\xi)q(\xi)d\xi. \quad (1.2)$$

Матрица $U(t, t_0)$ представляет собой фундаментальную матрицу решений уравнений (1.1), а также переходную матрицу. Статистические характеристики случайного процесса $q(t)$ принимаются известными:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^T(\tau)] = K_q(t, \tau). \quad (1.3)$$

В широко известном *фильтре Калмана* (Kalman, 1963) рассматривается частный случай условий (1.3), а именно, случайный процесс $q(t)$ принимается белым шумом. При этом его автокорреляционная функция имеет вид

$$M[q(t)q^T(\tau)] = R(t)\delta(t - \tau). \quad (1.4)$$

* Здесь используются обозначения, которые применялись в работе (Назаренко, Маркова, 1973).

Корреляционная матрица погрешностей в начальный момент времени принимается известной:

$$M[\delta x(t_0)\delta x^T(t_0)] = K_x(t_0) = P_{0|0}. \quad (1.5)$$

В фильтре Калмана определение соответствующей корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния для произвольного момента времени основано на исходных данных (1.4), (1.5), решении (1.2) и еще одного условия

$$M[\delta x(t_0)q^T(t)] = 0, \quad t > t_0, \quad (1.6)$$

которое свойственно белому шуму. В результате получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} M[\delta x(t)\delta x^T(t)] &= M\left\{\left[U(t, t_0)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, \xi)B(\xi)q(\xi)d\xi\right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[U(t, t_0)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, \eta)B(\eta)q(\eta)d\eta\right]^T\right\} = \\ &= U(t, t_0)P_{0|0}U(t, t_0)^T + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t, \xi)B(\xi)K_q(\xi, \eta)B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta = \\ &= U(t, t_0)P_{0|0}U(t, t_0)^T + \\ &+ \int_{t_0}^t U(t, \xi)B(\xi)R(\xi)B(\xi)^T U(t, \xi)^T d\xi, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Именно это выражение используется в фильтре Калмана для прогноза корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния.

В работе (Назаренко, Маркова, 1973) использовалось допущение, что матрица взаимной корреляции

$$M[\delta x(t_0)q^T(t)] = K_{xq}(t_0, t) \neq 0 \quad (1.8)$$

известна и не равна 0. В этом случае определение корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния в произвольный момент времени на основе исходных данных (1.4), (1.5), решения (1.2) и условия (1.8) приводит к выражению

$$\begin{aligned}
 K_x(t) = M \left[\delta x(t) \delta x^T(t) \right] = & U(t, t_0) P_{0|0} U(t, t_0)^T + \\
 & + U(t, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta + \\
 & + \left[U(t, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta \right]^T + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta, \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

которое является обобщением формулы (1.7).

В американских публикациях проблема учета неизвестных гравитационных возмущений при расчете корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния подробно изложена в работах Д. Р. Райта (*Wright*, 1981; *Wright et al.*, 2008a, b). Ниже приведены выдержки из статьи (*Wright et al.*, 2008a). При этом ссылки на публикации приведены в соответствие с нашим списком.

История

Профессор Каула в 1959 г. развил статистическую теорию определения погрешностей расчета гравитационного потенциала на поверхности Земли (*Kaula*, 1959). Герстен, Гор и Холл в 1967 г. применили эту теорию для оценки возмущений орбит (*Gersten et al.*, 1967). В 1978 г. Райт предпринял попытку вычисления двойного интеграла... При вычислениях на ЭВМ IBM 370 была применена двойная точность. При этом возникли две проблемы. Во-первых, результирующая матрица размерностью (6×6) оказалась несимметричной, хотя она должна быть симметричной по определению. Во-вторых, для выполнения фильтрации измерений на пятиминутном интервале для вычисления одной матрицы требовалось затратить двое суток машинного времени.

<...>

Для погрешностей вектора состояния δZ размерностью (6×1) линейное соотношение, учитывающее влияние гравитационных возмущений δg размерностью (3×1), имеет вид

$$\delta Z(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \delta Z(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) \delta g(\tau) d\tau, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (37)$$

где $\Phi(t_{k+1}, \tau)$ — переходная матрица размерностью (6×6), а матрица $G(\tau)$ размерностью (6×3) состоит из соответствующих коэффициентов уравнений возмущенного движения. Произведение $\Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) \delta g(\tau)$ трансформирует влияние погрешностей ускорений $g(\tau)$ на погрешности

вектора состояния в момент времени t_{k+1} . Если $t_{k+1} = t_k$, то возмущений в векторе состояния $\delta Z(t_{k+1})$ не возникает. Погрешности гравитационных ускорений $\delta g(\tau)$ являются случайными величинами. Поэтому и погрешности вектора состояния $\delta Z(t_{k+1})$ — также случайные величины. При использовании для математического ожидания обозначения $E\{\cdot\}$ корреляционная матрица погрешностей может быть выражена следующим образом:

$$P_{k+1|k} = E \left\{ \delta Z(t_{k+1}) \delta Z(t_{k+1})^T \right\}. \quad (38)$$

Подстановка (37) в (38) приводит к выражению

$$P_{k+1|k} = \Phi(t_{k+1}, t_k) P_{k|k} \Phi(t_{k+1}, t_k)^T + P_{k+1,k}^{ff}, \quad (39)$$

где

$$P_{k+1,k}^{ff} = I_{k+1,k}^C + I_{k+1,k}^L + I_{k+1,k}^R, \quad (40)$$

$$I_{k+1,k}^C = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(t_{k+1}, \tau) E \left\{ \delta g(\tau) \delta g(\tau)^T \right\} H(t_{k+1}, t)^T dt d\tau, \quad (41)$$

$$I_{k+1,k}^L = \Phi(t_{k+1}, t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} E \left\{ \delta Z(t_k) \delta g(t)^T \right\} H(t_{k+1}, t)^T dt, \quad (42)$$

$$I_{k+1,k}^R = \left(I_{k+1,k}^L \right)^T, \quad (43)$$

$$H(t_{k+1}, \eta) = \Phi(t_{k+1}, \eta) G(\eta), \quad (44)$$

<...>

Для представленного выше двойного интеграла применено обозначение $I2 = P_{k,k+1}^{ff}$. Он вычисляется по формуле

$$I2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[H(t_{k+1}, t) \right] \left[\tilde{R}(0, t) \right] \left[I1 \right] \left[H(t_{k+1}, t) \right]^T dt. \quad (82)$$

Комментарии

1. Нетрудно заметить, что приведенные выше формулы (39)–(44) для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния отличаются от формулы (1.9) только обозначениями. Их содержание полностью совпадает.
2. Авторы применяют методику прогнозирования корреляционной матрицы в процессе уточнения вектора состояния по измерениям на достаточно коротких интервалах времени (несколько минут).
3. Из (82) очевидно, что при расчете двойного интеграла авторы учитывают только первое слагаемое (41) интеграла (40) и не учитывают

два других слагаемых (42) и (43), которые отражают влияние взаимной корреляции $M[\delta Z(t_k) \delta g^T(t)] = M[\delta x(t_0) q^T(t)] = K_{xq}(t_0, t)$.

4. История развития рассматриваемой методики изложена неполно. В российской литературе проблема учета неизвестных гравитационных возмущений при расчете корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния достаточно подробно изложена в монографии (Назаренко, Скребушевский, 1981). В ней приведены формула (1.9), данные о корреляционных функциях неизвестных гравитационных возмущений (1.3), а также методика построения матриц взаимной корреляции (1.8) в процессе уточнения параметров орбиты по результатам измерений. В монографии приводятся ссылки на статьи (Kaula, 1959; Gersten et al., 1967). В начале 1970-х гг. эта методика была применена для определения и прогнозирования орбит при ведении каталога космических объектов. Ссылка на соответствующую компьютерную программу имеется в статье (Nazarenko, 1991).
5. Имеется ряд публикаций (Nazarenko, 1998, 2007; Nazarenko et al., 2007), в которых изложены результаты применения развитой методики для учета случайного атмосферного шума в правой части уравнения (1.1).

Таким образом, имеются следующие различия российских и американских публикаций по рассматриваемой проблеме: а) в первом случае более полное внимание уделено матрице взаимной корреляции погрешностей начальных условий и шума; б) прогнозирование выполняется на достаточно больших интервалах времени.

1.2. Дифференциальные уравнения для прогнозирования корреляционной матрицы

Рассмотрим матрицу взаимной корреляции $M[\delta x(t) \delta x(\tau)^T]$ погрешностей вектора состояния при его прогнозировании на разные моменты времени t и τ . Используя тот же подход, который применен при выводе формулы (1.9), получим

$$\begin{aligned}
 M \left[\delta x(t) \delta x(\tau)^T \right] &= K_x(t, \tau) = U(t, t_0) P_{0|0} U(\tau, t_0)^T + \\
 &+ U(t, t_0) \int_{t_0}^{\tau} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(\tau, \eta)^T d\eta + \\
 &+ \left[U(\tau, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta \right]^T + \\
 &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(\tau, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Естественно, что при $t = \tau$ это выражение совпадает с формулой (1.9).

Рассмотрим также матрицу взаимной корреляции $M[\delta x(t) \delta x(\tau)^T]$ погрешностей вектора состояния в момент времени t и случайного процесса $q(\tau)$ в произвольный момент времени τ . Применяя тот же подход, получим:

$$\begin{aligned} M[\delta x(t) q(\tau)^T] &= K_{xq}(t, \tau) = \\ &= M \left\{ \left[U(t, t_0) \delta x(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, \xi) B(\xi) q(\xi) d\xi \right] q(\tau)^T \right\} = \\ &= U(t, t_0) K_{xq}(t_0, \tau) + \int_{t_0}^t U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Построим дифференциальные уравнения $\partial K_x(t, \tau) / \partial t = \dots$ и $\partial K_x(t, \tau) / \partial \tau = \dots$. Применяя непосредственное дифференцирование выражения (1.10), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_x(t, \tau)}{\partial t} &= A(t) U(t, t_0) P_{0|0} U(\tau, t_0)^T + \\ &+ A(t) U(t, t_0) \int_{t_0}^{\tau} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(\tau, \eta)^T d\eta + \\ &+ \left[U(\tau, t_0) K_{xq}(t_0, t) B(t)^T \right]^T + \\ &+ A(t) \left[U(\tau, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta \right]^T + \\ &+ B(t) \int_{t_0}^{\tau} K_q(t, \eta) B(\eta)^T U(\tau, \eta)^T d\eta + \\ &+ A(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(\tau, \eta)^T d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Сгруппируем в этом выражении слагаемые с общими множителями $A(t)$ и $B(t)$. Учитывая выражения (1.10) и (1.11), получим

$$\frac{\partial K_x(t, \tau)}{\partial t} = A(t) K_x(t, \tau) + B(t) K_{qx}(t, \tau). \quad (1.13)$$

Более просто эту же формулу можно вывести другим способом — на основе тождества

$$\frac{\partial K_x(t, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial \left\{ M \left[\delta x(t) \delta x(\tau)^T \right] \right\}}{\partial t} = M \left[\frac{d\delta x(t)}{dt} \delta x(\tau)^T \right]. \quad (1.14)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_x(t, \tau)}{\partial t} &= M \left\{ \left[A(t) \delta x(t) + B(t) q(t) \right] \delta x(\tau)^T \right\} = \\ &= A(t) K_x(t, \tau) + B(t) K_{qx}(t, \tau). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Аналогично строится выражение для второй частной производной:

$$\frac{\partial K_x(t, \tau)}{\partial \tau} = K_x(t, \tau) A(\tau)^T + K_{xq}(t, \tau) B(\tau)^T. \quad (1.16)$$

Построим дифференциальное уравнение для матричной функции взаимной корреляции $K_{xq}(t, \tau) = M[\delta x(t) q(\tau)^T]$ (при фиксированном произвольном τ). Действуя так же, как при выводе формулы (1.15), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{xq}(t, \tau)}{\partial t} &= M \left\{ \left[A(t) \delta x(t) + B(t) q(t) \right] q(\tau)^T \right\} = \\ &= A(t) K_{xq}(t, \tau) + B(t) K_q(t, \tau). \end{aligned} \quad (1.17)$$

В частном случае при $t = \tau$ дифференциальное уравнение для корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния $K_x(t) = K_x(t, t)$ может быть построено на основе частных производных (1.13), (1.16) и соотношения

$$\frac{dK_x(t)}{dt} = \left[\partial K_x(t, \tau) / \partial t \right]_{\tau=t} + \left[\partial K_x(t, \tau) / \partial \tau \right]_{\tau=t}. \quad (1.18)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{dK_x(t)}{dt} &= A(t) K_x(t) + K_x(t) A(t)^T + \\ &+ B(t) K_{qx}(t, t) + K_{xq}(t, t) B(t)^T. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь в соответствии с выражением (1.11) матрицы взаимной корреляции равны

$$K_{xq}(t, t) = U(t, t_0) K_{xq}(t_0, t) + \int_{t_0}^t U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, t) d\xi \quad (1.20)$$

и

$$K_{qx}(t, t) = K_{xq}(t, t)^T = K_{qx}(t, t_0)U(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t K_q(t, \xi)B(\xi)^T U(t, \xi)^T d\xi. \quad (1.21)$$

Таким образом, на основе общих формул (1.10) и (1.11) построено дифференциальное уравнение (1.19) для корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния в произвольный момент времени. В соответствии с общей исходной формулой (1.10) решение уравнения (1.19) имеет вид (1.9).

Комментарий

При условии, когда случайный процесс $q(t)$ является белым шумом и его автокорреляционная функция имеет вид (1.4) (как в фильтре Калмана), выражения (1.20) и (1.21) могут быть упрощены. Во-первых, при $t \neq t_0$ функции взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T = 0$. Во-вторых, имеется возможность упрощения входящих в (1.20) и (1.21) интегралов. Она основана на том, что в первом из них $\xi - t \leq 0$, а во втором $\xi - t \geq 0$. Поэтому, с использованием свойства интеграла

$$\int_{-a}^a f(\eta)\delta(\eta)d\eta = \int_{-a}^0 f(\eta)\delta(\eta)d\eta + \int_0^a f(\eta)\delta(\eta)d\eta = f(0) \cdot 1 \quad (\text{при } a > 0), \quad (1.22)$$

содержащего δ -функцию, сумма двух последних слагаемых выражения (1.19) принимает вид

$$B(t)K_{qx}(t, t) + K_{xq}(t, t)B(t)^T = B(t)R(t)B(t)^T. \quad (1.23)$$

В результате уравнение (1.19) упрощается:

$$\frac{dK_x(t)}{dt} = A(t)K_x(t) + K_x(t)A(t)^T + B(t)R(t)B(t)^T. \quad (1.24)$$

Именно это уравнение и его решение в форме (1.7) используются в фильтре Калмана для прогнозирования корреляционной матрицы.

Матричное уравнение (1.19) эквивалентно системе из $n \times (n + 1)/2$ обыкновенных дифференциальных уравнений. При заданных начальных условиях $K_x(t_0)$ и $K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$ его решение является единственным. Поэтому функция $K_x(t)$, построенная в результате интегрирования уравнения (1.19), обеспечивает для любого момента времени t возможность правильного определения корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния. Последнее утверждение может показаться тривиальным. Однако это не совсем так.

Покажем на конкретном примере, что применение решения (1.9) без учета матриц взаимной корреляции погрешностей вектора состояния ($K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$) может приводить к неправильным результатам. В этом случае решение (1.9) принимает вид

$$K_x(t) = U(t, t_0)P_{0|0}U(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t, \xi)B(\xi)K_q(\xi, \eta)B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.25)$$

Применим это решение для прогнозирования корреляционной матрицы на момент времени t и обратно в точку t_0 . При прогнозе из точки t в исходную точку t_0 значение корреляционной матрицы будет равно

$$K_x(t_0) = U(t_0, t) \left[U(t, t_0)P_{0|0}U(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t, \xi)B(\xi)K_q(\xi, \eta)B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta \right] U(t_0, t)^T + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t_0, \xi)B(\xi)K_q(\xi, \eta)B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.26)$$

Используя известные свойства переходной матрицы

$$U(t_0, t)U(t, \xi) = U(t_0, \xi), \quad (1.27)$$

$$U(t_0, t_0) = E \quad (1.28)$$

и возможность замены в последнем слагаемом порядка интегрирования на обратный, выражение (1.26) можно упростить. Оно принимает вид

$$K_x(t_0) = P_{0|0} + 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t_0, \xi)B(\xi)K_q(\xi, \eta)B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.29)$$

Очевидно, что это значение отличается от исходного значения $P_{0|0}$. Таким образом, решение (1.25) не является достаточно корректным. Оно не позволяет получить достоверную оценку корреляционной матрицы при различных режимах прогнозирования. Этот недостаток является следствием пренебрежения матрицами взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, \xi)$. Напомним, что именно решение вида (1.25) используется в упомянутой выше статье Райта (*Wright*, 1981) (см. п. 3 комментариев, с. 13).

Комментарий

Изложенный выше анализ упрощенной формулы (1.25) справедлив и для случая, когда случайный процесс $q(t)$ представляет собой белый шум и его автокорреляционная функция имеет вид (1.4) (как в фильтре Калмана). Это объясняется тем, что двойной интеграл в выражении (1.25) всегда является положительно определенным. Поэтому при прогнозе как вперед, так и назад диагональные компоненты корреляционной матрицы всегда увеличиваются.

1.3. Анализ методики прогнозирования корреляционной матрицы при учете взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и случайных возмущений

Применим решение (1.9) для прогнозирования корреляционной матрицы на момент времени t двумя способами: 1) непосредственно из точки t_0 в точку t ; 2) с использованием прогноза в промежуточную точку.

Значение корреляционной матрицы в *первом случае* равно (1.9), во *втором*, в точке t_1 , —

$$\begin{aligned}
 K_x(t_1) = & U(t_1, t_0) P_{0|0} U(t_1, t_0)^T + \\
 & + U(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_1, \eta)^T d\eta + \\
 & + \left[U(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_1, \eta)^T d\eta \right]^T + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} U(t_1, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_1, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

Значения матричной функции взаимной корреляции $K_{xq}(t_1, \tau)$ в точке t_1 и при различных τ следуют из решения (1.20):

$$K_{xq}(t_1, \tau) = U(t_1, t_0) K_{xq}(t_0, \tau) + \int_{t_0}^{t_1} U(t_1, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \tau) d\xi. \quad (1.31)$$

Применим новые значения (1.30) и (1.31), подставив их в (1.9) в качестве начальных условий при прогнозе из точки t_1 в точку t .

Первое слагаемое имеет вид

$$I: U(t, t_1) \left\{ \begin{aligned} & U(t_1, t_0) P_{0|0} U(t_1, t_0)^T + \\ & + U(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_1, \eta)^T d\eta + \\ & + \left[U(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_1, \eta)^T d\eta \right]^T + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} U(t_1, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_1, \eta)^T d\xi d\eta \end{aligned} \right\} U(t, t_1)^T.$$

Это выражение можно упростить, используя свойство (1.27) переходной матрицы:

$$I: U(t, t_0) P_{0|0} U(t, t_0)^T + U(t, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta + \\ + \left[U(t, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta \right]^T + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.32)$$

Второе слагаемое имеет вид

$$II: U(t, t_1) \int_{t_1}^t \left[U(t_1, t_0) K_{xq}(t_0, \eta) + \int_{t_0}^{t_1} U(t_1, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) d\xi \right] \times \\ \times B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta.$$

Это выражение также можно упростить, используя свойство (1.27) переходной матрицы:

$$U(t, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta + \\ + \int_{t_1}^t \int_{t_0}^{t_1} U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.33)$$

Третье слагаемое представлять нет необходимости, так как оно отличается от второго только транспонированием.

Четвертое слагаемое имеет такой вид:

$$\text{IV: } \int_{t_1}^t \int_{t_1}^{\xi} U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.34)$$

Проанализируем сумму всех слагаемых и сравним ее с выражением (1.9).

Первое слагаемое в (1.32) совпадает с первым слагаемым выражения (1.9).

Сумма второго слагаемого в (1.32) и первого слагаемого в (1.33) имеет вид

$$\begin{aligned} & U(t, t_0) \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta + \\ & + U(t, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta = \\ & = U(t, t_0) \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\eta \end{aligned} \quad (1.35)$$

и совпадает со вторым слагаемым выражения (1.9). Аналогичный результат может быть получен для третьего слагаемого выражения (1.9), которое отличается от второго слагаемого только применением транспонирования.

Рассмотрим двойные интегралы, которые входят в формулы (1.32), (1.33) и (1.34). На рис. 1.1 представлена двумерная область аргументов ξ и η , в которой вычисляются двойные интегралы.

Двойной интеграл в (1.32) относится к области А; двойной интеграл в (1.33) — к области В. Двойной интеграл в упомянутом выше третьем слагаемом, отличающийся от двойного интеграла в (1.33) только транспонированием, относится в области В^Т; двойной интеграл в (1.34) — к области С. Таким

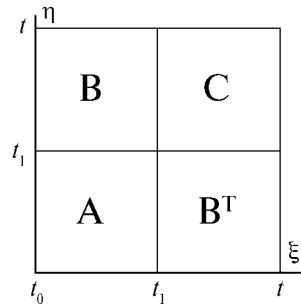


Рис. 1.1. Область вычисления двойных интегралов

образом, рассмотренные двойные интегралы «покрывают» всю область интегрирования, представленную на рис. 1.1. Их сумма равна двойному интегралу выражения (1.9).

Таким образом, подстановка в (1.9) результатов прогнозирования (1.30) и (1.31) в качестве начальных условий приводит при прогнозе из точки t_1 в точку t к тому же результату, который следует из формулы (1.9) при непосредственном прогнозе из точки t_0 в точку t . Этот результат свидетельствует о корректности применения формулы (1.9) для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния при различных режимах прогнозирования.

Комментарий

Изложенное выше утверждение является общим. Оно справедливо при любом относительном расположении точек t_1 и t . В качестве дополнительного подтверждения рассмотрим прогноз «туда ↔ обратно». А именно, при использовании матриц (1.30) и (1.31) в точке t_1 в качестве начальных условий выполним прогноз в исходную точку t_0 . Воспользуемся выражениями (1.32), (1.33) и (1.34) для I, II и IV слагаемых выражения (1.9) после подстановки в него начальных условий (1.30) и (1.31). Заменяв в них t на t_0 и используя свойство (1.28), получим

$$\begin{aligned}
 \text{I:} \quad & P_{0|0} + \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\eta + \\
 & + \left[\int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\eta \right]^T + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta, \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II:} \quad & \int_{t_1}^{t_0} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\eta + \\
 & + \int_{t_1}^{t_0} \int_{t_1}^{t_0} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.37)
 \end{aligned}$$

III слагаемое отличается от II только транспонированием.

$$\text{IV:} \quad \int_{t_1}^{t_0} \int_{t_1}^{t_0} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta. \quad (1.38)$$

Проанализируем сумму этих четырех слагаемых. Первое слагаемое выражения (1.36) равно $P_{0|0}$. При корректном алгоритме сумма всех слага-

емых (I, II, III и IV) должна быть равна P_{00} . Поэтому следует ожидать, что остальные слагаемые взаимно сократятся. На самом деле имеем:

сумма второго слагаемого (1.36) и первого слагаемого выражения (1.37) равна

$$\int_{t_1}^{t_0} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\eta + \int_{t_0}^{t_1} K_{xq}(t_0, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\eta = 0;^*$$

аналогично сумма третьего слагаемого (1.36) и первого слагаемого транспонированного выражения (1.37) также равна 0.

Сумма четвертого слагаемого (1.36) и второго слагаемого выражения (1.37) составит

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_0} \int_{t_1}^{t_1} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta + \\ & + \int_{t_0}^{t_0} \int_{t_1}^{t_1} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta = 0. \end{aligned}$$

Сумма транспонированного выражения (1.37) и IV слагаемого (1.38) равна

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_0} \int_{t_0}^{t_0} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta + \\ & + \int_{t_1}^{t_1} \int_{t_0}^{t_0} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, прогноз «туда ↔ обратно» с учетом матричных функций взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$ приводит к исходному значению корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния. При этом *взаимное сокращение двойных интегралов вида*

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_0} \int_{t_1}^{t_1} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta = \\ & = \int_{t_1}^{t_0} \int_{t_0}^{t_0} U(t_0, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t_0, \eta)^T d\xi d\eta. \end{aligned}$$

происходит в результате влияния матричных функций взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$.

* Инверсия пределов интегрирования одного из интегралов приводит к смене его знака.

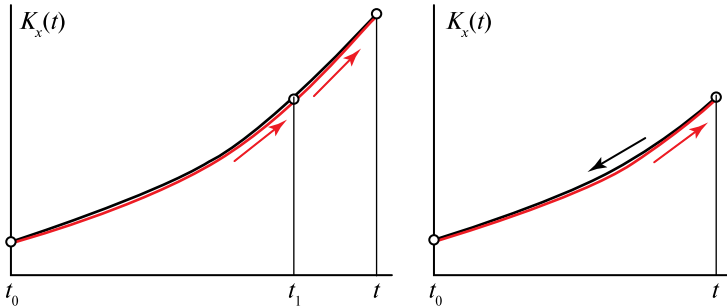


Рис. 1.2. Прогнозы с применением промежуточной точки

Итак, в данном разделе мы показали, что учет матричных функций взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$ при прогнозировании корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния обеспечивает корректное выполнение прогнозов с использованием промежуточной точки. Этот результат схематично представлен на рис. 1.2.

1.4. Определение функций взаимной корреляции

$K_{xq}(t_0, t) = K_{qx}(t, t_0)^T$ в процессе уточнения параметров орбит по данным измерений

Этот вопрос подробно изложен в ряде публикаций (Назаренко, Маркова, 1973; Назаренко, Скребушевский, 1981; Nazarenko, 1998; Nazarenko et al., 2007a, b; Nazarenko, Alfriend, 2009). Здесь мы коротко изложим основные результаты.

Проблема формулируется следующим образом. Для системы, движение которой происходит в соответствии с уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)q(t), \quad (1.39)$$

на основе измерений

$$z_i = h_i x(t_i) + v_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.40)$$

и априори известных статистических характеристик

$$M[q(t)]_0 = 0, \quad M[q(t)q^T(\tau)]_0 = K_q(t, \tau)_0, \quad (1.41)$$

$$M[v_i]_0 = 0, \quad M[v_i v_j^T]_0 = R_i \delta_{ij}, \quad M[v_i q(t)^T]_0 = 0,$$

необходимо определить оптимальные по точности оценки вектора состояния $x(t)$ в произвольный момент времени $t > t_k$. В соответствии с критерием максимального правдоподобия оптимальной считается такая оценка, которая доставляет максимум условному апостериорному распределению $p(x(t)|z_1, z_2, \dots, z_k)$.

Важно отметить, что возможность и уместность такой постановки задачи обусловлены тем, что шум $q(t)$ существует и не является белым. В противном случае учет его влияния на вектор состояния при прогнозе становится бессмысленным или невозможным, по-

скольку $\delta x(t) = \int_{t_0}^t U(t, \xi) B(\xi) q(\xi) d\xi = 0$. Поэтому, в соответствии

с решением (1.2), справедливо равенство $\hat{x}(t) = U(t, t_0) \hat{x}(t_0)$, т. е. в этом случае оптимальная по точности оценка вектора состояния в произвольный будущий момент времени $t > t_0$ однозначно определяется на основе оптимальных по точности начальных условий. Исходная оценка $\hat{x}(t_0)$ может быть определена на основе применения известных статистических методов обработки данных измерений: методов наименьших квадратов или максимального правдоподобия, а также фильтра Калмана.

Следует обратить внимание на то, что рассмотренная здесь проблема близка к постановке задачи в фильтре Калмана (*Kalman, 1963*), в котором влияние шума системы также учитывается. Отличие состоит в том, что в рассматриваемой постановке задачи шум системы принимается нестационарным случайным гауссовым процессом более общего вида, т. е. не является белым. Ниже будет показано, что действующие на спутник случайные гравитационные возмущения имеют корреляционные функции различных типов. Именно поэтому рассмотренная здесь постановка задачи является уместной.

Определение и прогнозирование параметров орбиты при последовательной обработке данных измерений

Принимается, что в результате обработки данных предшествующих $(k - 1)$ измерений определены следующие статистические характеристики:

$$\begin{aligned}
 M[x(t_{k-1})] &= M[x_{k-1}] = \hat{x}_{k-1|k-1}, \\
 M\left[\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}\right)\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}\right)^T\right] &= P_{k-1|k-1}, \\
 M[q(t)] &= \hat{q}(t)_{k-1}, \\
 M\left\{\left[q(t) - \hat{q}(t)_{k-1}\right]\left[q(\tau) - \hat{q}(\tau)_{k-1}\right]^T\right\} &= K_q(t, \tau)_{k-1}, \\
 M\left\{\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}\right)\left[q(t) - \hat{q}(t)_{k-1}\right]\right\} &= K_{xq}(t_{k-1}, t)_{k-1}.
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Здесь $t \geq t_{k-1}$. Представленный состав текущих статистических характеристик отличается от состава характеристик в фильтре Калмана. А именно, здесь добавлены три новые характеристики: оценки шума $\hat{q}(t)_{k-1}$, апостериорная автокорреляционная функция $K_q(t, \tau)_{k-1}$ и функция взаимной корреляции $K_{xq}(t_{k-q}, t)_{k-1}$. Задача состоит в построении формул для этих характеристик $\hat{x}_{k|k}$, $P_{k|k}$, $\hat{q}(t)_k$, $K_q(t, \tau)_k$, $K_{xq}(t_{k-1}, t)_k$ по результатам обработки данных измерений на следующем $-k$ -м шаге (для $t \geq t_k$).

Детальный вывод необходимых формул изложен в статье (Назаренко, Маркова, 1973). Они имеют следующий вид:

$$P_{k|k} = \left(P_{k|k-1}^{-1} + h_k^T R_k^{-1} h_k \right)^{-1}. \tag{1.43}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k} h_k^T R_k^{-1} \left(z_k - \hat{z}_{k|k-1} \right), \tag{1.44}$$

$$\hat{q}(t)_k = \hat{q}(t)_{k-1} + K_{xq}(t_k, t)_{k-1} P_{k|k-1}^{-1} P_{k|k} h_k^T R_k^{-1} \left(z_k - \hat{z}_{k|k-1} \right), \tag{1.45}$$

$$K_{xq}(t_k, t)_k = P_{k|k} P_{k|k-1}^{-1} K_{xq}(t_k, t)_{k-1}, \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}
 K_q(t, \tau)_k &= K_q(t, \tau)_{k-1} - \\
 &- K_{xq}^T(t_k, t)_{k-1} h_k^T \left[R_k^{-1} - R_k^{-1} h_k P_{k|k} h_k^T R_k^{-1} \right] h_k K_{xq}(t_k, \tau)_{k-1}.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Построенные соотношения (1.43)–(1.47) и вспомогательные обозначения

$$U(t_j, t_{k-1}) = \Phi_j, \quad U(t_k, t_{k-1}) = \Phi_k, \tag{1.48}$$

$$\hat{w}_{k,k-1|k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k, \xi) B(\xi) \hat{g}(\xi)_{k-1} d\xi, \quad (1.49)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_k \hat{x}_{k-1|k-1} + \hat{w}_{k,k-1|k-1}, \quad (1.50)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = h_k \hat{x}_{k|k-1}, \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} = & \Phi_k P_{k-1|k-1} \Phi_k^T + \Phi_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_{xq}(t_{k-1}, \xi)_{k-1} B^T(\xi) U^T(t_k, \xi) d\xi + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k, \xi) B(\xi) K_{xq}^T(t_{k-1}, \xi)_{k-1} d\xi \Phi_k^T + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta)_{k-1} B^T(\eta) U^T(t_k, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$K_{wq}(t)_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k, \eta) B(\eta) K_q(\eta, t)_{k-1} d\eta, \quad (1.53)$$

$$K_{xq}(t_k, t)_{k-1} = \Phi_k K_{xq}(t_{k-1}, t)_{k-1} + K_{wq}(t)_{k-1} \quad (1.54)$$

завершают определение характеристик на момент последнего измерения. Дополнительные соотношения

$$\begin{aligned} K_x(t_j, t_k) = & \Phi_j P_{k-1|k-1} \Phi_k^T + \Phi_j \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_{xq}(t_{k-1}, \xi)_{k-1} B^T(\xi) U^T(t_j, \xi) d\xi + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_j} U(t_j, \xi) B(\xi) K_{xq}^T(t_{k-1}, \xi)_{k-1} d\xi \Phi_k^T + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_j} \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_j, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B^T(\eta) U^T(t_k, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\hat{x}_{j|k} = \hat{x}_{j|k-1} + K_x(t_j, t_k) P_{k|k-1}^{-1} P_k^k h_k^T R_k^{-1} \left[z_k - \hat{x}_{k|k-1} \right] \quad (1.56)$$

позволяют определять оптимальные по точности оценки вектора состояния в будущие моменты времени $t_j \geq t_k$, т. е. являются решением задачи оптимального прогнозирования.

Основное отличие рассмотренного здесь алгоритма для определения и прогноза вектора состояния от фильтра Калмана состоит в

применении трех новых *функциональных уравнений*: а) для оценок шума $\hat{q}(t)_k$ (1.45), б) для функции взаимной корреляции $K_{xq}(t_k, t)_k$ (1.46) и в) для апостериорной автокорреляционной функции $K_q(t, \tau)_k$ (1.47). Эти функциональные рекуррентные соотношения учитывают влияние шума системы $q(t)$ и на этой основе позволяют определять оптимальные по точности оценки вектора состояния в будущие моменты времени.

Комментарии

1. В представленном решении рассматриваемой задачи определение матричной функции взаимной корреляции $K_{xq}(t_k, t)_{k-1}$ по формуле (1.54) играет важную роль. Ее применение в формуле (1.52) выполняется по схеме «с промежуточной точкой» и обеспечивает корректное определение корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния на каждом шаге последовательной обработки данных измерений.
2. Естественно, вычисления по трем функциональным рекуррентным соотношениям (1.45)–(1.47) являются весьма трудоемкими. При их реализации на ЭВМ существенно увеличиваются затраты машинного времени и памяти. Еще 40 лет назад такая реализация была трудно решаемой проблемой. Однако в настоящее время в связи с феноменальными достижениями в развитии вычислительной техники этот недостаток не является столь существенным.
3. Достоинством приведенных рекуррентных соотношений является возможность их применения при различных конкретных видах автокорреляционных функций шумов $K_q(t, \tau)$. Однако в ряде случаев, в частности, при использовании экспериментальных корреляционных функций $K_q(t, \tau)$, возникает вопрос, является ли данная корреляционная функция корректной. Ответ на этот вопрос требует проведения специальных исследований, выходящих за рамки данной книги.

Определение и прогнозирование параметров орбиты при совместной обработке данных измерений

Рассмотренная здесь проблема может быть решена разными способами. Один из способов, основанный на последовательной обработке данных измерений, был рассмотрен выше. Возможно также решение задачи на основе применения взвешенного метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия (Линник, 1962; Аким, Энеев, 1963; Эльясберг, 1976; Мудров, Кушко, 1976;

Vallado, 2004). Эти методы используют совместную обработку измерений. Обычно, при использовании этих методов для определения параметров орбит выполняется фильтрация только ошибок измерений. Нам известна только одна публикация (Назаренко, Маркова, 1973), где при использовании этих методов учитывается влияние шума $q(t)$. Получение такого решения представляется весьма заманчивым, поскольку оно является обобщением традиционного подхода, который не учитывает влияние случайных возмущений.

Детальный вывод необходимых формул изложен в работах (Анисимов, 1975; Назаренко, Скребушевский, 1981). Они имеют следующий вид:

$$Z_k = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_k \end{Bmatrix}, \quad H = \begin{Bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_k \end{Bmatrix}, \quad R_\Sigma = \begin{Bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{Bmatrix}, \quad (1.57)$$

$$U_j = \begin{Bmatrix} U(t_1, t_j) \\ U(t_2, t_j) \\ \dots \\ U(t_k, t_j) \end{Bmatrix}, \quad HU_j = X_j, \quad (1.58)$$

$$Q_{il}^{(j)} = \int_{t_j}^{t_i} \int_{t_j}^{t_j} U(t_i, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta)_0 B^T(\eta) U^T(t_l, \eta) d\eta d\xi, \quad (1.59)$$

$$K_{wj} = \begin{Bmatrix} Q_{11}^{(j)} & Q_{12}^{(j)} & \dots & Q_{1k}^{(j)} \\ Q_{21}^{(j)} & Q_{21}^{(j)} & \dots & Q_{2k}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1}^{(j)} & Q_{k2}^{(j)} & \dots & Q_{kk}^{(j)} \end{Bmatrix} = \{Q_{il}^{(j)}\}, \quad i, l, = 1, \dots, k, \quad (1.60)$$

$$P_j = (HK_{wj}H^T + R_\Sigma)^{-1}. \quad (1.61)$$

$$\hat{x}_j = (X_j^T P_j X_j)^{-1} X_j^T P_j Z_k. \quad (1.62)$$

Эти выражения имеют традиционную форму. Отличие состоит в формировании весовой матрицы P_j , которая учитывает не только

погрешности измерений (матрица R_Σ), но и влияние шума системы (матрица K_{wj}). В частном случае, при отсутствии шума $q(t)$, т. е. при $K_q(t, \tau)_0 = 0$, слагаемое $HK_{wj}H^T$ исчезает, и решение (1.62) совпадает с традиционным. Слагаемое $HK_{wj}H^T$ равно нулю также в другом частном случае, когда все измерения выполняются в один и тот же момент времени.

Комментарий

В приведенном алгоритме учитывается влияние цветного шума на погрешности прогнозирования вектора состояния. Этот учет осуществляется на основе формул (1.59)–(1.61). Первая из них является частным случаем формулы (1.10), в которой не учитываются погрешности начальных условий (матрицы $K_x(t_0) = P_{0|0}$ и $K_{xq}(t_0, t)$). Этот неучет основан на методе максимального правдоподобия. Особенностью алгоритма является учет взаимной корреляции погрешностей вектора состояния в разные моменты времени, осуществляемый на основе формулы (1.60). Еще одна особенность алгоритма — выходными результатами его применения (вектор состояния и корреляционная матрица ошибок) являются оптимальные оценки для произвольного момента времени t_j .

Матрицы P_j и X_j , присутствующие в решении (1.62), являются функциями времени t_j . Поэтому это решение (1.62) может быть использовано для определения оценок вектора состояния в произвольный момент времени, т. е. для прогнозирования движения системы. Однако использование этого решения для прогноза не всегда может быть удобным. Когда требуется определять оценки вектора состояния в различные моменты времени, возникает необходимость многократного обращения матрицы (1.61). Другой недостаток применения решения (1.62) для прогнозирования движения на различные моменты времени состоит в том, что оно не содержит в явном виде связь такого прогнозирования с традиционным интегрированием уравнений движения (1.39) — решением задачи Коши. В связи с этим представляет интерес построение на основе решения (1.62) системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x} + B(t)\hat{q}(t). \quad (1.63)$$

Формула для оценки случайного процесса $q(t)$ в произвольный момент времени на основе рассмотренного алгоритма, аналогичная формуле (1.45), имеет вид

$$\hat{q}(t_j)_k = W_k^T(t_j)H^T P_k(Z_k - X_k\hat{x}_k), \quad (1.64)$$

где

$$W_k(t_j) = \begin{pmatrix} K_{wq}(t_1, t_j) \\ K_{wq}(t_2, t_j) \\ \dots \\ K_{wq}(t_k, t_j) \end{pmatrix}, \quad (1.65)$$

$$K_{wq}(t_i, t_j) = \int_{t_j}^{t_i} U(t_i, \xi) B(\xi) K_q(\xi, t_j)_0 d\xi. \quad (1.66)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений (1.63) при исходных данных (1.62) и (1.64), относящихся к моменту времени $t_j = t_k$, позволяет определять максимально правдоподобные оценки вектора состояния в произвольные моменты времени, т. е. обеспечивает решение задачи прогнозирования.

Из уравнения (1.63) очевидно, что интегрирование уравнения $dx/dt = A(t)x(t)$, которое традиционно используется для прогнозирования, или применение его аналитического решения $x(t) = U(t, t_0)x(t_0)$ не обеспечивает получения эффективных оценок, поскольку не даёт возможности определять и использовать при прогнозе оценок шум системы (1.64).

Естественным дополнением к прогнозированию вектора состояния на основе интегрирования уравнения (1.63) является прогнозирование корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния. Эта задача решается на основе общей формулы (1.9), в которую необходимо подставить начальные условия по результатам совместной обработки данных измерений, а именно: в качестве матрицы $P_{0|0}$ используется матрица (1.61) для момента времени $t_j = t_k$. Для определения исходных значений других матриц построены следующие формулы:

$$K_{xq}(t_k, \tau)_k = -C_k X_k^T P_k H W_k(\tau). \quad (1.67)$$

$$K_q(t, \tau)_k = K_q(t, \tau)_0 - W_k^T(t) H^T G_k H W_k(\tau), \quad (1.68)$$

где

$$G_k = P_k - P_k X_k C_k X_k^T P_j. \quad (1.69)$$

Комментарий

При совместной обработке данных измерений необходимость в определении и применении матрицы взаимной корреляции $K_{xq}(t_k, \tau)_k$ возникает в том случае, когда вместо решения (1.61) для произвольного момента времени t_j используются начальные условия (1.67) и (1.68) в точке t_k и общая формула (1.9).

Решения рассматриваемой задачи на основе последовательной и совместной обработки данных измерений теоретически являются эквивалентными по точности. Однако в реальных условиях второй подход, хотя и более трудоёмок, обеспечивает получение более устойчивых оценок. При современных характеристиках вычислительной техники его применение является вполне уместным.

1.5. Простейший пример учета цветного шума

Рассмотрим простой пример, который является иллюстрацией изложенной выше теории. Вместо матричного уравнения (1.1) рассмотрим скалярное уравнение, которое следует из (1.1) при $A(t) = 0$ и $B(t) = b$:

$$\frac{d\delta x}{dt} = bq(t). \quad (1.70)$$

Для этого дифференциального уравнения фундаментальная матрица решений $U(t, t_0)$ имеет простейший вид: $U(t, t_0) = 1$.

Примем, что корреляционная функция случайного процесса (1.3) имеет вид

$$K_q(\xi, \eta) = \sigma_q^2 k_q(\xi - \eta), \quad (1.71)$$

где

$$k_q(\xi - \eta) = \begin{cases} 1 - \frac{|\xi - \eta|}{\Delta}, & |\xi - \eta| \leq \Delta, \\ 0, & |\xi - \eta| > \Delta. \end{cases} \quad (1.72)$$

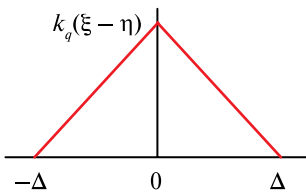


Рис. 1.3. Вид корреляционной функции

Эта корреляционная функция представлена на рис. 1.3.

С учетом изложенных допущений приведенные выше формулы (1.9) и (1.11) для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей $K_x(t)$ и функции взаимной корреляции $K_{xq}(t, \eta)$ принимают вид

$$K_x(t) = \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2(t_0) + 2b \int_{t_0}^t K_{xq}(t_0, \eta) d\eta + b^2 \sigma_q^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k_q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.73)$$

$$K_{xq}(t, \eta) = K_{xq}(t_0, \eta) + b \sigma_q^2 \int_{t_0}^t k_q(\xi, \eta) d\xi. \quad (1.74)$$

Выполним прогноз дисперсии погрешностей (1.73) из точки t_0 в точку t двумя способами: непосредственно в точку t и с применением промежуточной точки в момент времени $t_0 < t_1 < t$. В обоих случаях используются следующие начальные условия:

$$\sigma_x^2(t_0) = 0, \quad K_{xq}(t_0, \eta) = 0. \quad (1.75)$$

Для первого случая (при непосредственном прогнозе из точки t_0 в точку t) получим следующее значение дисперсии погрешностей на момент прогноза:

$$\sigma_x^2(t) = b^2 \sigma_q^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t k_q(\xi, \eta) d\xi d\eta = b^2 \sigma_q^2 \begin{cases} (t-t_0)^2 \left[1 - \frac{t-t_0}{3\Delta} \right], & t-t_0 \leq \Delta, \\ \Delta \left[t-t_0 - \frac{1}{3}\Delta \right], & t-t_0 > \Delta. \end{cases} \quad (1.76)$$

Вычисление интеграла (1.76) при $\tau = t - t_0 > \Delta$ сводится к вычислению объема пространства под поверхностью, представленной на рис. 1.4 и имеющей форму двускатной крыши.

Область изменения аргументов при вычислении интеграла (область А) представлена на рис. 1.5.

Очевидно, что объем пространства под «крышей» в области А равен:

$$V_A = V_{A+a+a} - 2V_a = \Delta\tau - 2\frac{1}{6}\Delta^2 = \Delta \left[\tau - \frac{1}{3}\Delta \right]. \quad (1.77)$$

Естественно, что этот результат совпадает с (1.76).

Перейдем к прогнозу с применением промежуточной точки. При начальных условиях в точке t_1 формула (1.73) принимает вид

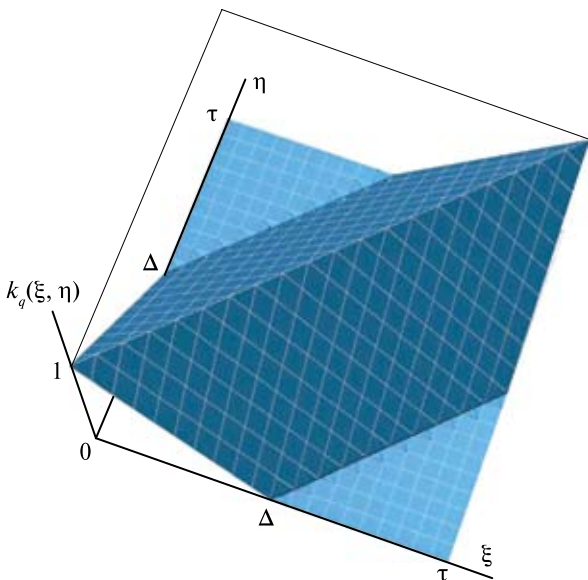


Рис. 1.4. График функции (1.72) в области интегрирования

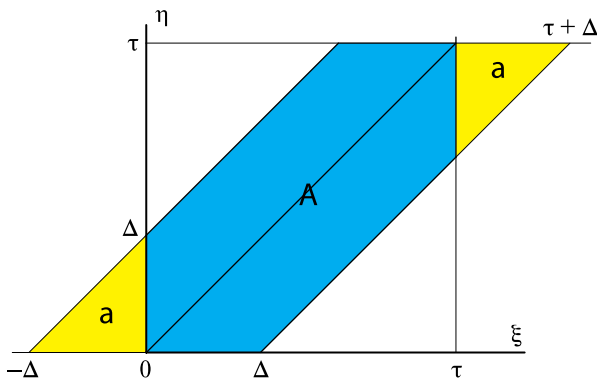


Рис. 1.5. Область значений аргументов при вычислении интеграла

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2(t_1) + 2b \int_{t_1}^t K_{xq}(t_1, \eta) d\eta + b^2 \sigma_q^2 \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t k_q(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.78)$$

Построим выражение для функции взаимной корреляции $K_{xq}(t_1, \eta)$ при $\eta > t_1$. Для этого используется формула (1.74). Графики подын-

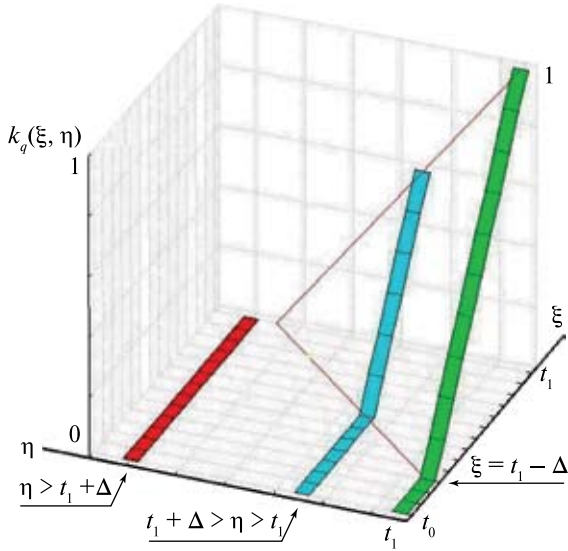


Рис. 1.6. Область интегрирования при построении $K_{xq}(t_1, \eta)$

тегрального выражения при различных значениях аргумента η схематично представлены на рис. 1.6. Интеграл вычисляется в области изменения аргументов $\eta > t_1, t_0 \leq \xi \leq t_1$.

В результате вычисления интеграла получим

$$K_{xq}(t_1, \eta) = b\sigma_q^2 \begin{cases} 0,5 \frac{(t_1 + \Delta - \eta)^2}{\Delta}, & t_1 \leq \eta \leq t_1 + \Delta, \\ 0, & \eta > t_1 + \Delta. \end{cases} \quad (1.79)$$

Максимальное значение этой функции достигается в точке $\eta = t_1$ и равно

$$K_{xq}(t_1, t_1) = b\sigma_q^2 0,5\Delta. \quad (1.80)$$

Рассмотрим теперь все три слагаемых выражения (1.78). Первое из них вычисляется по формуле (1.76):

$$\sigma_x^2(t_1) = b^2\sigma_q^2\Delta \left(t_1 - t_0 - \frac{1}{3}\Delta \right), \quad t_1 - t_0 > \Delta. \quad (1.81)$$

Вычисление второго слагаемого (при $t > t_1 + \Delta$) приводит к результату

$$2b \int_{t_1}^t K_{xq}(t_1, \eta) d\eta = b^2 \sigma_q^2 \frac{1}{3} \Delta^2. \quad (1.82)$$

Обратим внимание на то, что эта величина тем больше, чем больше интервал корреляции (Δ^2), т. е., чем больше цветной шум отличается от белого шума.

Наконец вычисление третьего слагаемого по формуле (1.76) при $t_0 = t_1$ приводит к результату

$$b^2 \sigma_q^2 \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t k_q(\xi, \eta) d\xi d\eta = b^2 \sigma_q^2 \Delta \left(t - t_1 - \frac{1}{3} \Delta \right). \quad (1.83)$$

Суммирование значений упомянутых трех слагаемых приводит к значению дисперсии погрешностей прогноза при использовании промежуточной точки:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= b^2 \sigma_q^2 \left[\Delta \left(t_1 - t_0 - \frac{1}{3} \Delta \right) + \frac{1}{3} \Delta^2 + \Delta \left(t - t_1 - \frac{1}{3} \Delta \right) \right] = \\ &= b^2 \sigma_q^2 \Delta \left(t - t_0 - \frac{1}{3} \Delta \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с результатами прогнозирования дисперсии по формуле (1.76) при $t > t_0 + \Delta$, т. е. без применения промежуточной точки.

Комментарий

Сравним результат прогноза (1.84) с соответствующим результатом для случая, когда шум $q(t)$ является белым и имеет корреляционную функцию $K_q(\tau = \xi - \eta)_{white} = \sigma_q^2 \delta(\tau)$. Следует иметь в виду, что для белого шума площадь подинтегральной функции

$$S_q = \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) d\tau \quad (1.85)$$

равна σ_q^2 . Для этих условий результат прогноза дисперсии погрешностей имеет вид

$$\sigma_x^2(t)_{white} = b^2 S_q (t - t_0). \quad (1.86)$$

Для рассматриваемого цветного шума площадь (1.85) равна $\sigma_q^2 \Delta$. Подставим это значение в выражение (1.84) вместо множителя перед скобкой. Получим

$$\sigma_x^2(t) = b^2 S_q \left\{ t - t_0 - \frac{1}{3} \Delta \right\}. \quad (1.87)$$

Из сравнения оценок (1.86) и (1.87) очевидно, что при малых значениях интервала корреляции, т. е. при $t - t_0 \gg \Delta$, эти оценки практически совпадают. И наоборот, различия оценок (1.86) и (1.87) тем больше, чем больше интервал корреляции. Как показано выше, корректность решения (1.87) при использовании промежуточной точки достигается на основе учета матрицы взаимной корреляции $K_{xq}(t_1, \eta)$, влияние которой тем больше, тем больше интервал корреляции Δ .

1.6. Выводы

1. Эволюция погрешностей вектора состояния при прогнозировании описывается системой неоднородных линейных дифференциальных уравнений, в которых возмущение («цветной» шум системы) принимается гауссовым случайным процессом с известными статистическими характеристиками. Важным является то, что этот шум существенно отличается от белого шума, т. е. имеется корреляция значений шума в разные моменты времени.
2. Построена зависимость для определения корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния в произвольный момент времени. Исходными данными являются: автокорреляционная функция шума системы, корреляционная матрица погрешностей вектора состояния в начальный момент времени и матрица взаимной корреляции погрешностей вектора состояния в начальный момент времени и шума системы в произвольный момент времени.
3. При прогнозировании движения спутника возникает взаимная корреляция погрешностей вектора состояния и значений шума в разные моменты времени. Поэтому для обеспечения корректного прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния необходимо учитывать полный набор исходных данных, перечисленный в п. 2. Выполнение прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей без учета матриц взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и шума приводит к неправильным результатам.
4. Изложена методика построения функций взаимной корреляции в процессе уточнения параметров орбит по данным измерениям.

Рассмотрены методы последовательной и совместной обработки данных измерений. Теоретически эти способы являются эквивалентными по точности. Однако в реальных условиях второй подход, хотя и является более трудоемким, обеспечивает получение более устойчивых оценок. При современных характеристиках вычислительной техники его применение является вполне уместным.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. Введение

Среди возмущающих факторов, оказывающих влияние на движение спутников Земли, существенное место занимает отклонение гравитационного поля Земли от центрального. Это отклонение характеризуется возмущающей функцией

$$R_{\Sigma} = U(r, \varphi, \lambda) - U_0, \quad (2.1)$$

где $U(r, \varphi, \lambda)$ — гравитационный потенциал Земли; $U_0 = \mu/r$ — ньютоновский потенциал; μ — гравитационная постоянная; r, φ, λ — сферические координаты точки, соответственно радиус-вектор, широта и долгота.

Широко используется разложение гравитационного потенциала Земли по сферическим функциям (полиномам Лежандра) вида

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n (c_{nk} \cos k\lambda + d_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi) \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь R_{\oplus} — средний экваториальный радиус Земли; c_{nk}, d_{nk} — безразмерные коэффициенты, характеризующие фигуру Земли; $P_{n0}(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра n -го порядка (при $k=0$); $P_{nk}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра (при $k>0$). Заметим, что функции вида $\sum_{k=0}^n (R_{\oplus}/r)^n (c_{nk} \cos k\lambda + d_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi)$ — общие сферические функции n -го порядка. При $k=0$ слагаемые потенциала (2.2) представляют собой зональные гармоники, при $k \neq 0$ — тессеральные гармоники, а при $k=n$ — секториальные гармоники.

Подробное описание представления гравитационного потенциала Земли в форме (2.2) и результаты исследования его свойств изло-

жены в большом числе публикаций, включая множество монографий. Здесь нет необходимости приводить обзор этих публикаций. В разд. «Литература» приведены ссылки только на некоторые из первых публикаций, наиболее известные в России и США (Жонголович, 1952; Дубошин, 1968; Kaula, 1966).

Важно отметить, что за 50 лет проведения спутниковых исследований параметры гравитационного поля Земли, которые используются в (2.2), многократно уточнялись. Если на первых порах достоверные оценки были получены для параметров c_{n0} , c_{nk} , d_{nk} с малыми значениями индекса n ($n < 6$), то в настоящее время известны миллионы параметров (1973 Smithsonian Standard..., 1973; Marsh, et al. 1990; Tapley et al. 1994; Lemoine F.G. et al. 1998; Pavlis et al., 2008). Здесь приведены ссылки на американские публикации. В России работы по уточнению параметров гравитационного поля также проводились в достаточно большом объеме, однако эти результаты подробно не публиковались. Краткую информацию об этих исследованиях можно найти в статье (Рогозин, Зуева, 2007).

Из (2.1) и (2.2) легко определяются составляющие возмущающего ускорения по различным направлениям, в частности, по радиус-вектору (F_r), параллели (F_λ) и меридиану (F_φ) (рис. 2.1):

$$F_r = \frac{\partial R_\Sigma}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n+1) \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n (c_{nk} \cos k\lambda + d_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi), \quad (2.3)$$

$$F_\lambda = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial R_\Sigma}{\partial \lambda} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{\cos \varphi} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n (-c_{nk} \sin k\lambda + d_{nk} \cos k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi), \quad (2.4)$$

$$F_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial R_\Sigma}{\partial \varphi} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^n (c_{nk} \cos k\lambda + d_{nk} \sin k\lambda) \frac{\partial P_{nk}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (2.5)$$

Для сферических функций справедливы соотношения ортогональности:

$$\iint_{\text{по сфере}} P_{nk}(\sin \varphi) P_{ji}(\sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos k\lambda \\ \sin i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos i\lambda \\ \sin k\lambda \end{pmatrix} \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = 0 \quad \text{при } n \neq j \text{ или } k \neq j, \quad (2.6)$$

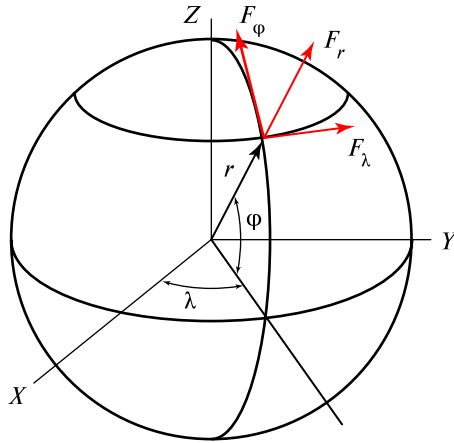


Рис. 2.1. Возмущающие ускорения

$$\iint_{\text{по сфере}} \left[P_{nk}(\sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{pmatrix} \right]^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = 2\pi \frac{\delta_k (n+k)!}{(2n+1)(n-k)!} \quad \text{при } n=j, k=j. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\delta_k = \begin{cases} 2, & \text{при } k=0, \\ 1, & \text{при } k>0, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{pmatrix} = \cos k\lambda \text{ или } \sin k\lambda. \quad (2.8)$$

При проведении исследований удобно применять нормирование функций Лежандра и коэффициентов c_{n0} , c_{nk} , d_{nk} . Нормирование ведется так, чтобы соответствующий выражению (2.7) интеграл был равен 4π , т. е.

$$\iint_{\text{по сфере}} \left[\bar{P}_{nk}(\sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{pmatrix} \right]^2 \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi = 4\pi. \quad (2.9)$$

Кроме того, дополнительно накладываются условия

$$\bar{P}_{nk}(\sin \varphi) (\bar{c}_{nk} \cos k\lambda + \bar{d}_{nk} \sin k\lambda) = P_{nk}(\sin \varphi) (c_{nk} \cos k\lambda + d_{nk} \sin k\lambda). \quad (2.10)$$

Эти условия выполняется при следующем нормировании:

$$\bar{P}_{nk}(\sin \varphi) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-k)!}{\delta_k (n+k)!}} P_{nk}(\sin \varphi), \quad (2.11)$$

$$\left\| \frac{\bar{c}_{nk}}{\bar{d}_{nk}} \right\| = \sqrt{\frac{\delta_k (n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!}} \left\| \frac{c_{nk}}{d_{nk}} \right\|. \quad (2.12)$$

Рассмотрим основные особенности гравитационного потенциала Земли (2.2).

1. Разложение (2.2) содержит бесконечное число слагаемых. Из этого множества известно ограниченное их число. Например, американская модель EGM96 (*Lemoine et al., 1998*) содержит параметры для значений индексов $n \leq 360$ и $k \leq 360$. Гравитационный потенциал представляется как (360×360) . Последняя модель EGM2008 (*Pavlis et al., 2008*) содержит все гармоники разложения (2.2) до 2160-го порядка (модель 2160×2160).
2. Из всех гармоник наибольшее значение имеет вторая зональная гармоника ($n = 2, k = 0$), при которой коэффициент c_{20} имеет величину порядка 10^{-3} . Величина остальных коэффициентов — порядка 10^{-6} и менее.
3. При $n \geq 3$ значения коэффициентов разложения в среднем медленно уменьшаются с ростом n (*Kaula, 1966*). Рассмотрение средних значений нормированных коэффициентов n -го порядка

$$\sqrt{\bar{c}_{nk}^2 + \bar{d}_{nk}^2} = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (\bar{c}_{nk}^2 + \bar{d}_{nk}^2)} \quad (2.13)$$

показывает, что эта величина достаточно хорошо аппроксимируется функцией

$$\sqrt{\bar{c}_{nk}^2 + \bar{d}_{nk}^2} \approx \frac{C}{n^2}, \quad (2.14)$$

где $C = 1,2 \cdot 10^{-5}$.

4. Ошибки определения коэффициентов $\bar{c}_{nk}, \bar{d}_{nk}$ мало изменяются с увеличением индекса n . По данным работы (*Lemoine et al., 1998*) среднее значение среднеквадратических отклонений (СКО) их погрешностей удовлетворяет условию

$$\sigma_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n [\sigma(\bar{c}_{nk}) + \sigma(\bar{d}_{nk})] < (\sigma_n)_{\max} = 0,5 \cdot 10^{-9}. \quad (2.15)$$

Для модели EGM96 на рис. 2.2 представлены все оценки величин (2.13)–(2.15) в функции порядка гармоник $n \leq 70$.

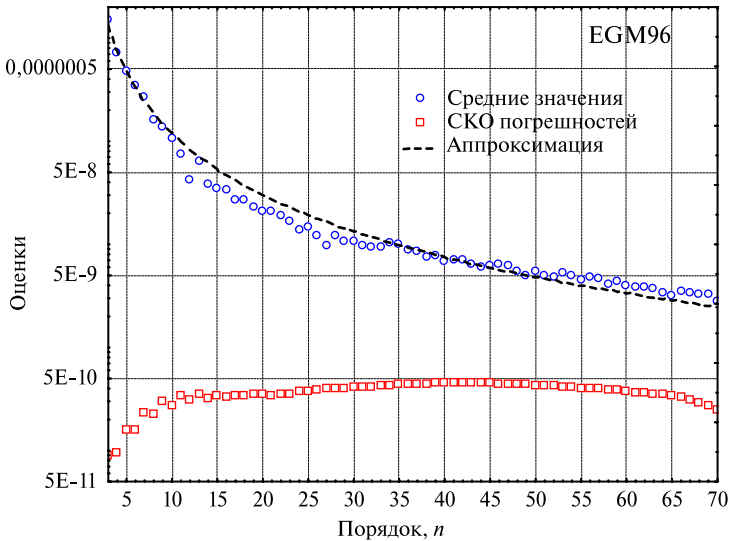


Рис. 2.2. Средние значения нормированных коэффициентов n -го порядка и их среднеквадратических отклонений

5. Величина возмущающих ускорений (2.3)–(2.5) быстро уменьшается по мере увеличения индекса n , поскольку их значения обратно пропорциональны геоцентрическому расстоянию r в степени $(n + 2)$, что влияет на выбор числа учитываемых гармоник при прогнозировании движения спутников разных типов.

При принятии решения о числе гармоник в разложении (2.2), которые необходимо учитывать в правых частях уравнений движения при прогнозировании движения спутников, можно воспользоваться решающим правилом (Назаренко, 1968)

$$\sigma(\bar{c}_{nk}) < |\bar{c}_{nk}|, \quad \sigma(\bar{d}_{nk}) < |\bar{d}_{nk}| \quad (2.16)$$

для учитываемых гармоник. При использовании оценок (2.14) и (2.15) оптимальный порядок учитываемых гармоник определяется из уравнения

$$\frac{C}{n_{\max}^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma(\bar{c}_{nk})_{\max}. \quad (2.17)$$

Отсюда следует:

$$n_{\max} \approx \frac{0,003}{\sqrt{\sigma(\bar{c}_{nk})_{\max}}}. \quad (2.18)$$

График этой функции представлен на рис. 2.3. При использовании зависимости (2.18) надо иметь в виду, что данные о точности коэффициентов разложения гравитационного потенциала в ряд, публикуемые авторами моделей, не являются достаточно достоверными.

Рассмотрим данные о точности определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала на конкретном примере. В табл. 2.1 представлены данные об оценках коэффициента $\bar{c}_{2,0}$.

Таблица 2.1. Данные об оценках коэффициента $\bar{c}_{2,0}$ по моделям EGM96 и EGM2008

$(\bar{c}_{2,0})_{\text{EGM96}}$	$(\bar{c}_{2,0})_{\text{EGM2008}}$	$(\bar{c}_{2,0})_{\text{EGM2008}} - (\bar{c}_{2,0})_{\text{EGM96}}$	$\sigma(\bar{c}_{2,0})_{\text{EGM96}}$
-0,4841653717E-3	-0,4841651438E-3	2,27E-10	0,35E-10

Из приведенных оценок видно, что по данным модели EGM2008 поправка к значению коэффициента $(\bar{c}_{2,0})_{\text{EGM96}}$ в 6,5 раз превысила объявленное значение СКО погрешностей определения ко-

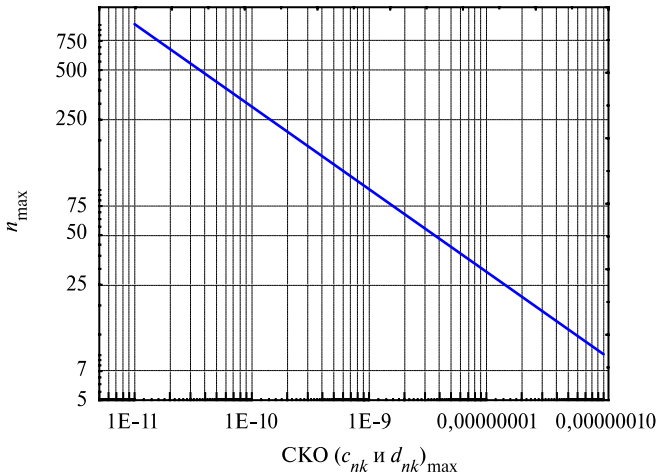


Рис. 2.3. Оптимальный порядок учитываемых гармоник

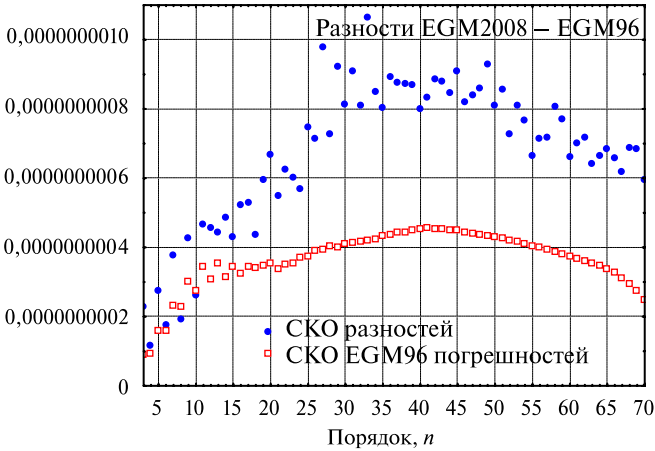


Рис. 2.4. Сравнение поправок к модели EGM96 с оценками СКО

эфициента $\bar{c}_{2,0}$. Это свидетельствует о том, что к приведенным на рис. 2.2 оценкам СКО погрешностей надо относиться критически. Дополнительно было проведено сравнение оценок коэффициентов \bar{c}_{nk} , \bar{d}_{nk} по моделям 1996 и 2008 гг. Для всех значений n и k при $n \leq 80$ вычислялись разности $d\bar{c}_{nk}$, $d\bar{d}_{nk}$ соответствующих коэффициентов и их среднеквадратические значения при различных n :

$$\text{СКО}_n = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n \left(d\bar{c}_{nk}^2 + d\bar{d}_{nk}^2 \right)}. \quad (2.19)$$

На рис. 2.4 представлены СКО разностей (2.19), а также СКО погрешностей коэффициентов σ_n по данным модели EGM96. Из этих данных видно, что для всех $n > 10$ среднеквадратические значения поправок (2.19) в 2,0...2.5 раза превышают соответствующие заявленные значения СКО погрешностей модели EGM96. В случае реалистических оценок СКО погрешностей коэффициентов они должны быть *больше* среднеквадратических значений поправок (2.19).

На практике, при прогнозировании движения КО учитывается меньшее число гармоник по сравнению с рекомендациями, представленными на рис. 2.4. Это объясняется не только отмеченными выше недостатками оценок СКО погрешностей коэффициентов \bar{c}_{nk} , \bar{d}_{nk} . Другими причинами являются:

- увеличение затрат машинного времени на выполнение прогнозов, которые пропорциональны n_{\max}^2 ;
- уменьшение влияния гармоник с большими значениями степени n по мере увеличения высоты спутников;
- влияние погрешностей других учитываемых факторов, например торможения в атмосфере.

2.2. Основные формулы для сферических функций

Данные о сферических функциях изложены в большом числе публикаций. Здесь мы ссылаемся на монографии российских авторов (Дубошин, 1968; Демин, 1968), а также на (Маделунг, 1960). Для вычисления функций Лежандра используются соотношения:

$$P_{n0}(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (2.20)$$

$$P_{nk}(x) = \left(\sqrt{1-x^2} \right)^k \frac{d^k}{dx^k} P_{n0}(x).$$

Эти формулы удобно применять при малых значениях n . Для вычислений при больших n целесообразно использовать рекуррентные соотношения:

$$P_{n+1,0}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_{n0}(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1,0}(x),$$

$$P_{n+1,k}(x) = x P_{nk}(x) + (n+k) \sqrt{1-x^2} \cdot P_{n,k-1}(x), \quad (2.21)$$

$$P_{n+1,k}(x) = \frac{2n+1}{n+1-k} x P_{nk}(x) - \frac{n+k}{n+1-k} P_{n-1,k}(x).$$

Последняя формула является обобщением первой.

Для производных функций Лежандра справедливы следующие формулы:

$$\frac{dP_{n,0}(x)}{dx} = \frac{n}{1-x^2} P_{n-1,0}(x) - \frac{nx}{1-x^2} P_{n,0}(x), \quad (2.22)$$

$$\frac{dP_{n,k}(x)}{dx} = \frac{(n+1)x}{1-x^2} P_{n,k}(x) - \frac{(n-k+1)}{1-x^2} P_{n+1,k}(x).$$

В процессе дальнейшего анализа используется также так называемая теорема сложения сферических гармоник. Это тождество имеет вид

$$P_{n,0}(\cos \psi) = \sum_{k=0}^n \frac{2(n-k)!}{\delta_k (n+k)!} P_{n,k}(\sin \varphi_1) P_{n,k}(\sin \varphi_2) \cos k(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (2.23)$$

Здесь

$$\cos \psi = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (2.24)$$

— косинус угла между направлениями на две точки со сферическими координатами φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 .

2.3. Дисперсия гравитационных возмущений

Используя выражения (2.3)(2.5) и обозначения

$$\rho_n(r) = \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n, \quad (2.25)$$

$$f_{nk}(\lambda) = \delta c_{nk} \cos k\lambda + \delta d_{nk} \sin k\lambda, \quad (2.26)$$

$$g_{nk}(\lambda) = -\delta c_{nk} \sin k\lambda + \delta d_{nk} \cos k\lambda, \quad (2.27)$$

$$\delta c_{nk}, \delta d_{nk} = \begin{cases} (c_{nk} - \hat{c}_{nk}), (d_{nk} - \hat{d}_{nk}) & \text{при } n \leq n^*, \\ c_{nk}, d_{nk} & \text{при } n > n^*, \end{cases} \quad (2.28)$$

где $\hat{c}_{nk}, \hat{d}_{nk}$ — применяемые оценки коэффициентов, запишем выражения для погрешностей расчета соответствующих возмущающих ускорений:

$$\delta F_r = \frac{\partial R_{\Sigma}}{\partial r} = - \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n(r) (n+1) \sum_{k=0}^n f_{nk}(\lambda) P_{nk}(\sin \varphi), \quad (2.29)$$

$$\delta F_{\lambda} = \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n(r) \sum_{k=0}^n \frac{k}{\cos \varphi} g_{nk}(\lambda) P_{nk}(\sin \varphi). \quad (2.30)$$

$$\delta F_{\varphi} = \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n(r) \sum_{k=0}^n f_{nk}(\lambda) \frac{\partial P_{nk}(\sin \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (2.31)$$

Погрешности расчета возмущений (2.29)–(2.31) являются функциями сферических координат r, φ, λ рассматриваемой точки и зависят

от погрешностей учитываемых параметров поля ($n \leq n^*$) и от самих значений неучитываемых параметров ($n > n^*$) (см. (2.28)), где n^* — максимальный порядок учитываемых гармоник гравитационного потенциала, использующих оценки \hat{c}_{nk} , \hat{d}_{nk} .

Непрерывная последовательность возмущений (2.29)–(2.31) образует трёхмерную векторную возмущающую функцию $\delta F(t)$, которая является источником погрешностей прогнозирования движения КО. Конкретная реализация этой функции при полете КО над конкретными районами Земли не является случайной. Однако, если нас интересуют оценки возможного отклонения траектории полета от расчетной при движении над разными районами Земли, то функцию $\delta F(t)$ можно считать случайной. Необходимое для усреднения множество элементарных событий возникает в связи с наличием области земной поверхности при $\varphi \in (-i, +i)$, над которой может пролетать КО.

Примем, что среднее значение (математическое ожидание) погрешностей (2.29)–(2.31) равно 0. Тогда дисперсия этих погрешностей может быть определена по следующим формулам:

$$\sigma_r^2(r) = M(\delta F_r)^2 = M \left\{ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \rho_j \rho_n (n+1)(j+1) \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^n f_{ji} f_{nk} P_{ji} P_{nk} \right\}, \quad (2.32)$$

$$\sigma_\lambda^2(r) = M(\delta F_\lambda)^2 = M \left\{ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \rho_j \rho_n \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^n i k g_{ji} g_{nk} P_{ji} P_{nk} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right\}, \quad (2.33)$$

$$\sigma_\varphi^2(r) = M(\delta F_\varphi)^2 = M \left\{ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \rho_j \rho_n \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^n f_{ji} f_{nk} \frac{dP_{ji}}{d\varphi} \frac{dP_{nk}}{d\varphi} \right\}. \quad (2.34)$$

Здесь для краткости опущены аргументы при функциях $\rho(r)$, $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ и $P(\sin \varphi)$. При вычислении дисперсий (2.32)–(2.34) принимается, что плотность распределений возможных положений точки на сфере является равномерной ($p(\varphi, \lambda) = \text{const}$). Обозначим поверхность сферы единичного радиуса как S . Очевидно, что телесный угол сферы равен $\int_S dS = \int_S \cos \varphi d\varphi d\lambda = 4\pi$. Поэтому $p(\varphi, \lambda) = 1/4\pi$, и математическое ожидание функции сферических координат можно представить следующими образом:

$$M \{ \Phi(r, \varphi, \lambda) \} = \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi(r, \varphi, \lambda) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi, \lambda) d\lambda \right] \cos \varphi d\varphi. \quad (2.35)$$

Определим интеграл произведения функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ по долготе λ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_{nk}(\lambda) f_{ji}(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2} (\delta c_{nk} \delta c_{ji}) \int_0^{2\pi} [\cos(k-i)\lambda + \cos(k+i)\lambda] d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2} (\delta d_{nk} \delta d_{ji}) \int_0^{2\pi} [\cos(k-i)\lambda - \cos(k+i)\lambda] d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2} (\delta c_{nk} \delta d_{ji} + \delta d_{nk} \delta c_{ji}) \int_0^{2\pi} [\sin(k-i)\lambda + \sin(k+i)\lambda] d\lambda. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь при $k \neq i$ все интегралы равны 0. При $k = i$ отличаемся от 0 является лишь интеграл функции $\cos(k-i)\lambda$. При $k = 1=0$ надо учитывать, что коэффициенты δd_{k0} и δd_{00} не существуют. В результате получим:

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} f_{nk}(\lambda) f_{ji}(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ 2\pi \delta c_{n0} \delta c_{j0} & \text{при } k = i = 0, \\ \frac{2\pi}{2} (\delta c_{nk} \delta c_{ji} + \delta d_{nk} \delta d_{ji}) & \text{при } k = i \neq 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Этот результат можно записать более компактно, если ввести специальную функцию, такую, что

$$\delta_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k = 0, \\ 1 & \text{при } k \neq 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Тогда

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} f_{nk}(\lambda) f_{ji}(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ 2\pi \frac{\delta_k}{2} (\delta c_{nk} \delta c_{ji} + \delta d_{nk} \delta d_{ji}) & \text{при } k = i. \end{cases} \quad (2.39)$$

Такой же результат справедлив для функций $g(\lambda)$:

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} g_{nk}(\lambda) g_{ji}(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ 2\pi \frac{\delta_k}{2} (\delta c_{nk} \delta c_{ji} + \delta d_{nk} \delta d_{ji}) & \text{при } k = i. \end{cases} \quad (2.40)$$

Осталось провести усреднение по широте. На основе свойства ортогональности полиномов Лежандра справедливо равенство

$$\int_{-1}^1 P_{nk}(\sin \varphi) P_{ji}(\sin \varphi) d(\sin \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq j, \\ \frac{2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!} & \text{при } n = j. \end{cases} \quad (2.41)$$

Для функций широты, входящих в выражения (2.33) и (2.34), справедливы аналогичные соотношения (прил. А):

$$\int_{-1}^1 P_{nk}(\sin \varphi) P_{ji}(\sin \varphi) \frac{d(\sin \varphi)}{\cos^2 \varphi} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq j, \\ \frac{2(n+k)!}{k(n-k)!} & \text{при } n = j. \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_{nk}(\sin \varphi)}{d\varphi} \frac{dP_{ji}(\sin \varphi)}{d\varphi} d(\sin \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq j, \\ 2 \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \left[\frac{2n(n+1)}{2n+1} - k \right] & \text{при } n = j. \end{cases} \quad (2.43)$$

Учитывая общее выражение (2.35), подставим интегралы (2.39) и (2.40) в (2.32). Получим:

$$\sigma_r^2(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n^2 (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \frac{2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!} 2\pi \frac{\delta_k}{2} (\delta c_{nk}^2 + \delta d_{nk}^2). \quad (2.44)$$

Для дальнейших упрощений целесообразно перейти к нормированным коэффициентам, используя формулу (2.12). Результат замены:

$$\sigma_r^2(r) = \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{2n} (n+1)^2 \sum_{k=0}^n (\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2). \quad (2.45)$$

На основе приведенных выше интегралов аналогично упрощаются формулы (2.33), (2.34) для дисперсии возмущений по долготе и широте:

$$\sigma_{\lambda}^2(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{2n} (2n+1) \sum_{k=0}^n k (\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2), \quad (2.46)$$

$$\sigma_{\varphi}^2(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{2n} (2n+1) \sum_{k=0}^n \left[\frac{2n(n+1)}{2n+1} - k \right] (\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2). \quad (2.47)$$

Зависимости (2.45)–(2.47) позволяют рассчитать дисперсии компонентов вектора случайных возмущений как функцию геоцентрического расстояния r . При этом величины $\delta\bar{c}_{nk}$ и $\delta\bar{d}_{nk}$ определяются по-разному, с учетом выбора параметров поля в алгоритме прогнозирования. Здесь возможны два основных варианта:

- 1) в алгоритме прогнозирования учитываются гармоники относительно невысокого порядка $n \leq n^*$; тогда при $n \leq n^*$ в качестве величин $\delta\bar{c}_{nk}$ и $\delta\bar{d}_{nk}$ применяются СКО соответствующих коэффициентов, а при $n > n^*$ — сами значения коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} ; при суммировании достаточно учесть не очень большое число слагаемых ($n_{\max} \approx 30 \dots 40$);
- 2) в алгоритме прогнозирования учитываются гармоники высокого порядка $n \leq n^*$; тогда может оказаться, что при $n > n^*$ число достоверно известных слагаемых невелико, и для получения приемлемых по точности оценок необходимо учесть члены более высокого порядка, чем $n_{\max} \approx 30 \dots 40$; в этом случае можно воспользоваться известной аппроксимацией (2.14) коэффициентов разложения гравитационного потенциала и принять

$$\overline{(\bar{c}_{nk}^2 + \bar{d}_{nk}^2)} \approx \left(\frac{C}{n^2} \right)^2. \quad (2.48)$$

При определении трёхмерной квадратной корреляционной матрицы

$$K_q = E \left[\begin{array}{c} \left\| \delta F_r \right\| \\ \left\| \delta F_\lambda \right\| \\ \left\| \delta F_\phi \right\| \end{array} \left\| \left\| \delta F_r \right\| \left\| \delta F_\lambda \right\| \left\| \delta F_\phi \right\| \right]$$

возникает необходимость вычисления недиагональных компонентов этой матрицы. Применяя изложенную выше методику, можно показать, что все недиагональные компоненты матрицы K_q равны 0. Таким образом

$$K_q(r) = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} \sigma_r^2(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\lambda^2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi^2(r) \end{array} \right\|. \end{array} \quad (2.49)$$

Комментарии

Изложенные в данном разделе результаты были опубликованы в 1981 г. в книге (Назаренко, Скребушевский, 1981). Сравним приведенные выше формулы (2.45)–(2.47) с соответствующими опубликованными результатами из других источников. Ниже приведена выдержка из статьи Райта (Wright et al., 2008a).

Решение уравнений Лапласа в сферических координатах получено многими авторами, например Каулой (Kaula, 1959, 1966),

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (47)$$

где $P_{n0}(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра n -го порядка; $P_{nk}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра; a_e — экваториальный радиус Земли; μ — гравитационная постоянная; C_{nm} и S_{nm} — постоянные (коэффициенты) степени n и порядка m . На практике степень n ограничивают некой константой N , т. е. $n \leq N$. Например, для низких орбит $N = 70$, для геостационарных орбит — $N = 6$.

Величина дисперсии

Обозначим нормированные коэффициенты потенциала степени n и порядка m как \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} . Ошибки определения ускорений возникают при обрезании разложения (47) по степеням n . Вильям Каула определил дисперсии ускорений, соответствующие заданной степени n :

$$\sigma_T^2(n) = \left[\frac{\mu^2 (n-1)^2}{a_e^4} \right] \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \quad (48)$$

Аналогичная функция была построена Райтом для оценки влияния погрешностей учитываемых членов разложения геопотенциала

$$\sigma_C^2(n) = \left[\frac{\mu^2 (n-1)^2}{a_e^4} \right] \sum_{m=0}^n \left(E \left\{ (\delta \bar{C}_{nm})^2 \right\} + E \left\{ (\delta \bar{S}_{nm})^2 \right\} \right), \quad (49)$$

где $\delta \bar{C}_{nm}$ и $\delta \bar{S}_{nm}$ — погрешности известных оценок \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} . Выражение (49) — это дисперсия соответствующих погрешностей. Для учета погрешностей обоих видов Райтом введено обозначение

$$\sigma_n^2 = \begin{cases} \sigma_T^2(n), & n > N, \\ \sigma_C^2(n), & n \leq N. \end{cases} \quad (50)$$

Приведенная здесь формула (49) соответствует одному слагаемому суммы (2.45) при $r = R_{\oplus} = a_e$ (т. е. на поверхности Земли). Небольшие различия в обозначениях не имеют принципиального значения, отмечается единственное содержательное различие этих формул: в (48) применяется множитель $(n - 1)$ вместо множителя $(n + 1)$ в формуле (2.41). Очевидно, что различие этих формул пропорционально отношению $(n + 1)/(n - 1)$, значение которого при больших n мало отличается от 1. Очевидно также, что множитель $(n + 1)$ в формуле (2.45) соответствует множителю $(n + 1)$ в формуле (2.3) и является следствием дифференцирования разложения гравитационного потенциала (2.2) по геоцентрическому расстоянию r . Таким образом, имеющееся различие формул (2.45) и (48) не является существенным, хотя применение в (48) множителя $(n - 1)$ вместо множителя $(n + 1)$ трудно объяснимо.

Выше отмечалось (см. (2.28)), что для гармоник геопотенциала, учитываемых при прогнозировании, в качестве $\delta\bar{c}_{nk}^2$ и $\delta\bar{d}_{nk}^2$ используются дисперсии погрешностей соответствующих коэффициентов. Поэтому в результате усреднения погрешностей $\delta\bar{c}_{nk}$ и $\delta\bar{d}_{nk}$ вторая сумма в (2.45) вычисляется по формуле

$$\sum_{k=0}^n \left(\delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right) = \left[\sum_{k=0}^n 2\sigma_n^2 \right] = (2n + 1)\sigma_n^2. \quad (2.50)$$

Здесь σ_n^2 — средняя дисперсия погрешностей определения нормированных коэффициентов n -й степени. Ее смысл отличается от величины (50), для которой Райтом применено то же обозначение. Оценки величины σ_n , определенные по формуле (2.19), приведены выше на рис. 2.2 и 2.4. При их обсуждении отмечалось, что эти оценки не являются достаточно достоверными и что они мало изменяются с увеличением индекса n . Подстановка (2.50) в (2.45) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(r) &= \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{2n} (n+1)^2 (2n+1) \sigma_n^2 \approx \\ &\approx \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{2n} (n+1)^3 \right] 2\sigma_{\text{const}}^2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь σ_{const}^2 — некое среднее значение дисперсии погрешностей известных оценок коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} . Важно отметить, что применение соотношений (2.50) и (2.51) основано на предположении об отсутствии корреляции погрешностей $\delta\bar{c}_{nk}$ и $\delta\bar{d}_{nk}$ разных порядков. Это предположение приводит к завышенным оценкам (2.51), однако оно является вынужденным, так как корреляция указанных погрешностей не известна.

Из выражения (2.51) следует, что вклад гармоник разного порядка пропорционален множителю $(R_{\oplus}/r)^{2n} (n+1)^3$. Зависимости этой величины от порядка гармоник n при различных отношениях (R_{\oplus}/r) приведены на рис. 2.5.

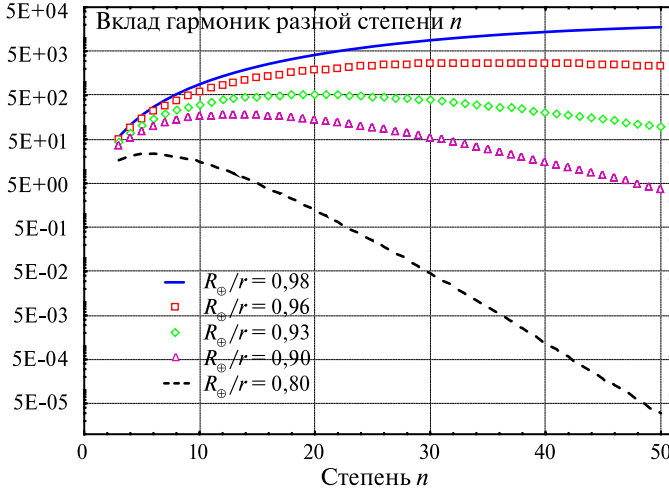


Рис. 2.5. Вклад гармоник потенциала разного порядка

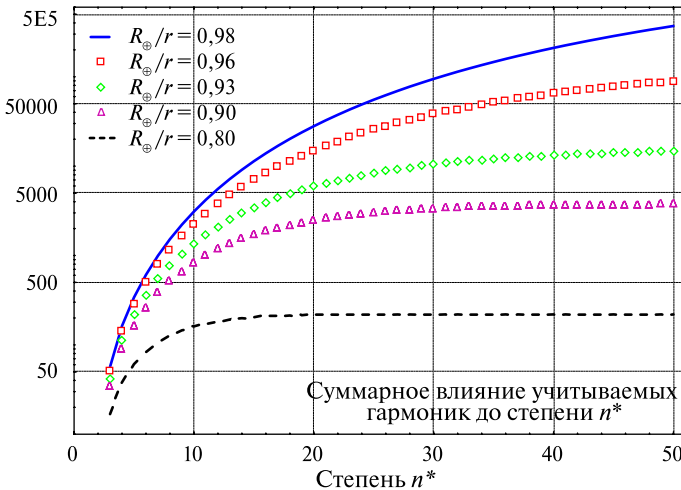


Рис. 2.6. Суммарный вклад учитываемых гармоник степени n ($n \leq n^*$)

Рассмотренные отношения (R_{\oplus}/r) соответствуют высотам перигея 130, 265, 480, 710 и 1600 км. Из данных рис. 2.5 видно, что имеется порядок гармоник n с максимальным вкладом в суммарную дисперсию (2.51). Этот порядок тем больше, чем меньше высота орбиты спутника. В рассмотренных условиях он находится в диапазоне значений n от 6 до 50.

Определенный интерес представляет зависимость входящей в формулу (2.51) суммы $\sum_{n=2}^{\infty} (R_{\oplus}/r)^{2n} (n+1)^3$ от степени n^* , которая характеризует суммарный вклад учитываемых гармоник степени $n \leq n^*$. Соответствующие результаты расчета представлены на рис. 2.6.

Из данных рис. 2.6 видно, что при росте степени учитываемых гармоник n^* значение суммы $\sum_{n=2}^{\infty} (R_{\oplus}/r)^{2n} (n+1)^3$ медленно стремится к некоторому предельному значению, величина которого тем больше, чем меньше высота орбиты спутника. Напомним, что при оценке вклада рассматриваемой суммы в дисперсию (2.51) сумму надо умножить на среднее значение дисперсии погрешностей σ_{const}^2 учитываемых гармоник.

Рассмотрим возможность упрощения формул (2.46) и (2.47) для дисперсий погрешностей возмущений по долготе и широте. Эта возможность основана на допущении о независимости погрешностей $\delta\bar{c}_{nk}$ и $\delta\bar{d}_{nk}$ от индекса k . Поэтому сумма $\left[\delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right]$ может быть представлена в виде

$$\left(\delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right) = \begin{cases} 2\sigma_n^2, & \text{при } n \leq n^*, \\ \left[\bar{c}_{nk}^2 + \bar{d}_{nk}^2 \right], & \text{при } n > n^*. \end{cases} \quad (2.52)$$

Эти значения зависят только от порядка гармоник n . Суммирование по индексу k сводится к простым вычислениям:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.53)$$

$$\sum_{k=0}^n \left[\frac{2n(n+1)}{2n+1} - k \right] = \frac{n(n+1)}{2} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right) \approx \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.54)$$

Очевидно, что эти суммы являются близкими по величине. Они отличаются на величину порядка $1/n$, которая при $n = 20$ составляет 5 %, а при $n = 50$ — 2 %. Ниже мы этим различием пренебрегаем, потому что в оценках суммы $\left\{ \delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right\}$ имеются существенно большие неопределенности. Кроме того, при оценке погрешностей расчета возмущений в разных точках траектории спутника равенство дисперсий $\sigma_\phi^2(r)$ и $\sigma_\lambda^2(r)$ *обеспечивает возможность применения одинаковых оценок дисперсии по трансверсали и бинормали*. Таким образом, дисперсии погрешностей возмущений (2.45)–(2.47) вычисляются по формулам:

$$\sigma_r^2(r) = \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^{2n} \frac{(n+1)^2 (2n+1)}{2} \left(\delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right), \quad (2.55)$$

$$\sigma_\phi^2(r) \approx \sigma_\lambda^2(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^{2n} \frac{(2n+1)n(n+1)}{2} \left(\delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right), \quad (2.56)$$

где величина $\left\{ \delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2 \right\}$ зависит от порядка учитываемых гармоник n^* и определяется в соответствии с (2.52). Из формул (2.55) и (2.56) очевидно, что дисперсии $\sigma_\phi^2(r)$ и $\sigma_\lambda^2(r)$ примерно в два раза меньше дисперсии $\sigma_r^2(r)$.

Сравним приведенные здесь формулы (2.55) и (2.56) с соответствующими формулами, опубликованными в статьях Райта (Wright et al., 2008a, b). Ниже приведены выдержки из этих статей.

Корреляционная функция $R(0)$

Каула вывел формулы для диагональных компонентов среднего значения произведения $\mathbf{R}(\psi) = E \left[\delta\mathbf{F}(P_0) \delta\mathbf{F}(P) \right]$ возмущающих ускорений в точках траектории P_0 и P . Здесь ψ — угол между направлениями на эти точки. При $\psi = 0$ эти формулы имеют вид:

$$\sigma_{RR}^2(0) = \sum_n \left[\frac{n+1}{n-1} \right]^2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+4} \sigma_n^2, \quad (63)$$

$$\sigma_{II}^2(0) = \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{n(n+1)}{(n-1)^2} \right] \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+4} \sigma_n^2, \quad (64)$$

$$\sigma_{CC}^2(0) = \frac{1}{2} \sum_n \left[\frac{n(n+1)}{(n-1)^2} \right] \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n+4} \sigma_n^2. \quad (65)$$

Здесь индексы RR , II и CC относятся соответственно к направлениям: по радиусу (Radial), трансверсали (Intrack) и бинормали (Cross-track). С учетом обозначения Райта (50) подстановка (49) в (63) приводит к результату

$$\sigma_{RR}^2(0) = \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \sum_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \left[E \left\{ \left[\delta \bar{C}_{nm} \right]^2 \right\} + E \left\{ \left[\delta \bar{S}_{nm} \right]^2 \right\} \right]. \quad (2.57)$$

Эта формула полностью совпадает с формулой (2.45).

По результатам сравнения формул (63)–(65) с формулами (2.45)–(2.47), (2.56) и (2.28) необходимо отметить следующее:

- дисперсии радиальной составляющей совпадают полностью;
- в обоих случаях дисперсии Intrack и Crosstrack одинаковы и примерно в 2 раза меньше дисперсии по радиусу, имеющиеся различия в этих составляющих относительно небольшие (несколько процентов);
- в обоих случаях влияние коэффициентов разложения потенциала \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} при оценке дисперсий с учетом числа учитываемых гармоник определяется по похожим формулам (2.52) и (50); имеющиеся различия относятся только к обозначениям.

В заключение раздела рассмотрим результаты расчетов СКО радиальной составляющей (2.55). Особенностью этих расчетов является варьирование значениями дисперсии погрешностей определения коэффициентов n -го порядка ($\sigma_n^2 = \text{const}$), которая принималась не зависимой от порядка n . Эти значения использовались для выбора максимального порядка учитываемых гармоник n^* . Расчет проводился по формуле (2.18). Затем принималось $n^* = n_{\max}$ и сумма $\left(\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2 \right)$ определялась на основе (2.52) в зависимости от значений n и n^* . Для оценки влияния не учитываемых гармоник ($n > n^*$) использовалась аппроксимация (2.14). При суммировании по индексу n рассчитывалось 1000 слагаемых. Результаты расчетов СКО радиальной составляющей для спутников с разной высотой орбиты

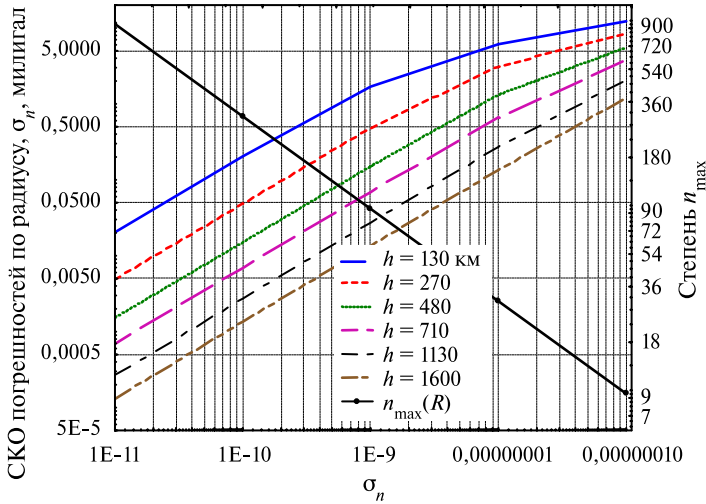


Рис. 2.7. СКО радиальной составляющей в разных условиях

в функции возможных значений дисперсии σ_n^2 представлены на рис. 2.7. Кроме того, на рисунке приведены соответствующие оценки числа учитываемых гармоник n^* (как на рис. 2.3).

Из этих данных видно, что рассмотренные факторы, а именно, СКО (σ) погрешностей определения коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} , а также высота орбиты, оказывают очень сильное влияние на СКО радиальной составляющей погрешностей. В рассмотренных условиях эта характеристика меняется на 5 порядков (дисперсия меняется на 10 порядков!). Выше в разд. 2.1 отмечалось, что данные о точности коэффициентов разложения гравитационного потенциала в ряд, публикуемые авторами моделей, не являются достаточно достоверными. Поэтому данные рис. 2.7 могут быть полезными для оценки влияния точности коэффициентов разложения потенциала на СКО возмущающих ускорений.

2.4. Автокорреляционные функции в связанной с Землей системе координат

Рассмотрим две точки со сферическими координатами $(r_1, \varphi_1, \lambda_1)$ и $(r_2, \varphi_2, \lambda_2)$. Угловое расстояние ψ между точками удовлетворяет

соотношению (2.24). Будем определять среднее значение произведения

$$\begin{aligned} K_r(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= M \left\{ \delta F_r(r_1, \varphi_1, \lambda_1) \delta F_r(r_2, \varphi_2, \lambda_2) \right\} = \\ &= M \left\{ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \rho_j \rho_n (n+1)(j+1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^n f_{ji}(\lambda_2) f_{nk}(\lambda_1) P_{ji}(\sin \varphi_2) P_{nk}(\sin \varphi_1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

На данном этапе удобно использовать статистические характеристики погрешностей δc_{nk} и δd_{nk} параметров поля:

$$\begin{aligned} M(\delta c_{nk} \delta c_{ji}) &= M(\delta d_{nk} \delta d_{ji}) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq j \text{ или } k \neq i, \\ \sigma_{nk}^2 & \text{при } n = j \text{ и } k = i, \end{cases} \quad (2.59) \\ M(\delta c_{nk} \delta d_{ji}) &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая (2.59), определим среднее значение произведения функций

$$\begin{aligned} &M \left\{ f_{nk}(\lambda_1) f_{ji}(\lambda_2) \right\} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq j \text{ или } k \neq i, \\ \sigma_{nk}^2 (\cos k \lambda_1 \cos k \lambda_2 + \sin k \lambda_1 \sin k \lambda_2) & \text{при } n = j \text{ и } k = i, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.60)$$

С учетом допущения о независимости значений σ_{nk} от индекса k и связи между нормированными и не нормированными дисперсиями коэффициентов

$$\sigma_{nk}^2 = \frac{2(2n+1)(n-k)!}{\delta_k (n+k)!} \bar{\sigma}_n^2 \quad (2.61)$$

подстановка (2.60) в (2.58) приводит к выражению

$$\begin{aligned} K_r(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \sum_n \rho_n(r_1) \rho_n(r_2) (n+1)^2 (2n+1) \times \\ &\quad \times \sigma_n^2 \sum_{k=0}^n \frac{2(n-k)!}{\delta_k (n+k)!} P_{nk}(\sin \varphi_1) P_{nk}(\sin \varphi_2) \cos k(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

Это выражение можно упростить, воспользовавшись тождеством (2.23). Кроме того, следует учесть разное определение дисперсий (2.52) при $n \leq n^*$ и $n > n^*$. В результате получим

$$K_r(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = K_r(r_1, r_2, \cos\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \rho_n(r_1) \rho_n(r_2) \frac{(n+1)^2 (2n+1)}{2} (\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2) P_{n0}(\cos\psi). \quad (2.62)$$

Для круговых орбит формула (2.62) принимает вид:

$$K_r(r, \cos\psi) = \left(\frac{\mu}{r^2} \right)^2 \times \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{2n} \frac{(n+1)^2 (2n+1)}{2} (\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2) P_{n0}(\cos\psi). \quad (2.63)$$

При анализе выражения (2.63) следует учесть, что $P_{n0}(1) = 1$. Поэтому, как и следовало ожидать, при $\cos\psi = 1$ и $r = r_1 = r_2$ это выражение совпадает с (2.55). Безразмерная корреляционная функция радиальных возмущений легко рассчитывается на основе формул (2.63) и (2.55):

$$k_r(r, \psi) = \frac{K_r(r, \cos\psi)}{\sigma_r^2(r)}. \quad (2.64)$$

При выводе и анализе выражений (2.55) и (2.56) отмечалось, что дисперсии возмущений по долготе и широте мало отличаются друг от друга и примерно в два раза меньше дисперсии по радиусу. Аналогичная ситуация имеет место и для корреляционных функций $K_{\phi}(r, \cos\psi)$ и $K_{\lambda}(r, \cos\psi)$, которые мало отличаются друг от друга и примерно в два раза меньше корреляционной функции по радиусу. Поэтому нормированные корреляционные функции вида (2.64) можно принять одинаковыми для всех составляющих возмущений.

Расчеты корреляционной функции (2.64) были проведены в тех же условиях, которые были рассмотрены в разд. 2.4. А именно: шесть вариантов высоты круговой орбиты (130, 270, 480, 710, 1130, 1600 км) и пять вариантов значений СКО погрешностей коэффициентов \bar{c}_{nk} , \bar{d}_{nk} ($\sigma_n = 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}, 10^{-7}$). Эти оценки использовались для выбора максимального порядка учитываемых гармоник n_{\max} , значения которого представлены на рис. 2.3. При суммировании по индексу n рассчитывалось 1000 слагаемых.

На рис. 2.8 представлены значения полиномов Лежандра $P_{n0}(\cos\psi)$ различной степени при значениях угла $\psi = 0, 2, 5, 10$ и 15° .

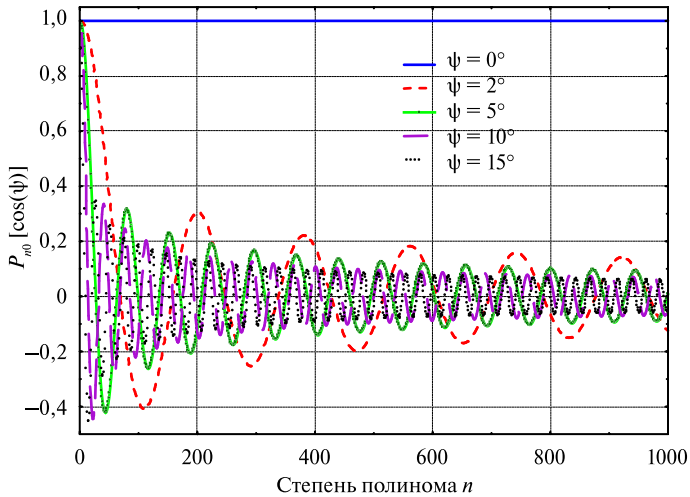


Рис. 2.8. Значения полиномов Лежандра разного порядка

Из данных рис. 2.8 видно, что значения полиномов уменьшаются с ростом порядка n и угла ψ .

На рис. 2.9 представлены корреляционные функции (2.64) для указанных выше условий. Из этих данных видно следующее:

- во всех случаях на рассмотренном интервале корреляция довольно быстро приближается к 0;
- с ростом высоты орбиты спутника интервал корреляции увеличивается от единиц до десятков градусов;
- с ростом оценок σ_n интервал корреляции сначала практически не меняется, а затем растет.

Оценки n^* рассчитывались по формуле (2.18) в зависимости от значения σ_n

В разд. 1.5 отмечалось, что при оценке погрешностей прогноза существенную роль играет площадь подынтегральной функции вида (1.85). В связи с этим для всех рассмотренных вариантов были вычислены интегралы

$$I_\psi = \int_{\psi=0}^{\psi_{\max}} k_r(r, \psi) d\psi. \quad (2.65)$$

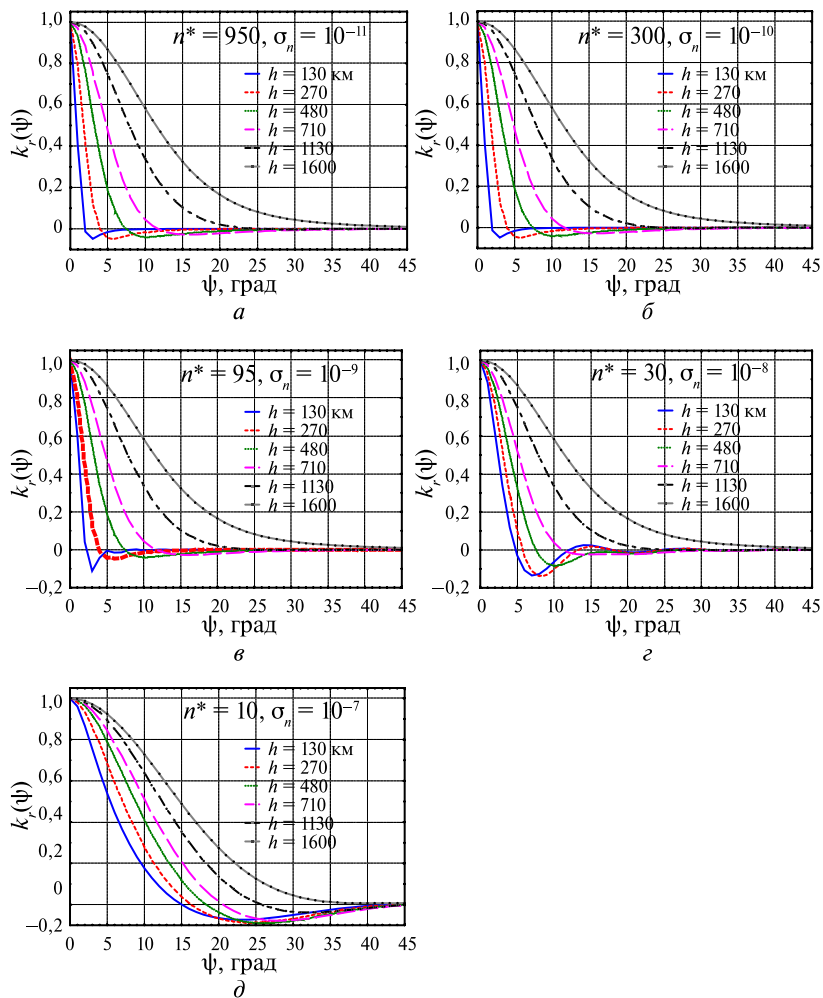


Рис. 2.9. Корреляционные функции $k_r(r, \cos \psi)$ при различных высотах орбиты спутника (h) и разной точности определения коэффициентов гравитационного поля

Для максимального значения угла ψ использовалась оценка $\psi_{\max} = 45^\circ$. Результаты расчетов представлены на рис. 2.10.

По представленным результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

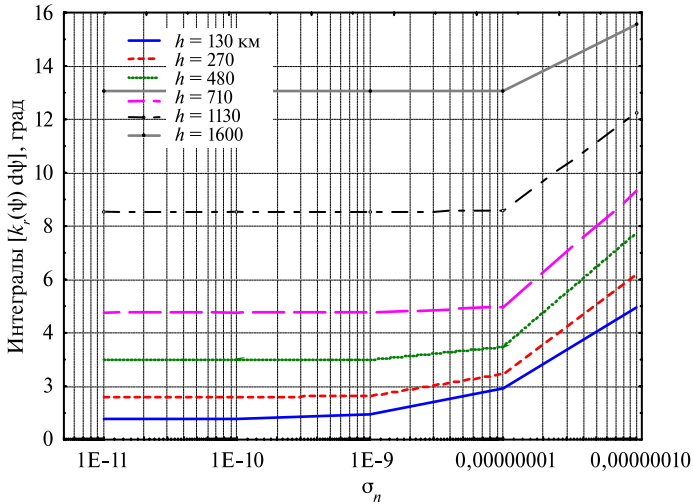


Рис. 2.10. Значения интеграла (2.65) в различных условиях

- значения интеграла (2.65) меняются в пределах от ~ 1 до 16° ;
- наиболее сильное влияние на интеграл оказывает высота орбиты спутника: с ее ростом величина интеграла увеличивается;
- на интервале значений СКО погрешностей коэффициентов (σ_n) от 10^{-11} до 10^{-9} величина интеграла практически не меняется, затем при росте значений σ_n он также растет; это происходит при уменьшении числа учитываемых членов разложения потенциала (n^*) от 95 до 30 и менее;
- при $\sigma_n = 10^{-9}$ ($n^* = 95$) значения интеграла находятся в диапазоне от 1 до 13° .

Комментарии

1. В разд. 2.1 отмечалось, что данные о точности коэффициентов разложения гравитационного потенциала в ряд, публикуемые авторами моделей, не являются достаточно достоверными. Из данных рис. 2.4 следует, что для современных моделей поля значение СКО погрешностей коэффициентов разложения потенциала (σ_n) имеет порядок не лучше $\sim 10^{-9}$. Этому значению соответствует оптимальный порядок учитываемых гармоник $n^* = 95$. На практике в алгоритмах прогноза движения спутников обычно учитывается меньшее число

гармоник. Этим условиям соответствуют данные рисунка 2.10 для значений СКО погрешностей σ_n в интервале от 10^{-9} до 10^{-8} .

2. Изложенные в данном разделе оценки дисперсии возмущений (см. рис. 2.7), корреляционные функции этих возмущений (см. рис. 2.9), а также значения интеграла (2.65) являются основой дальнейшей работы по оценке погрешностей прогнозирования движения спутников, обусловленных влиянием не учтенных в прогнозе гравитационных возмущений.
3. Изложенные в разделе данные о корреляционных функциях гравитационных ускорений, которые не учитываются при прогнозировании движения спутников, построены в связанной с Землей системе координат. Их важной характеристикой является практическое обнуление корреляции при удалении от заданной точки более чем на $10...30^\circ$. Реальные орбиты спутников относительно Земли редко проходят над одними и теми же подспутниковыми точками. Это обстоятельство необходимо учитывать при переходе в инерциальную систему координат, в которой обычно интегрируются уравнения движения спутников.

2.5. Автокорреляционные функции для заданной орбиты

В данном разделе строится автокорреляционная функция $k_r(u_1, u_2)$ не учтенных в прогнозе возмущающих ускорений в зависимости от значений аргументов широты двух точек орбиты спутника. В основу положена зависимость (2.64), в которой вместо аргумента

$$\cos \psi = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (2.66)$$

используется функция $\cos(\psi) = f(u_1, u_2)$. Для решения задачи надо выразить сферические координаты (φ, λ) в связанной с Землей системе координат как функции соответствующих значений аргумента широты. Орбита принимается круговой. В качестве исходных данных используются наклонение (i) и сдвиг восходящего узла за виток $(\Delta\lambda)$ в связанной с Землей системе координат. Долготу будем отсчитывать от положения восходящего узла в начале 1-го витка.

На рис. 2.11 и 2.12 схематично представлена траектория спутника в связанной с Землей системе координат на двух соседних витках. Обозначим долготу точки относительно восходящего узла в инерциальной системе координат как L (см. рис. 2.12). Эта величина связана со значением аргумента широты соотношением

$$\operatorname{tg}(L) = \operatorname{tg}(u) \cos(i). \quad (2.67)$$

За время полета спутника от восходящего узла до заданной точки ее долгота λ уменьшается по отношению к долготе L на соответствующий угол поворота Земли за это время. Поэтому текущее значение долготы λ может быть выражено следующим образом:

$$\lambda(u) = L(u) - \frac{\Delta\lambda u}{2\pi}. \quad (2.68)$$

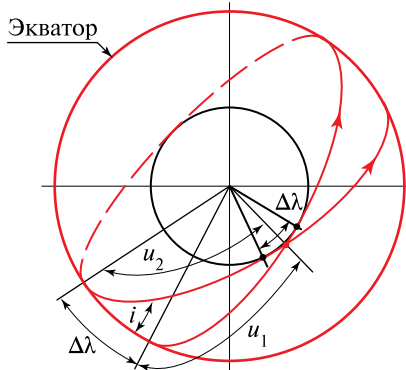


Рис. 2.11. Траектория орбиты на двух соседних витках в связанной с Землей системе координат

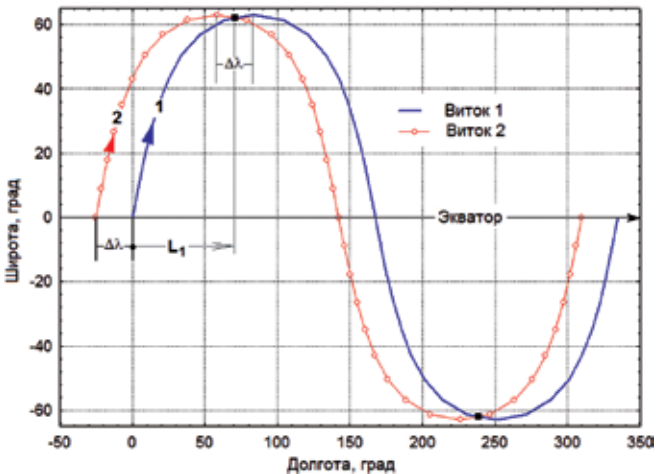


Рис. 2.12. Проекция траектории спутника на поверхность Земли (след орбиты)

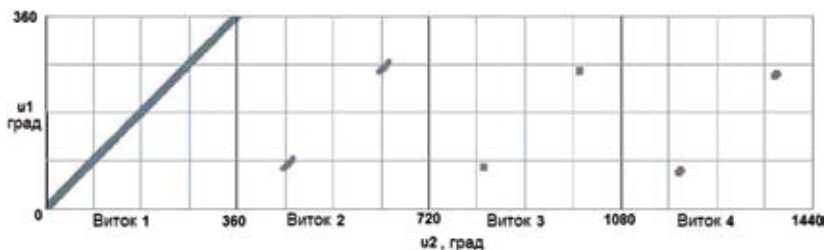


Рис. 2.13. Вид «сверху» на фрагмент корреляционной функции $k_r(u_1, u_2)$

Широта точки легко определяется из известного соотношения сферической тригонометрии

$$\sin(\varphi) = \sin(u) \sin(i). \quad (2.69)$$

Расчеты по формулам (2.67)–(2.69) при различных значениях аргумента широты (u_1, u_2) позволяют определить сферические координаты двух точек и соответствующее им значение $\cos(\psi) = f(u_1, u_2)$. Подстановка этой величины в (2.64) приводит к искомому значению корреляционной функции при заданных значениях аргумента широты (u_1, u_2) .

На рис. 2.13 представлены результаты расчета корреляционной функции $k_r(u_1, u_2)$ при $i = 63^\circ$, $\Delta\lambda = 22,5^\circ$ и значениях аргументов $0 \leq u_1 \leq 360^\circ$ и $0 \leq u_2 \leq 4 \times 360^\circ$.

На рис. 2.13 все точки, где $k_r(u_1, u_2) = 0$, более бледные, остальные — более темные. Как и следовало ожидать, при $u_1 = u_2$ коэффициент корреляции максимален ($k_r(u_1, u_2) = 1$). Характерной особенностью представленного результата является наличие относительно малых областей (вне области $u_1 = u_2$), где корреляция также существенна. Эти области расположены в окрестности точек, где пересекаются следы траекторий $\varphi = f_\varphi(u)$ и $\lambda = f_\lambda(u)$, соответствующие аргументам (u_1, u_2) . При $u_2 - u_1 > 360^\circ$ на каждом витке существуют две такие точки: одна в Северном полушарии, другая — в Южном. Для двух последовательных витков такого рода точки четко показаны на рис. 2.11 и 2.12.

Комментарий

Изложенные выше материалы анализа не относятся к экваториальным спутникам, наклонение которых близко к 0. Для таких орбит, особенно для геостационарных спутников, требуется специальный анализ.

Рассмотрим приближенный алгоритм определения значений аргументов (u_1, u_2) в точках пересечения следов орбиты при сдвиге узла в связанной с Землей системе координат на величину $\Delta\lambda$. Задача решается вычислением корней двух уравнений, которые следуют из (2.68) и (2.69):

$$L(u_1) = L(u_2) - \Delta\lambda, \quad (2.70)$$

$$\sin(u_1) = \sin(u_2). \quad (2.71)$$

Заметим, что приближенным здесь является уравнение (2.70), поскольку оно не учитывает различия времени движения спутника от экватора до точек u_1 и u_2 . Более строгое решение задачи изложено в разд. 3.4. Искомые корни находятся в интервале $0 \dots 360^\circ$. При определении первой пары корней решение уравнений сводится к двум формулам:

$$\operatorname{tg}(u_1) = \frac{\operatorname{ctg}(\Delta\lambda/2)}{\cos(i)}, \quad (2.72)$$

$$u_2 = \pi - u_1. \quad (2.73)$$

При небольшой модификации эти уравнения пригодны для определения другой пары корней уравнений (2.70) и (2.71). Для этого в (2.72) правая часть меняет знак на «минус», а в (2.73) π заменяется на 3π .

Для определения значений корней при сдвиге точки u_2 не на один, а на большее число витков (N), эти уравнения также модифицируются. В этом случае исходное значение $\Delta\lambda$ надо умножить на N .

На рис. 2.14 представлен пример определения значения аргумента широты u_1 в одной из точек пересечения следов орбиты по формуле (2.72) при различных значениях сдвига $\Delta\lambda$. Рассмотрены орбиты с тремя наклонениями: 28° , 63° и 88° .

Важной особенностью этих результатов является разрыв функций и отсутствие решения при значениях сдвига 0 и 360° . Формально это является следствием появления 0 в знаменателе при вычислении $\operatorname{ctg}(\Delta\lambda/2)$. Физический смысл этого заключается в полном совпадении траекторий и, таким образом, в отсутствии точек пересечения их следов. На рисунке эти значения сдвига выделены красными линиями.

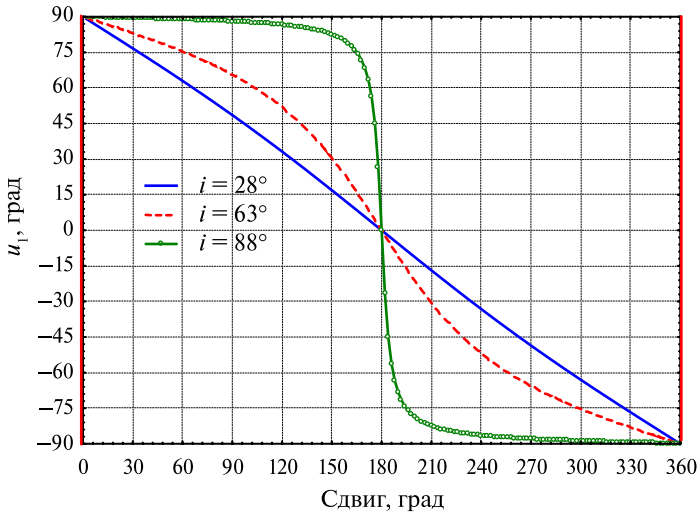


Рис. 2.14. Значения u_1 при различных сдвигах для орбит с различными наклонениями

При малых значениях наклонения $\cos(i) \approx 1$. Поэтому $\operatorname{tg}(u_1) \approx (\Delta\lambda/2)$ и $u_1 \approx (\pi/2) - (\Delta\lambda/2)$. К этому решению приближается график функции $u_1(\Delta\lambda/2)$ при наклонении 28° .

При наклонениях, близких к 90° , и при сдвигах, отличающихся от 180° , точки пересечения следов расположены в окрестности полюсов ($u_1 \approx \pm 90^\circ$). В окрестности точки $\Delta\lambda = 180^\circ$ происходит смена знака значения аргумента широты u_1 в точке пересечения следов. При $i = 90^\circ$ и $\Delta\lambda = 180^\circ$ функция $u_1 \approx (\Delta\lambda/2)$ имеет разрыв. Формально — это следствие появления 0 в знаменателе при вычислениях $\operatorname{tg}(u_1)$ по формуле (2.72). Физический смысл этого заключается в *совпадении* траекторий двух объектов, которые, однако, движутся *навстречу* друг другу.

2.6. Особенности корреляционных функций $k_r(u_1, u_2)$ для резонансных и геостационарных спутников

Под действием гравитационных возмущений резонанс наступает тогда, когда период долгопериодических возмущений, обусловленных влиянием тессеральных гармоник, становится настолько

большим, что эти возмущения приближаются к вековым. При этом резонансе след орбиты периодически проходит над одними и теми же участками поверхности Земли. Движение геостационарного спутника является частным случаем резонанса: спутник постоянно «висит» над одной и той же точкой экваториальной области.

Рассмотрим сначала резонанс низкоорбитальных спутников. Применение результатов предыдущего раздела позволяет достаточно просто формализовать их характерную черту, которая заключается в величине сдвига $\Delta\lambda$ и может быть выражена как

$$\Delta\lambda = \frac{q}{p} 2\pi, \quad (2.74)$$

где q и p — целые числа. Поэтому через p витков сдвиг $\Delta\lambda p = q 2\pi$ становится кратным одному обороту. На этом витке спутник проходит над теми же точками земной поверхности, что и на исходном (0-м) витке. Это повторяется каждые p витков. Простейший пример возникновения резонансной ситуации представлен на рис. 2.15. При сдвиге на 360° ($\Delta\lambda = 360^\circ$) функция $u_1(\Delta\lambda/2)$ имеет разрыв; в этот момент следы текущего и исходного витка совпадают.

На рис. 2.15 в качестве примера представлен вид «сверху» на фрагмент корреляционной функции $k_r(u_1, u_2)$ для спутника, у которого сдвиг (2.74) равен $2\pi/14$: $\Delta\lambda = (1/14)2\pi = \pi/7$. В этом случае следы совпадают через 14 витков, т. е. через 1 сут.

Участки области (u_1, u_2) , где корреляция мала, закрашены белым цветом. Наибольшее влияние корреляции имеет место на исходном и на 14-м витках. На остальных витках области существенной корреляции занимают малую площадь и расположены в окрестности точек, где пересекаются следы траекторий (см. пояснения к рис. 2.13).

Таким образом, при резонансных возмущениях корреляционная функция $k_r(u_1, u_2)$ имеет области существенной корреляции, кото-

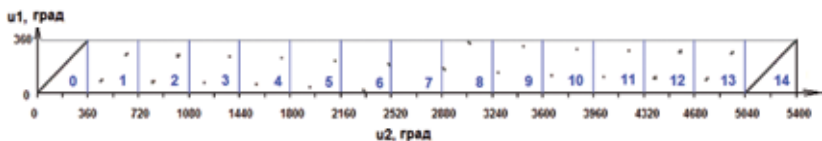


Рис. 2.15. Фрагмент корреляционной функции $k_r(u_1, u_2)$ при $q = 1$ и $p = 14$

рые периодически повторяются (через p витков). Для низкоорбитальных спутников период повторения этих областей составляет не менее 13–14 витков.

Рассмотрим спутник на геостационарной орбите, у которого период в точности равен одним суткам. В связи с близостью плоскости орбиты к плоскости экватора у спутников такого типа положение восходящего узла не определено. Поэтому текущее значение долготы λ может быть выражено следующим образом:

$$\lambda(t) = \omega + M = \lambda(t_0) + \frac{d\lambda}{dt}(t - t_0). \quad (2.75)$$

Здесь ω и M — Кеплеровы элементы орбиты. Скорость изменения долготы $d\lambda/dt = \omega_{\oplus}$ совпадает со скоростью вращения Земли. В результате положение спутника над поверхностью Земли не меняется: он «висит» над одной и той же точкой.

Приведённые выше формулы (2.63) и (2.64) пригодны также для построения автокорреляционных функций возмущающих ускорений спутников на геостационарных орбитах. При этом аргумент вычисляется по формуле

$$\cos(\psi) = \cos[\lambda(t_2) - \lambda(t_1)] = \cos(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (2.76)$$

На рис. 2.16 представлена скалярная корреляционная функция $k_r(\psi)$ для геостационарного спутника (с высотой 35 780 км).

Из данных рис. 2.16 видно, что в области геостационарных орбит корреляционная функция гравитационных возмущений очень сильно отличается от соответствующих функций в области низких орбит (см. рис. 2.9). Основные отличия заключаются в следующем:

- существенная корреляция сохраняется на всем интервале аргумента ψ и имеет периодический характер — период 180° (12 ч);
- имеется область, где корреляция является отрицательной и достигает существенных значений $(-0,5)$; эти минимумы относятся к значениям аргумента 90 и 270° .

Комментарий

Эксперименты на модели показали, что увеличение максимального значения индекса n от 10 до 1000 при вычислении суммы по формуле (2.63) практически не оказывает влияния на характеристики корреля-

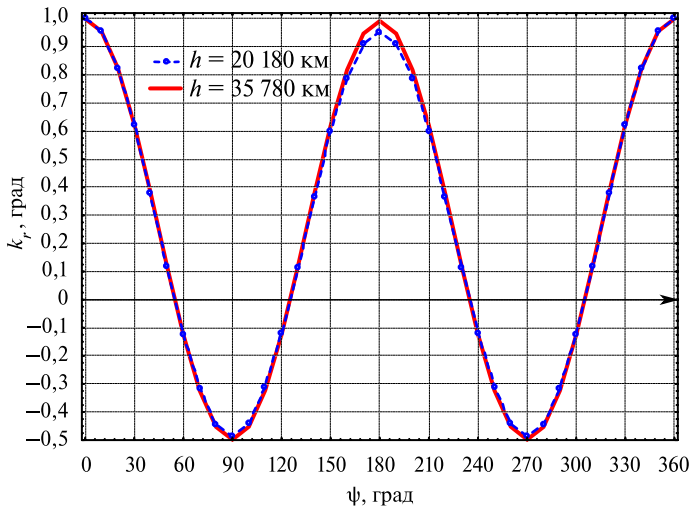


Рис. 2.16. Корреляционные функции $k_r(\psi)$ для геостационарного и полусуточного спутников

ционной функции. Это объясняется быстрым уменьшением величины слагаемых, которые пропорциональны отношению $(R_{\oplus}/r) = 0,15$ в степени $2(n+2)$. Поэтому результат зависит от гармоник невысокого порядка с относительно большими периодами. Следствием этого является также уменьшение СКО гравитационных возмущений, оценки которых приведены в табл. 2.3 при различных СКО погрешностей определения коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} и для спутников на разных высотах.

Таблица 2.3. СКО радиальной составляющей возмущений для различных высот и при разной точности определения коэффициентов (σ_n) (милигал)

Высота (км)	СКО (σ_n) погрешностей определения коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk}				
	1,0E-11	1,0 E-10	1,0E-9	1,0E-8	1,0E-7
35 780	0,342 E-7	0,342 E-6	0,342 E-5	0,342 E-4	0,342 E-3
20 180	0,235 E-6	0,235 E-5	0,235 E-4	0,235 E-3	0,235 E-2
1600	0,135 E-3	0,135 E-2	0,135 E-1	0,135	0,120 E+1

Из этих данных видно, что для геостационарного спутника СКО радиальной составляющей гравитационных возмущений примерно в 3000 раз меньше соответствующих оценок для спутника на высоте 1600 км.

По изложенной выше методике на основе скалярной корреляционной функции $k_r(\psi)$ была построена двумерная корреляционная функция $k_r(\lambda_1, \lambda_2)$, представленная на рис. 2.17.

Здесь рассмотрен двухвитковый интервал. Видно, что на соседних витках функции $k_r(\lambda_1, \lambda_2)$ являются идентичными.

В заключение раздела рассмотрим также корреляционные функции гравитационных возмущений для спутников типа GPS (Global Positioning System), запускаемых на 12-часовые орбиты с высотой 20 180 км и наклонением 55° . Скалярная корреляционная функция $k_r(\psi)$ для них, представленная на рис. 2.16, практически совпала с соответствующей корреляционной функцией для геостационарных спутников. Естественно, что изложенные выше особенности функции $k_r(\psi)$ относятся и к спутникам типа GPS.

Для спутников этого типа по изложенной выше методике была построена корреляционная функция $k_r(u_1, u_2)$. На рис. 2.18 представлен её фрагмент, а на рис. 2.19 — вид на эту функцию «сверху».

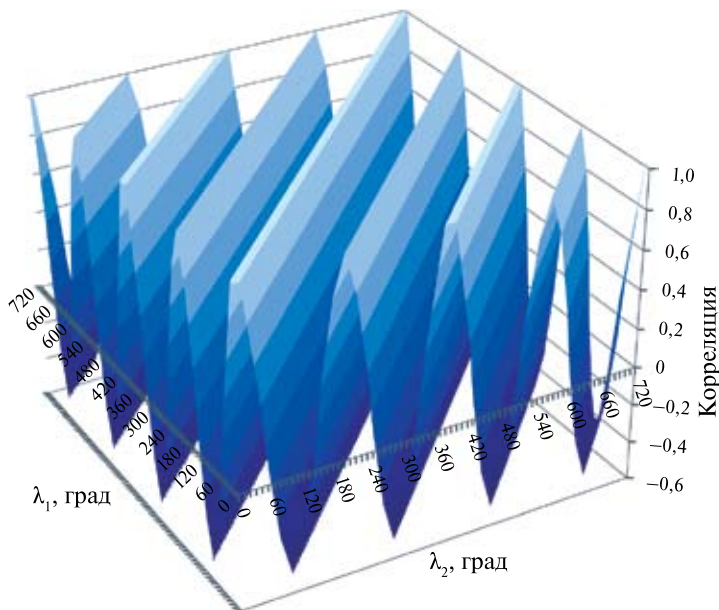


Рис. 2.17. Корреляционная функция $k_r(\lambda_1, \lambda_2)$ для геостационарного спутника

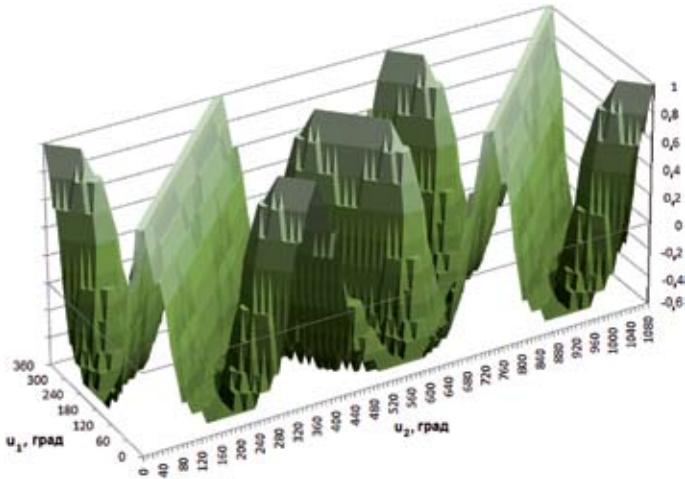


Рис. 2.18. Фрагмент корреляционной функции $k_r(u_1, u_2)$ спутника типа GPS

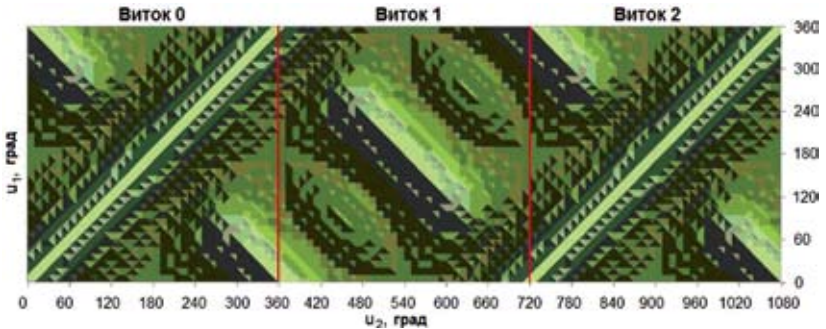


Рис. 2.19. Вид «сверху» на корреляционную функцию $k_r(u_1, u_2)$ спутника типа GPS

В рассмотренном случае сдвиг следа за виток составляет 180° ($\Delta\lambda = (1/2)2\pi = \pi$). Поэтому следы совпадают через 2 витка, т. е. через 1 сут. На промежуточном витке наблюдается существенная корреляция, максимум которой достигает значения 1, а минимум — значения $-0,5$. Соответствующая область значений аргументов (u_1, u_2) весьма обширна. Этими свойствами представленная корреляционная функция сильно отличается от соответствующих функций для низкоорбитальных спутников (см. рис. 2.15).

2.7. Выводы

1. Построены формулы для расчета дисперсии и автокорреляционных функций трехмерного вектора случайных гравитационных возмущений во вращающейся, связанной с Землей системе координат. Результаты расчета зависят от погрешностей определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала, учитываемых при прогнозировании движения спутников, а также от числа учитываемых гармоник. Влияние не учтенных при прогнозировании гармоник оценивается на основе аппроксимации их среднеквадратических значений.
2. Изложенные в разделе оценки дисперсии возмущений и корреляционные функции этих возмущений являются основой дальнейшей работы по оценке погрешностей прогнозирования движения спутников, обусловленных влиянием не учтенных гравитационных возмущений.
3. Важная характеристика автокорреляционных функций — практическое обнуление корреляции при удалении от заданной точки более чем на $10...30^\circ$. Реальные орбиты спутников относительно Земли редко проходят над одними и теми же подспутниковыми точками. Это обстоятельство необходимо учитывать при переходе в инерциальную систему координат, в которой обычно интегрируются уравнения движения спутников.
4. Среднеквадратические отклонения (СКО) (σ_n) погрешностей нормированных коэффициентов разложения гравитационного потенциала Земли по сферическим функциям мало изменяются с увеличением индекса n . Поэтому оценку $(\sigma_n)_{\max}$ рекомендовано использовать для выбора оптимального порядка учитываемых гармоник.
5. Показано, что данные о точности коэффициентов разложения гравитационного потенциала в ряд, публикуемые авторами моделей, не являются достаточно достоверными. У современных моделей поля значение СКО погрешностей коэффициентов разложения потенциала $((\sigma_n)_{\max})$ имеет порядок не лучше $\sim 10^{-9}$. Этому значению соответствует оптимальный порядок учитываемых гармоник $n^* = 95$. На практике в алгоритмах прогноза движения спутников обычно учитывается меньшее число гармоник.

Этим условиям соответствуют значения СКО погрешностей в интервале от 10^{-9} до 10^{-8} .

6. Разработана методика построения автокорреляционных функций, не учтенных при прогнозе возмущающих ускорений в инерциальной системе координат, в зависимости от значений аргументов широты двух точек орбиты. При равенстве этих значений коэффициент корреляции максимален. Характерная особенность этих автокорреляционных функций — наличие относительно малых областей (вне области $u_1 = u_2$), где корреляция также существенна. Эти малые области расположены в окрестности точек, где пересекаются следы траектории на разных витках. Для большинства спутников на каждом витке обычно существуют две такие точки: одна в Северном полушарии, другая — в Южном.
7. У резонансных спутников автокорреляционная функция в инерциальной системе координат имеет области существенной корреляции (как при $u_1 = u_2$), которые периодически повторяются. Для низкоорбитальных спутников период повторения этих областей составляет не менее 13–14 витков.
8. В прил. Б приведен текст компьютерной программы для построений автокорреляционных функций случайных гравитационных возмущений в связанной с Землей системе координат.

3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ

3.1. Введение

Для определения корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния в произвольный момент времени используются формулы (1.9) и (1.11), приведённые в разд. 1.1. Начальными условиями для прогнозирования корреляционной матрицы являются: корреляционная матрица погрешностей начальных условий $P_{0|0} = K_x(t_0)$ и матричная функция взаимной корреляции погрешностей начальных условий и цветного шума $K_{xq}(t_0, \tau)$. Корреляционная функция цветного шума $K_q(\xi, \eta)$, учитывающая влияние гравитационных возмущений и подробно рассмотренная в разд. 2, может быть представлена в следующем виде

$$K_q(\xi, \eta) = M \left[\begin{array}{c} \left\| \begin{array}{c} \delta F_r(\xi) \\ \delta F_\lambda(\xi) \\ \delta F_\varphi(\xi) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \delta F_r(\eta) \\ \delta F_\lambda(\eta) \\ \delta F_\varphi(\eta) \end{array} \right\| \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{array} \right\| \sigma_r^2 k_r(\xi, \eta) \end{array} \right] = \quad (3.1)$$

Здесь δF_r , δF_λ , δF_φ — погрешности расчета возмущающих ускорений, направления которых представлены на рис. 2.1; σ_r^2 — дисперсия радиальной составляющей; $k_r(\xi, \eta)$ — скалярная функция двух аргументов, каждый из которых характеризует положение точки в связанной с Землей системе координат; ψ — геоцентрическое угловое расстояние между двумя точками:

$$\cos \psi = \sin \varphi(\xi) \sin \varphi(\eta) + \cos \varphi(\xi) \cos \varphi(\eta) \cos [\lambda(\xi) - \lambda(\eta)]. \quad (3.2)$$

Результаты расчетов СКО радиальной составляющей (σ_r) для спутников с разной высотой орбиты в функции возможных значений

СКО определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала по сферическим функциям (σ_n) представлены на рис. 2.7. Кроме того, на этом рисунке представлены соответствующие оценки оптимального числа учитываемых гармоник n^* , которые рассчитывались по формуле

$$n^* \approx \frac{0,003}{\sqrt{\sigma_n}}. \quad (3.3)$$

В разд. 2.4 подробно изложены также методика и результаты построения корреляционных функций $k_r(\psi)$ в различных условиях. Результаты расчета этих функций для различных высот и при различных значениях СКО σ_n представлены на рис. 2.9.

Корреляционные функции гравитационных ускорений, которые не учитываются при прогнозировании движения спутников, построены в связанной с Землей системе координат. Их важной характеристикой является практическое обнуление корреляции при удалении от заданной точки более чем на $10...30^\circ$. Реальные орбиты спутников относительно Земли редко проходят над одними и теми же подспутниковыми точками. Это необходимо учитывать при переходе в инерциальную систему координат, в которой обычно интегрируются уравнения движения спутников.

Расчеты по формулам (2.7)–(2.9) при различных значениях аргумента широты (u_1, u_2) позволяют определить сферические координаты двух точек и соответствующее им значение $\cos(\psi) = f(u_1, u_2)$. Подстановка этой величины в (3.1) приводит к искомому значению корреляционной функции при заданных значениях аргумента широты (u_1, u_2).

Для примера на рис. 2.13 были представлены результаты расчета корреляционной функции $k_r(u_1, u_2)$ при $i = 63^\circ$, $\Delta\lambda = 22,5^\circ$ и при значениях аргументов: $0 \leq u_1 \leq 360^\circ$ и $0 \leq u_2 \leq 4 \times 360^\circ$. Характерной особенностью представленного результата является наличие относительно малых областей (вне области $u_1 = u_2$), где корреляция также существенна. Эти малые области расположены в окрестности точек, где пересекаются следы траекторий $\varphi = f_\varphi(u)$ и $\lambda = f_\lambda(u)$, соответствующие аргументам (u_1, u_2). При $u_2 - u_1 > 360^\circ$ на каждом витке существуют две такие точки: одна в Северном полушарии, другая — в Южном. Для двух последовательных витков такого рода точки четко показаны на рис. 2.12.

3.2. Основы алгоритма прогнозирования корреляционной матрицы $K_x(t)$

При разработке алгоритма прогнозирования корреляционной матрицы $K_x(t)$ на основе формулы (1.9) необходимо конкретизировать вектор состояния x . С учетом зависимости корреляционной функции шума $k_r(u_1, u_2)$ от значений аргумента широты именно эту величину удобно использовать в качестве «быстрого» компонента вектора состояния. Следуя методике, изложенной в работах (Анисимов, 1975; Назаренко, Скребушевский, 1981), применим следующий вектор состояния: $x^T = \|u \cdot a \cdot i \cdot \Omega \cdot l \cdot h\|$, где u — аргумент широты; a — большая полуось; i — наклонение; Ω — долгота восходящего узла; $l = e \cos \omega$; $h = e \sin \omega$; e — эксцентриситет; ω — аргумент перигея.

В этом случае переходная матрица $U(u, u_0)$ принимает вид

$$U(u, u_0) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & u_{15} & u_{16} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ (3.4) \end{array}$$

Здесь

$$u_{11} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2; \quad (3.5)$$

$$u_{12} = -3\pi \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot t - t_0}{T}; \quad (3.6)$$

$$u_{15} = \frac{1}{(1-e^2)} \left[(\sin u + h) - (\sin u_0 + h) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \sin u \left(\frac{p}{r}\right) - \sin u_0 \left(\frac{r_0 p}{r^2}\right) \right]; \quad (3.7)$$

$$u_{16} = \frac{1}{(1-e^2)} \left[(\cos u + l) - (\cos u_0 + l) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \cos u \left(\frac{p}{r}\right) - \cos u_0 \left(\frac{r_0 p}{r^2}\right) \right]; \quad (3.8)$$

$$r = \frac{p}{1 + l \cos u + h \sin u}; \quad p = a(1-e^2); \quad T — \text{период.}$$

Нетрудно проверить, что матрица $U(u, u_0)$ обладает свойствами

$$U(u_0, u_0) = E, \quad (3.9)$$

$$U(u, u_0) = U(u, \xi)U(\xi, u_0). \quad (3.10)$$

Один из компонентов (u_{12}) матрицы $U(u, u_0)$ содержит вековую составляющую, пропорциональную времени. Остальные компоненты являются периодическими функциями аргумента широты.

Следующий шаг при разработке алгоритма — конкретизация матричной функции $B(t)$, которая используется в дифференциальных уравнениях для прогнозирования вектора состояния

$$\frac{d\delta x}{dt} = A(t)\delta x + B(t)q(t). \quad (3.11)$$

Здесь $q(t)$ — вектор возмущающих ускорений в системе координат S, T, W .

Для построения матричной функции $B(t)$ применяется Гауссова форма уравнений возмущенного движения, использующая возмущающие ускорения в подвижной, связанной со спутником системе координат STW (рис. 3.1).

С учетом изложенного матричная функция $B(t)$ принимает следующий вид:

$$B(t) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & b_{33} \\ \hline 0 & 0 & b_{43} \\ \hline b_{51} & b_{52} & b_{53} \\ \hline b_{61} & b_{62} & b_{63} \\ \hline \end{array} \quad (3.12)$$

Здесь

$$b_{13} = -\frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi \cdot a} \operatorname{ctgi} \left(\frac{r}{p} \right) \sin u;$$

$$b_{21} = -\frac{T}{\pi\sqrt{1-e^2}} (l \sin u - h \cos u);$$

$$b_{22} = \frac{T}{\pi\sqrt{1-e^2}} (1 + l \cos u + h \sin u);$$

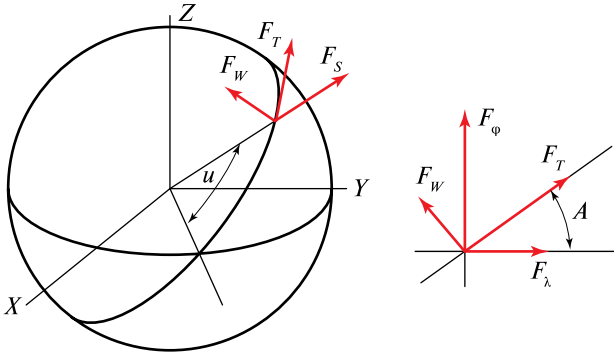


Рис. 3.1. Компоненты возмущающего ускорения

$$b_{33} = \frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} \left(\frac{r}{p} \right) \cos u;$$

$$b_{43} = \frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} \left(\frac{r}{p} \right) \sin u;$$

$$b_{51} = \frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} \sin u;$$

$$b_{52} = \frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi \cdot a} \left[(l + \cos u) \frac{r}{p} + \cos u \right];$$

$$b_{53} = \frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} h \operatorname{ctg} i \left(\frac{r}{p} \right) \sin u;$$

$$b_{61} = -\frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} \cos u;$$

$$b_{62} = \frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} \left[(h + \sin u) \frac{r}{p} + \sin u \right];$$

$$b_{63} = -\frac{T\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} l \operatorname{ctg} i \left(\frac{r}{p} \right) \sin u.$$

Важным свойством матрицы $B(t)$ является то, что все ее компоненты представляют собой периодические функции аргумента широты u .

Рассмотрим связь возмущающих ускорений F_S , F_T и F_W , которые используются в уравнениях (3.11), с возмущающими ускорениями δF_r , δF_λ , δF_φ , используемыми при построении корреляционной функции (1.3). Из данных рис. 3.1 очевидно, что

$$\begin{pmatrix} F_S \\ F_T \\ F_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & \sin A \\ 0 & -\sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta F_r \\ \delta F_\lambda \\ \delta F_\varphi \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Из этого следует, что корреляционная функция ускорений F_S , F_T и F_W связана с корреляционной функцией (3.1) простым соотношением

$$\begin{aligned} K_{STW}(\xi, \eta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & \sin A \\ 0 & -\sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \sigma_r^2 k_r(\xi, \eta) = K_q(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (3.14)$$

т. е. корреляционные функции $K_{STW}(\xi, \eta)$ и $K_q(\xi, \eta)$ тождественно совпадают.

Таким образом, мы конкретизировали все матрицы, которые используются в формуле (1.9) для прогнозирования корреляционной матрицы $K_x(t)$.

Проведение вычислений по формуле (1.9) — весьма трудоемкая операция. В особенности это относится к вычислению двойного интеграла (ниже он обозначен как Q):

$$Q(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \eta) B(\eta)^T U(t, \eta)^T d\xi d\eta, \quad (3.15)$$

Поэтому следующим шагом по разработке алгоритма является преобразование формулы (3.15) к более удобному для вычислений виду. При прогнозировании корреляционной матрицы (1.9) на *целое число витков* удобно использовать периодичность большинства компонентов матричных функций $U(t, \xi)$ и $B(\xi)$ и допущение о постоянстве элементов орбиты на интервале прогнозирования. Такой

прогноз учитывает основную (вековую) составляющую в эволюции погрешностей прогнозирования. Связь между основным аргументом (временем) и «быстрой» компонентой вектора состояния (аргументом широты) схематично представлена на рис. 3.2. Здесь принято, что $t_0 = 0$; N — номер витка.

Значение аргумента широты в произвольный момент времени

$$u_{\xi} = 2\pi(N_{\xi} - 1) + \Delta u \quad (3.16)$$

выражается в виде суммы целого числа предшествующих оборотов ($N_{\xi} - 1$) и некой добавки Δu , относящейся к витку N_{ξ} , значения которой находятся в интервале $(0, 2\pi)$. Это позволяет представить переходную матрицу $U(t, \xi)$ в виде произведения

$$U(t, \xi) = U(t - \xi) = U(\Delta N_{\xi}) U(2\pi - \Delta u). \quad (3.17)$$

Здесь в правой части первый множитель имеет исключительно простой вид

$$U(\Delta N_{\xi}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & u_{12}(\Delta N_{\xi}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (3.18)$$

$$\Delta N_{\xi} = N - N_{\xi}, \quad (3.19)$$

$$u_{12}(\Delta N_{\xi}) = -3\pi \frac{(1+I)^2}{a(1-e^2)^{3/2}} \Delta N_{\xi}. \quad (3.20)$$

Во втором множителе ($U(u = 2\pi - \Delta u)$) компоненты матрицы определяются по формулам (3.11)–(3.14), в которых аргументом является только изменение аргумента широты u в пределах одного витка.

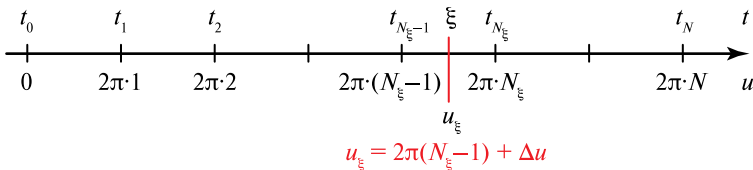


Рис. 3.2. Связь времени и аргумента широты

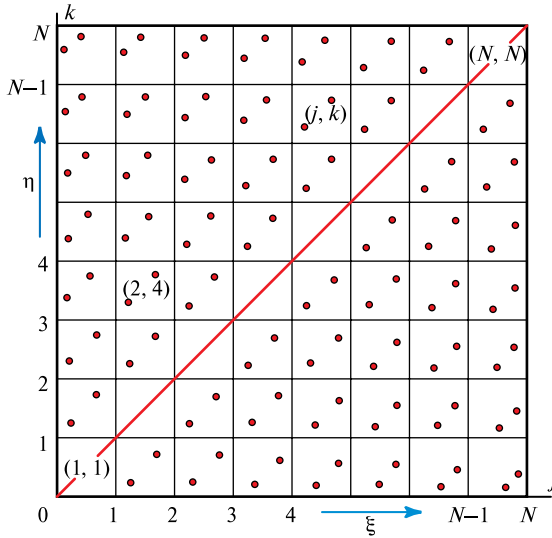


Рис. 3.3. Разбиение области интегрирования

При прогнозе на N витков область аргументов (ξ и η) в двойном интеграле (3.15) разобьем на квадраты, соответствующие разным номерам витков. Это разбиение (аналогичное данным рис. 2.13) представлено на рис. 3.3. Положение каждого из этих квадратов будем характеризовать двумя индексами (j, k) , значения которых изменяются от 1 до N .

Представим двойной интеграл (3.15) в виде суммы двойных интегралов для каждого из показанных на рис. 3.3 квадратов. Используем при этом свойство переходной матрицы (3.17). Получим

$$Q(N) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N U(N-j) \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(u_j) B(u_j) K_q(u_j, u_k) B^T(u_k) U^T(u_k) \frac{du_j du_k}{\dot{u}_j \dot{u}_k} \right] U^T(N-k). \quad (3.21)$$

Здесь в подынтегральном выражении выполнена замена переменных

$$d\xi = \frac{du_j}{\dot{u}_j} \quad \text{и} \quad d\eta = \frac{du_k}{\dot{u}_k}. \quad (3.22)$$

В (3.21) двойной интеграл в квадратных скобках зависит только от разности индексов j и k . Обозначим его как I_{j-k} :

$$I_{j-k} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U(u_j) B(u_j) K_q(u_j, u_k) B^T(u_k) U^T(u_k) \frac{du_j du_k}{\dot{u}_j \dot{u}_k}. \quad (3.23)$$

С учетом этого обозначения формула (3.21) принимает вид

$$Q(N) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N U(N-j) I_{j-k} U^T(N-k). \quad (3.24)$$

Удобство применения выражения (3.24) по сравнению с исходной формулой (3.15) заключается в том, что вместо рассмотрения области интегрирования, состоящей из $N(N+1)/2$ квадратов, двойные интегралы (3.23) вычисляются в N квадратах. Тем самым обеспечивается снижение объема вычислений примерно в $N/2$ раз. Ниже будут рассмотрены возможности дальнейшего снижения трудоемкости алгоритма на основе упрощения вычисления интегралов (3.23).

3.3. Вычисление двойного интеграла I_0

Интеграл I_0 вычисляется по квадратной области, где переменные u_j и u_k относятся к одному и тому же витку. На рис. 3.3 эта область интегрирования обозначена как (1,1). Интеграл (3.23) представляется в виде суммы

$$I_0 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j-j\psi}^{j+j\psi} U(u_j) B(u_j) K_q(u_j - u_k) B^T(u_k) U^T(u_k) \frac{\Delta u \Delta u}{\dot{u}_j \dot{u}_k}. \quad (3.25)$$

Здесь во второй сумме учитываются только те слагаемые, где корреляционная функция $K_q(u_j - u_k)$ не равна 0. Это достигается путем выбора соответствующего значения параметра $j\psi$. Как видно из данных рис. 2.9, при шаге по аргументу широты $\Delta u = 1^\circ$ эта величина в большинстве случаев не превышает значения 40.

Ниже представлен пример вычисления интеграла I_0 для круговой обиты с высотой 778 км и наклоном $86,4^\circ$ (как у КА «Иридиум-33»). Значение СКО определения коэффициентов разложения

гравитационного потенциала по сферическим функциям принято равным $\sigma_n = 10^{-9}$. Параметры алгоритма, используемые при вычислении интеграла, в этом случае имеют значения: $\sigma_r = 0,0559$ милагал, $j\psi = 40$. В табл. 3.1 представлены полученные значения интеграла I_0 ; размерности компонентов вектора состояния: u — рад; a — км; i — рад; Ω — рад; $l = e \cos\omega$ и $h = e \sin\omega$ — безразмерные.

Таблица 3.1. Значения компонентов матрицы I_0 , умноженные на 10^{12} .
Расчеты по формуле (3.25)

	u	a	i	Ω	l	h
u	0,409	-419,0	0,00000	-0,00010	-0,00158	-0,00005
a	-419,0	619022	0,00000	0,00000	-0,00000	-0,00000
i	0,00000	0,00000	0,00151	0,00000	0,00000	0,00000
Ω	-0,00010	0,00000	0,00000	0,00152	0,00000	0,00000
l	-0,00158	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00907	-0,00000
h	-0,00005	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00907

Диагональные члены матрицы представляют соответствующие дисперсии. Ниже приведены значения СКО (σ):

$$\begin{aligned}\sigma_u &= 0,000000639 \text{ рад (4,6 м);} \\ \sigma_a &= 0,000786 \text{ км (0,786 м);} \\ \sigma_i &= \sigma_\Omega = 0,000000039 \text{ рад;} \\ \sigma_l &= \sigma_h = 0,000000095.\end{aligned}$$

Расчеты показывают, что при использовании значения $\sigma_n = 10^{-8}$ компоненты матрицы I_0 увеличиваются в 100 раз, а соответствующие СКО — в 10 раз.

Рассмотрим возможность упрощения алгоритма вычисления интеграла I_0 . Эта упрощение основано на том, что (см. рис. 2.9) у функции $K_q(u_j - u_k)$ интервалы корреляции, где значения функции являются существенными, относительно невелики. Поэтому возможно применение допущения, что при вычислении матричных функций $U(u_k)$ и $B(u_k)$ вместо аргумента u_k можно использовать значение u_j . С учетом этого допущения формула (3.25) упрощается:

$$I_0 \approx \sum_{j=1}^n U(u_j) B(u_j) \left[\sum_{k=-j\psi}^{j\psi} K_q(\Delta uk) \right] B^T(u_j) U^T(u_j) \frac{\Delta u \Delta u}{\dot{u}_j \dot{u}_j}. \quad (3.26)$$

В соответствии с приведенными выше формулами (2.65) и (3.1) значение суммы в квадратных скобках равно

$$\sum_{k=-j\psi}^{j\psi} K_q(\Delta uk) = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{array} \right\| \sigma_r^2 2I_\psi. \quad (3.27)$$

Значения величины I_ψ приведены на рис. 2.10.

Расчеты по упрощенной методике были выполнены при тех же условиях, что рассмотрены выше. Использовалось значение интеграла $I_\psi = 5,34^\circ$. Результаты расчета матрицы I_0 по упрощенной методике представлены в табл. 3.2. Сравнение результатов расчетов по обоим методикам показало их близость, различия не превышают 0,7 %.

Таблица 3.2. Значения компонентов матрицы I_0 , умноженные на 10^{12} .
Расчеты по формуле (3.26)

0,396	-409,0	0,00000	-0,00010	-0,00016	-0,00000
-409,0	619312	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00151	-0,00000	0,00000	0,00000
-0,00010	0,00000	-0,00000	0,00152	0,00000	0,00000
-0,00016	0,00000	0,00000	0,00000	0,00908	0,00000
-0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00908

Таким образом, для вычисления интеграла I_0 наряду с применением точной формулы (3.25) можно без потери точности применять упрощенную формулу (3.27). Это обеспечивает существенную экономию затрат машинного времени. Ниже упрощенный подход применен также к вычислению интегралов I_{j-k} при $j \neq k$.

3.4. Вычисление координат в точках пересечения следов орбиты на разных витках

Алгоритм вычисления приближенных значений аргумента широты в точках пересечения следов орбиты на разных витках был изложен в разд. 2.5. Определялись значения аргументов широты (u_1, u_2) в точках пересечения следов орбиты на соседних витках. Задача свелась к определению корней двух уравнений

$$L(u_1) = L(u_2) - \Delta\lambda_0, \quad (3.28)$$

$$\sin(u_1) = \sin(u_2). \quad (3.29)$$

Искомые значения корней находятся в интервале $(0...360^\circ)$. Определение первой пары корней сводится к вычислениям по формулам (2.72) и (2.73). При этом используется величина $\Delta\lambda$ — сдвиг долготы восходящего узла в связанной с Землей системе координат за 1 виток. Как упоминалось выше, это решение является *приближенным*, поскольку не учитывает разное влияние вращения Земли за время движения спутника от восходящего узла до точек со значениями аргумента широты u_1 и u_2 . На соседних витках эти значения близки, поэтому результаты расчета являются приемлемыми по точности. Рассмотрим алгоритм расчета корней в общем случае — с учетом влияния вращения Земли на интервале движения спутника от восходящего узла при произвольных значениях сдвига $\Delta\lambda$. Основные используемые переменные представлены на рис. 3.4.

Период спутника (в сутках) обозначим как P , долготу спутника в связанной с Землей системе координат — как λ . Примем, что в начальный момент времени ($t_0 = 0$) значение долготы КА в начале первого витка ($j = 1$) также равно 0 ($\lambda_j(t_0) = 0$). Связь переменных L и u определяется формулами сферической тригонометрии и имеет вид (2.67). Значение долготы КА на первом витке ($j = 1$) в точке u_1 равно

$$\lambda(u_1) = L(u_1) - \omega_E t(u_1). \quad (3.30)$$

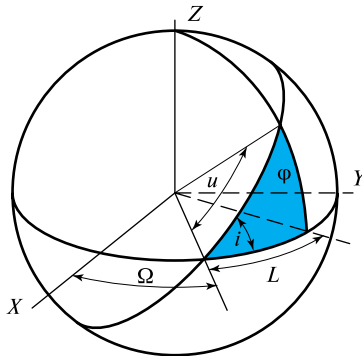


Рис. 3.4. Рассматриваемые переменные L , u , i , ϕ и Ω в инерциальной системе координат

Здесь ω_E (рад/сут) — угловая скорость вращения Земли в инерциальной системе координат; $t(u_1)$ — время движения КА от восходящего узла до заданной точки.

Значение долготы КА на k -м витке в точке u_2 равно

$$\lambda(u_2) = L(u_2) - \omega_E t(u_2) - \Delta\lambda_{k-j}. \quad (3.31)$$

Здесь

$$\Delta\lambda_{k-j} = \omega_E P(k-j) = \Delta\lambda_1(k-j) \quad (3.32)$$

— сдвиг долготы восходящего узла (ДВУ) на k -м витке по отношению к положению ДВУ в начале j -го витка. Очевидно, что при одинаковых значениях $t(u_1)$ и $t(u_2)$ условие равенства значений (3.30) и (3.31) имеет вид (3.28).

Равенство (3.29) выполняется при следующих соотношениях между значениями u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned} \text{а) } u_2 &= \pi - u_1, & u_1 < \pi, \\ \text{б) } u_2 &= 3\pi - u_1, & u_1 > \pi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Первое из них соответствует положению точки пересечения в Северном полушарии, а второе — в Южном. В обоих случаях значения $\text{tg}(u_1)$ и $\text{tg}(u_2)$ связаны равенством $\text{tg}(u_2) = -\text{tg}(u_1)$. Из этого вытекает следующее соотношение между значениями переменной L в точках пересечения следов:

$$\begin{aligned} \text{а) } L(u_2) &= \pi - L(u_1), & u_1 < \pi, \\ \text{б) } L(u_2) &= 3\pi - L(u_1), & u_1 > \pi. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Рассмотрим сначала случай (а). Приравнивание значений долготы (3.30) и (3.31) приводит к уравнению

$$L(u_{1a}) = 0,5 \left[\pi + \omega_E t(u_{1a}) - \omega_E t(\pi - u_{1a}) - \Delta\lambda_{k-j} \right]. \quad (3.35)$$

Это нелинейное алгебраическое уравнение относительно искомого корня u_{1a} .

В процессе дальнейшего анализа будем использовать допущение, что орбита является круговой. Для этого случая уравнение (3.35) принимает вид

$$L(u_{1a}) = 0,5 \left(\pi - \frac{\Delta\lambda_1}{2} - \Delta\lambda_{k-j} \right) + \Delta\lambda_1 \frac{u_{1a}}{2\pi}. \quad (3.36)$$

Для случая $u_{1a} \leq \pi$ значение переменной $L(u_{1a})$ находится в интервале $(0, \pi)$.

Минимальное значение правой части (3.35) достигается при $u_{1a} = 0$:

$$L(u_{1a})_{\min} = 0,5 \left(\pi - \frac{\Delta\lambda_1}{2} - \Delta\lambda_{k-j} \right) \geq 0. \quad (3.37)$$

Отсюда следует ограничение на значение сдвига $\Delta\lambda_{k-j}$, при котором корень u_{1a} существует

$$\Delta\lambda_{k-j} \leq \pi - \frac{\Delta\lambda_1}{2} = \Delta\lambda^*. \quad (3.38)$$

В соответствии с выражением (3.37) при сдвиге, равном $\Delta\lambda^*$, корни уравнения принимают значения $u_{1a} = 0$, $u_{2a} = \pi$. В этом случае долгота $L(u_{1a})$ оказывается равной 0. При дальнейшем увеличении сдвига долгота $\lambda(u_2)$ становится отрицательной. Поэтому при сравнении значений $\lambda(u_1)$ и $\lambda(u_2)$ долготу (3.31) надо увеличить на 2π . Приравнивание значений долготы (3.30) и модифицированного значения (3.31) приводит к уравнению

$$L(u_{1a}) = 0,5 \left(3\pi - \frac{\Delta\lambda_1}{2} - \Delta\lambda_{k-j} \right) + \Delta\lambda_1 \frac{u_{1a}}{2\pi}. \quad (3.39)$$

Для случая $u_1 \leq \pi$ значение переменной $L(u_{1a})$ находится в интервале $(0, \pi)$. Максимальная величина правой части достигается при $u_{1a} = \pi$:

$$L(u_{1a})_{\max} = 0,5 \left(3\pi + \frac{\Delta\lambda_1}{2} - \Delta\lambda_{k-j} \right) \leq \pi. \quad (3.40)$$

Отсюда следует ограничение на значение сдвига $\Delta\lambda_{k-j}$, при котором корень u_{1a} существует

$$\Delta\lambda_{k-j} \geq \pi + \frac{\Delta\lambda_1}{2} = \Delta\lambda^{**}. \quad (3.41)$$

Полученные ограничения на значение сдвига означают, что имеется относительно небольшой диапазон этих значений

$$\pi - \frac{\Delta\lambda_1}{2} \leq \Delta\lambda_{k-j} \leq \pi + \frac{\Delta\lambda_1}{2}, \quad (3.42)$$

при которых точки пересечения следов отсутствуют. В общем случае это имеет место один раз в сутки и повторяется через каждые $\Delta N = \text{целая_часть}(1/P)$ витков. Если сдвиг $\Delta\lambda_{k-j} > 2\pi$, то необходимо найти его новое значение — $(\Delta\lambda_{k-j})_{\text{new}} > \Delta\lambda_{k-j} - 2\pi$ и расчеты повторить.

Рассмотрение случая «б» аналогично. Условие существования второй точки пересечения следов орбиты на разных витках оказывается

таким же, как условия (3.38) и (3.41). Таким образом, число точек пересечения следов орбиты на разных витках равно или 2 или 0.

Ниже изложены примеры расчетов, которые иллюстрируют методику определения точек пересечения. Параметры орбиты — те же, что были применены в предыдущем разделе. На рис. 3.5 представлены следы орбиты на исходном витке и при сдвиге на 1 виток (на величину $\Delta\lambda_1 = 25,1^\circ$); на рис. 3.6–3.8 — аналогичные данные при сдвиге на 5, 7 и 8 витков. Для всех сдвигов, кроме одного, четко видны точки пересечения следов. При сдвиге на 7 витков пересечений нет.

На рис. 3.9 представлены значения правой и левой части уравнения (3.39) при различных сдвигах витков (0, $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_7$, $\Delta\lambda_8$, $\Delta\lambda^*$ и $\Delta\lambda^{**}$). Цветом выделена область, где корни отсутствуют. Красными точ-

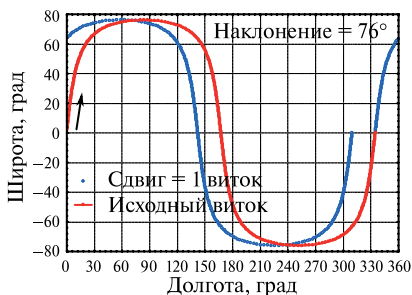


Рис. 3.5. Следы орбиты при $k - j = 1$

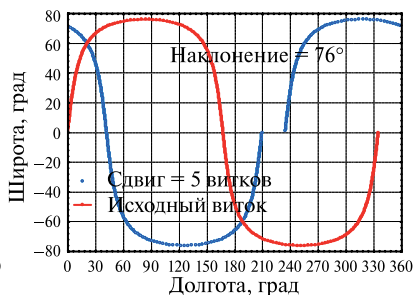


Рис. 3.6. Следы орбиты при $k - j = 5$

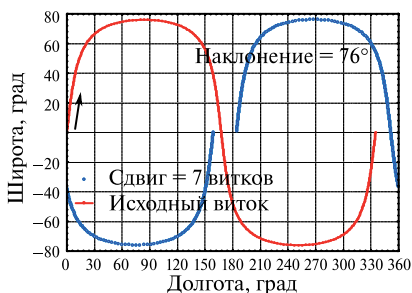


Рис. 3.7. Следы орбиты при $k - j = 7$

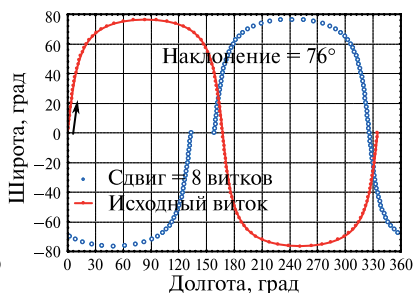


Рис. 3.8. Следы орбиты при $k - j = 8$

ками отмечены значения аргументов, при которых соответствующие следы пересекаются. Видно, что при изменении сдвига от 0 до величины $\Delta\lambda^*$ значения широты (и аргумента широты) в точке пересечения меняются от 90° до 0° . При значениях сдвига в интервале (3.42)

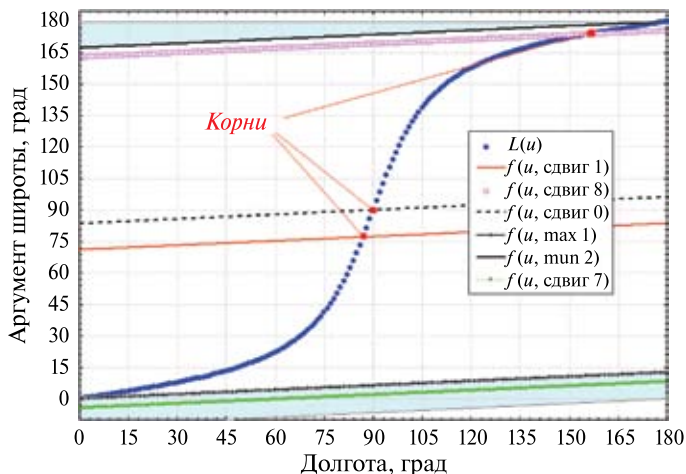


Рис. 3.9. Определение корней при $u_1 \leq \pi$

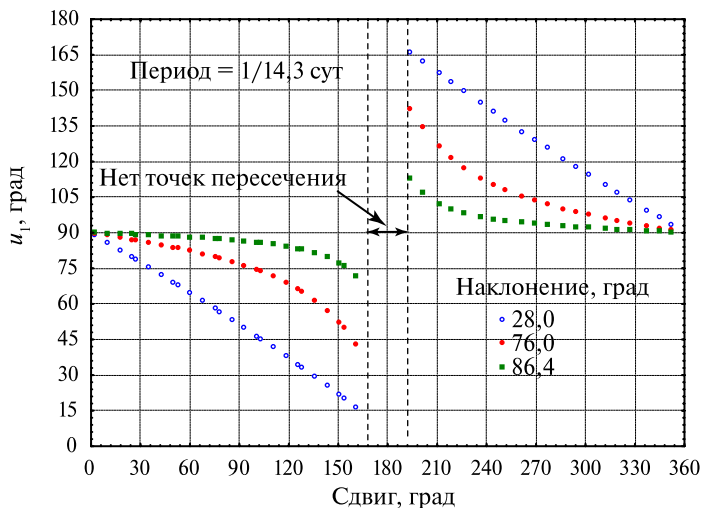


Рис. 3.10. Значения аргумента широты u_{1a} при различном сдвиге

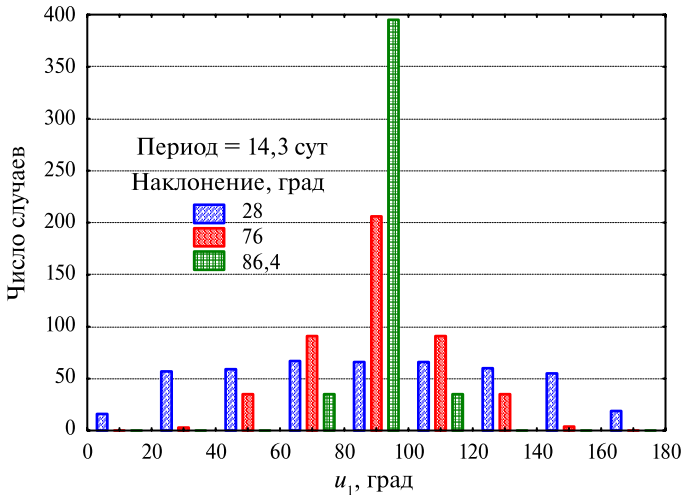


Рис. 3.11. Гистограммы значений аргумента широты в точках пересечения следов в Северном полушарии.

точки пересечения отсутствуют. При дальнейшем увеличении сдвига от $\Delta\lambda^{**}$ до 2π значения аргумента широты u_{1a} в точке пересечения меняются от 0 до 90° .

В заключение раздела представим результаты расчета аргумента широты u_{1a} в одной из точек пересечения при различных наклонениях (рис. 3.10).

Построены также гистограммы значений u_{1a} при прогнозе движения спутника на 500 витков. Для рассматриваемых наклонений эти гистограммы представлены на рис. 3.11.

Из данных рис. 3.11 видно, что все величины сконцентрированы в окрестности среднего значения 90° . Диапазон возможных значений аргумента широты в точках пересечения следов тем больше, чем меньше наклонение орбиты.

3.5. Вычисление двойных интегралов I_{k-j}

При $j \neq k$ интеграл (3.23) вычисляется в квадратной области, где переменные u_j и u_k относятся к разным виткам. На рис. 3.3 эта область

интегрирования обозначена как (j, k) . Ее особенность заключается в том, что корреляционная функция $K_q(u_j, u_k)$ существенно отличается от 0 только в окрестности точек пересечения следов орбиты на разных витках. Эти точки характеризуются значениями аргументов широты u_{1a} , u_{2a} , u_{1b} и u_{2b} . Поэтому интеграл (3.23) представляется в виде суммы двух интегралов, каждый из которых относится к окрестности одной из точек пересечения:

$$\begin{aligned}
 I_{k-j} &= \\
 &= \int_{u_{1a}-\Delta u_j}^{u_{1a}+\Delta u_j} \int_{u_{2a}-\Delta u_k}^{u_{2a}+\Delta u_k} U(u_j)B(u_j)K_q(u_j, u_k)B^T(u_k)U^T(u_k)\frac{du_j du_k}{\dot{u}_j \dot{u}_k} + \\
 &+ \int_{u_{1b}-\Delta u_j}^{u_{1b}+\Delta u_j} \int_{u_{2b}-\Delta u_k}^{u_{2b}+\Delta u_k} U(u_j)B(u_j)K_q(u_j, u_k)B^T(u_k)U^T(u_k)\frac{du_j du_k}{\dot{u}_j \dot{u}_k}. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Величина отклонений аргумента широты (δu_j и δu_k) от его значений в точках пересечения выбирается с учетом интервала корреляции функции $k_r(\psi)$ (см. рис. 2.9). В процессе вычислений интегралы (3.43) представляются в виде суммы

$$\begin{aligned}
 I_{k-j} &= \\
 &= \sum_{j=-\psi}^{\psi} \sum_{k=-\psi}^{\psi} U(u_{ja})B(u_{ja})K_q(\psi_{j,k})B^T(u_{ka})U^T(u_{ka})\frac{\Delta u \Delta u}{\dot{u}_{ja} \dot{u}_{ka}} + \\
 &+ \sum_{j=-\psi}^{\psi} \sum_{k=-\psi}^{\psi} U(u_{jb})B(u_{jb})K_q(\psi_{j,k})B^T(u_{kb})U^T(u_{kb})\frac{\Delta u \Delta u}{\dot{u}_{jb} \dot{u}_{kb}}. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$u_{ja} = u_{1a} + \Delta u_j; \quad u_{ka} = u_{2a} + \Delta u_k;$$

$$u_{jb} = u_{1b} + \Delta u_j; \quad u_{kb} = u_{2b} + \Delta u_k.$$

Косинус угла $\psi_{j,k}$ между направлениями на точки орбиты, характеризующие значениями аргумента широты u_j и u_k , определяется по общей формуле (3.2) на основе соответствующих значений широты и долготы в этих точках.

В разд. 3.3 было показано, что возможно упрощение вычисления интегралов вида (3.43) на основе использования особенностей корреляционной функции $K_q(\psi_k)$, которая имеет относительно небольшие интервалы корреляции. Поэтому возможно применение допущения, что при вычислении матричных функций $U(u)$ и $B(u)$ в

качестве аргументов можно использовать значения аргумента широты в точках пересечения следа орбиты. С учетом этого допущения формула (3.43) упрощается

$$\begin{aligned}
 I_{k-j} = & U(u_{1a})B(u_{1a}) \left(\int_{u_{1a}-\delta u_j}^{u_{1a}+\delta u_j} \int_{u_{2a}-\delta u_k}^{u_{2a}+\delta u_k} K_q(u_j, u_k) \frac{du_j du_k}{\dot{u}_j \dot{u}_k} \right) \times \\
 & \times B^T(u_{2a})U^T(u_{2a}) + U(u_{1b})B(u_{1b}) \times \\
 & \times \left(\int_{u_{1a}-\delta u_j}^{u_{1a}+\delta u_j} \int_{u_{2a}-\delta u_k}^{u_{2a}+\delta u_k} K_q(u_j, u_k) \frac{du_j du_k}{\dot{u}_j \dot{u}_k} \right) B^T(u_{2b})U^T(u_{2b}). \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (3.1) значение двойных интегралов в круглых скобках равно

$$\int_{u_j} \int_{u_k} K_q(u_j, u_k) du_j du_k = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{array} \right\| \sigma_r^2 \left\{ \int_{u_j} \int_{u_k} k_r[\psi(u_j, u_k)] du_j du_k \right\}. \quad (3.46)$$

Вид функции $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при различных сдвигах (значениях $k - j$) представлен на рис. 3.12–3.15. Аргументами являются отклонения аргумента широты от точек пересечения следа (в град).

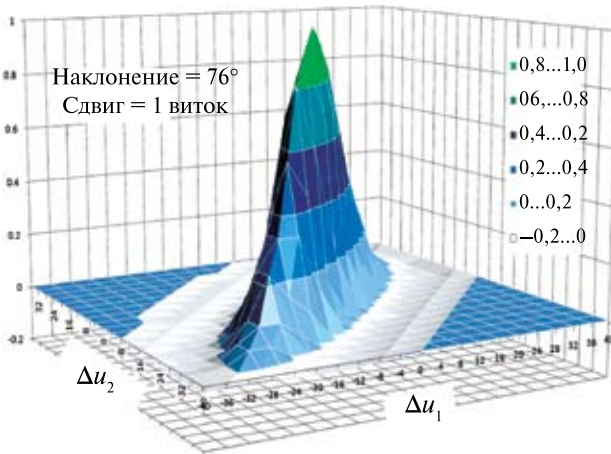


Рис. 3.12. Функция $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при сдвиге на 1 виток ($k - j = 1$)

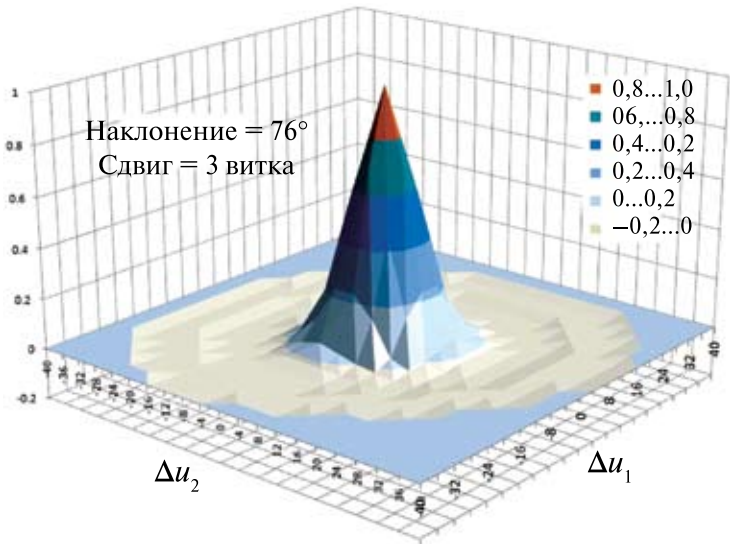


Рис. 3.13. Функция $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при сдвиге на 3 витка ($k-j=3$)

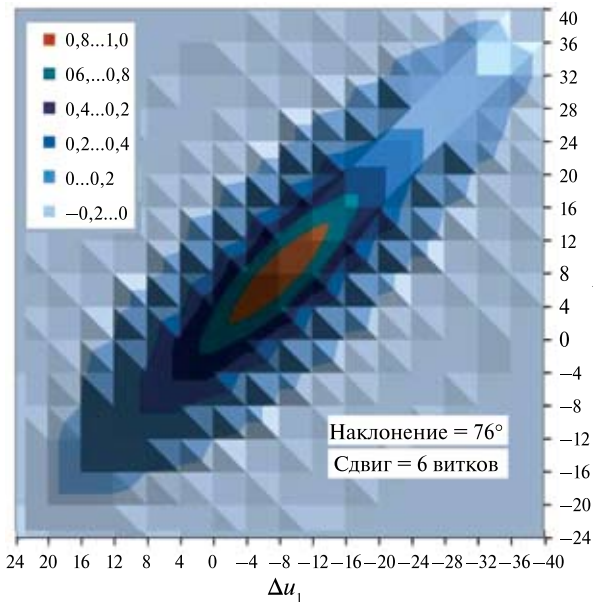


Рис. 3.14. Функция $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при сдвиге на 6 витков ($k-j=6$)

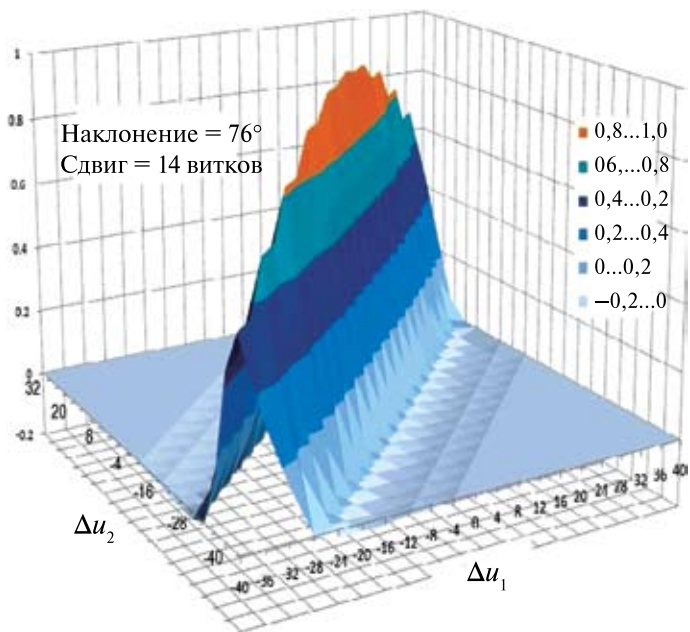


Рис. 3.15. Функция $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при сдвиге на 14 витков ($k - j = 14$)

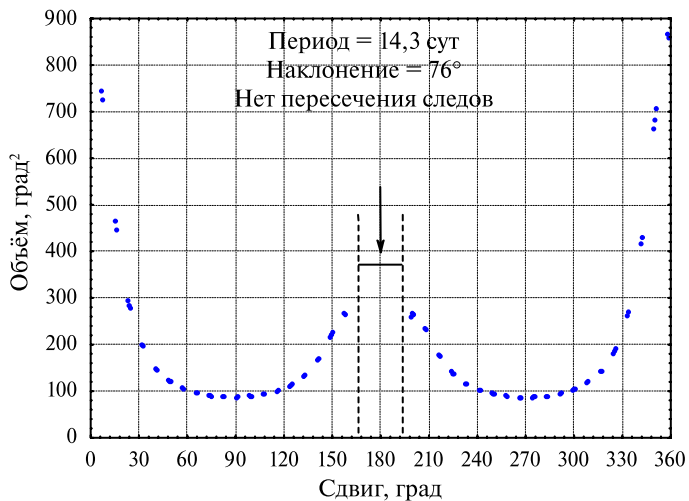


Рис. 3.16. Значения объема V_{k-j} при различных величинах сдвига

Из данных рисунков видно, что форма функции зависит от величины сдвига. Физический смысл двойного интеграла в правой части формулы (3.46) — это объем подынтегральной функции. Обозначим этот объем как

$$V_{k-j} = \int_{u_j} \int_{u_k} k_r [\psi(u_j, u_k)] du_j du_k. \quad (3.47)$$

На рис. 3.16 представлены значения объема V_{k-j} при различных значениях сдвига.

Изменение значений объема V_{k-j} объясняется изменением угла пересечения двух следов. Чем этот угол меньше, тем больше объем V_{k-j} .

Подстановка (3.46) в (3.45) с учетом обозначения (3.47) позволяет получить очень простую формулу для вычисления интеграла I_{k-j} при $k \neq j$:

$$I_{k-j} = U(u_{1a})B(u_{1a}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix} B^T(u_{2a})U^T(u_{2a}) \frac{\sigma_r^2}{\dot{u}^2} V_{k-j} + \\ + U(u_{1b})B(u_{1b}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix} B^T(u_{2b})U^T(u_{2b}) \frac{\sigma_r^2}{\dot{u}^2} V_{k-j}. \quad (3.48)$$

В табл. 3.3–3.15, форма которых совпадает с формой табл.3.1, представлены результаты вычисления интегралов I_{k-j} по формуле (3.44) при разных сдвигах: 1, 2, ..., 14 витков. Значения параметров — те же, что применялись выше: высота орбиты 778 км, наклонение 76° . Точность определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала принята равной $\sigma_n = 10^{-9}$.

Таблица 3.3. Значения компонентов матрицы I_1 , умноженные на 10^{12}

0,049	-67,7	0,00001	-0,00012	-0,00070	0,00067
-70,1	104659	0,00000	0,00000	0,58674	0,02553
-0,00001	0,00000	0,00003	0,00003	0,00000	0,00000
-0,00012	0,00000	-0,00003	0,00050	0,00000	0,00000
-0,00007	0,58674	0,00000	0,00000	0,00108	0,00016
0,00070	-0,02553	0,00000	0,00000	-0,00016	0,00196

Таблица 3.4. Значения компонентов матрицы I_2 , умноженные на 10^{12}

0,026	-31,3	0,00001	-0,00007	0,00008	0,00041
-40,8	54712	0,00000	0,00000	-0,00000	-0,00000
-0,00001	0,00000	-0,00000	0,00003	0,00000	0,00000
-0,00007	0,00000	-0,00003	0,00028	0,00000	0,00000
-0,00008	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00051	0,00018
0,00041	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00018	0,00104

Таблица 3.5. Значения компонентов матрицы I_3 , умноженные на 10^{12}

0,019	-22,3	0,00001	-0,00005	0,00009	0,00036
-34,6	43223	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000
-0,00001	0,00000	-0,00001	0,00004	0,00000	0,00000
-0,00005	0,00000	-0,00004	0,00021	0,00000	0,00000
-0,00009	0,00000	0,00000	0,00000	0,00038	0,00023
0,00036	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,00023	0,00079

Таблица 3.6. Значения компонентов матрицы I_4 , умноженные на 10^{12}

0,018	-18,8	0,00001	-0,00005	0,00012	0,00043
-37,1	42470	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-0,00001	0,00000	-0,00002	0,00006	0,00000	0,00000
-0,00005	0,00000	-0,00006	0,00020	0,00000	0,00000
-0,00012	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00031	0,00034
0,00043	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,00034	0,00072

Таблица 3.7. Значения компонентов матрицы I_5 , умноженные на 10^{12}

0,018	-17,6	0,00003	-0,00005	0,00013	0,00074
-51,3	52295	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000
-0,00003	0,00000	-0,00005	0,00011	0,00000	0,00000
-0,00005	0,00000	-0,00011	0,00021	0,00000	0,00000
-0,00013	0,00000	0,00000	0,00000	0,00019	0,00061
0,00074	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,00061	0,00069

Таблица 3.8. Значения компонентов матрицы I_6 , умноженные на 10^{12}

0,020	-18,0	0,00005	-0,00004	-0,00071	0,00212
-94,3	85268	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000
-0,00005	0,00000	-0,00025	0,00020	0,00000	0,00000
-0,00004	0,00000	-0,00020	0,00017	0,00000	0,00000
0,00071	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,00068	0,00116
0,00212	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,00116	0,00015

Таблица 3.9. Значения компонентов матрицы I_8 , умноженные на 10^{12}

0,030	-114,4	-0,00004	-0,00002	0,00237	0,00282
-24,0	105105	0,00000	0,00000	-0,00002	0,00697
0,00004	0,00000	-0,00043	-0,00017	0,00000	0,00000
-0,00002	0,00000	0,00017	0,00009	0,00000	0,00000
-0,00237	-0,00002	0,00000	0,00000	-0,00153	-0,00101
0,00283	-0,00697	0,00000	0,00000	0,00101	-0,00051

Таблица 3.10. Значения компонентов матрицы I_9 , умноженные на 10^{12}

0,018	-61,1	-0,00003	-0,00005	-0,00008	0,00100
-17,2	59425	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00003	0,00000	-0,00009	-0,00013	0,00000	0,00000
-0,00005	0,00000	0,00013	0,00022	0,00000	0,00000
0,00008	0,00000	0,00000	0,00000	0,00006	-0,00078
0,00100	0,00000	0,00000	0,00000	0,00078	0,00064

Таблица 3.11. Значения компонентов матрицы I_{10} , умноженные на 10^{12}

0,018	-40,6	-0,00002	-0,00005	-0,00013	0,00049
-18,4	44803	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000
0,00002	0,00000	-0,00003	-0,00007	0,00000	0,00000
-0,00005	0,00000	0,00007	0,00020	0,00000	0,00000
0,00013	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00029	-0,00041
0,00049	0,00000	0,00000	0,00000	0,00041	0,00072

Таблица 3.12. Значения компонентов матрицы I_{11} , умноженные на 10^{12}

0,019	-34,8	-0,00001	-0,00005	-0,00010	0,00037
-20,9	42307	0,00000	0,00000	-0,00000	-0,00000
0,00001	0,00000	-0,00001	-0,00005	0,00000	0,00000
-0,00005	0,00000	0,00005	0,00021	0,00000	0,00000
0,00010	0,00000	0,00000	0,00000	0,00035	-0,00026
0,00037	0,00000	0,00000	0,00000	0,00026	0,00076

Таблица 3.13. Значения компонентов матрицы I_{12} , умноженные на 10^{12}

0,023	-37,4	-0,00001	-0,00006	-0,00008	0,00038
-27,2	49106	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000
0,00001	0,00000	-0,00000	-0,00003	0,00000	0,00000
-0,00006	0,00000	0,00003	0,00025	0,00000	0,00000
0,00008	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00045	-0,00020
0,00038	0,00000	0,00000	0,00000	0,00020	0,00093

Таблица 3.14. Значения компонентов матрицы I_{13} , умноженные на 10^{12}

0,037	-54,9	-0,00001	-0,00009	-0,00007	0,00055
-47,7	77843	0,00000	0,00000	0,13474	-0,00604
0,00001	0,00000	0,00001	-0,00003	0,00000	0,00000
-0,00009	0,00000	0,00003	0,00039	0,00000	0,00000
-0,00011	0,13474	0,00000	0,00000	0,00077	-0,00017
0,00054	0,00604	0,00000	0,00000	0,00017	0,00148

Таблица 3.15. Значения компонентов матрицы I_{14} , умноженные на 10^{12}

0,193	-222,3	-0,00001	-0,00029	-0,00005	0,00122
-217,1	333612	0,00000	0,00000	-0,10294	0,00309
0,00001	0,00000	0,00048	-0,00003	0,00000	0,00000
-0,00029	0,00000	0,00003	0,00121	0,00000	0,00000
0,00018	-0,10294	0,00000	0,00000	0,00421	-0,00016
0,00123	-0,00309	0,00000	0,00000	0,00016	0,00552

Размерности компонентов вектора состояния — см. пояснения к табл. 3.1.

Обратим внимание на характерные особенности этих матриц:

1. Поскольку по своему смыслу матрицы выражают взаимную корреляцию погрешностей вектора состояния на разных витках, то возможны отрицательные значения компонентов матриц (в том числе и диагональных). Количество отрицательных компонентов увеличивается по мере удаления от исходного витка: при сдвигах на 5, 6, 8 и 9 витков.
2. Значения компонентов матриц I_{k-j} в 10...20 раз меньше соответствующих значений компонентов матрицы I_0 . Это является естественным следствием уменьшения объема подынтегральной функции (3.47).
3. При сдвиге на 7 витков пересечение следов отсутствует. Поэтому и матрицы I_7 не существует. Напомним, что рассматриваемый спутник делает 14,3 оборота за сутки. Сдвигу на 1 виток соответствует $25,2^\circ$.
4. В большинстве случаев диагональные компоненты матриц являются преобладающими. Многие недиагональные компоненты равны 0. Значения соответствующих диагональных компонентов уменьшаются по мере удаления от исходного витка. Они достигают минимума при сдвигах на 5, 6, 8 и 9 витков, а затем снова увеличиваются. Этот эффект иллюстрируют данные рис. 3.17. Форма графиков на этом рисунке похожа на данные рис. 3.16, на котором представлены величины объема V_{k-j} при различных значениях сдвига. Это подтверждает изложенное выше положение о зависимости матриц от объема подынтегральной функции (3.48).

В заключение раздела приведем в более полном виде (по сравнению с рис. 3.12) график функции $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при сдвиге на 1 виток ($k - j = 1$). Рассмотрим полную область возможных значений аргумента широты: от 0 до 360° . Этот график представлен на рис. 3.18, где четко видны две области пересечения следов орбиты: в Северном и Южном полушариях. Кроме того, видна особенность рассматриваемой функции, которая проявляется только при сдвиге на 1 виток: имеется относительно небольшая третья область, где значения функции $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ являются существенными, — это стык двух соседних витков (исходного и следующего). Естественно, что в этой области имеется корреляция гравитационных возмущений в соседних точках.

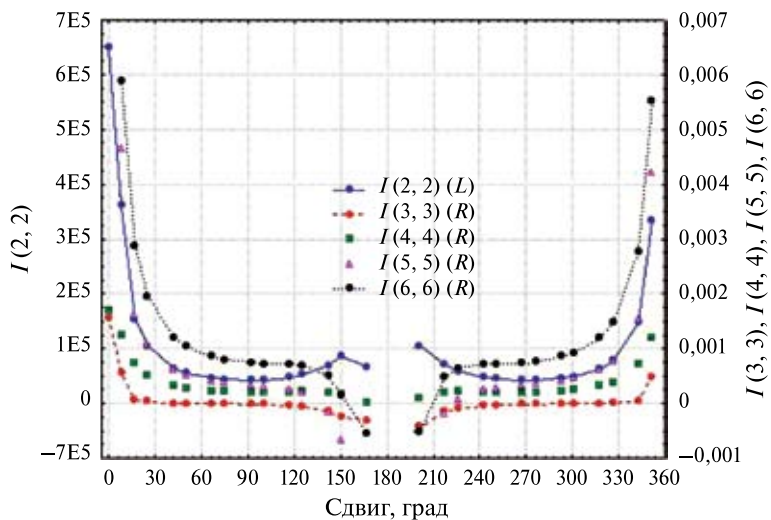


Рис. 3.17. Зависимость диагональных компонентов матриц I_{k-j} (умноженных на 10^{12}) от величины сдвига (в градусах)

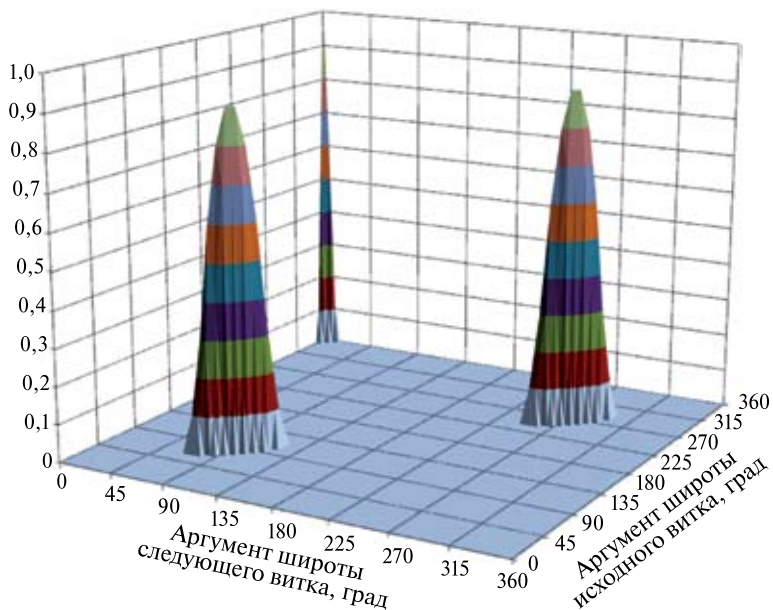


Рис. 3.18. Функция $k_r[\psi(u_j, u_k)]$ при сдвиге на 1 виток

3.6. Вычисление матричной функции взаимной корреляции $K_{xq}(t, \tau)$ при прогнозировании движения

В соответствии с формулой (1.11) взаимная корреляция погрешностей вектора состояния и шума возникает при прогнозе движения и может быть определена на основе второго слагаемого упомянутой формулы

$$K_{xq}(t, \tau) = \int_{t_0=0}^t U(t, \xi) B(\xi) K_q(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.49)$$

Для преобразования формулы (3.49) к более удобному для вычислений виду применим тот же прием, что использовался при выводе формул (3.25) и (3.44). На основе свойства (3.17) переходной матрицы и замены аргументов формула (3.49) может быть записана следующим образом:

$$K_{xq}(N, u_\tau) = \sum_{j=1}^N U(N-j) \int_0^{2\pi} U(u_j) B(u_j) K_q(u_j, u_\tau) \frac{du_j}{\dot{u}_j}. \quad (3.50)$$

Здесь $N = t/T$ — интервал прогноза в витках; $u_j \in (0, 2\pi)$ — значение аргумента широты в произвольной точке на j -м витке; $u_\tau \in (0, 2\pi)$ — заданное значение аргумента широты в произвольной точке на одном из произвольных витков. Корреляционная функция гравитационных возмущений $K_q(u_j, u_\tau)$ детально рассмотрена выше (см. формулы (3.1) и (3.46)).

Обозначим интеграл в правой части выражения (3.50) как

$$J(u_\tau) = \int_0^{2\pi} U(u_j) B(u_j) K_q(u_j, u_\tau) \frac{du_j}{\dot{u}_j}. \quad (3.51)$$

При использовании формулы (3.50) возможны два случая: а) значение u_τ относится к одному из будущих витков (вне интервала прогноза) и б) значение u_τ относится к одному из витков на интервале прогноза $(0, t)$.

Рассмотрим *первый* случай, когда значение u_τ относится к j_τ -му витку вне интервала прогноза. При этом аргументы широты u_j и u_τ всегда относятся к разным виткам. Как отмечалось выше, в этих условиях значения корреляционной функции $k_r[\psi(u_j, u_\tau)]$ являются существенными только в точках пересечения следов орбиты на j -м и j_τ -м витках. Поэтому значение интеграла (3.51) оказывается

зависимым от номера j -го витка. Обозначим его как $J(j, u_\tau)$. Применим для значений аргументов широты в точках пересечения следов те же обозначения, которые использовались в разд. 3.5: u_{1a} и u_{1b} для j -го витка и u_{2a} и u_{2b} для j_τ -го витка. Если значение u_τ находится в окрестности одной из точек пересечения следов, то корреляция существует и интеграл (3.51) отличен от 0, в противном случае он равен 0. Эта закономерность схематично представлена на рис. 3.19.

С учетом изложенного запишем выражение для интеграла (3.51) более детально:

$$\begin{aligned}
 & J(j, u_\tau) = \\
 & = \sigma_r^2 \begin{cases} \int_0^{2\pi} U(u_j) B(u_j) \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{matrix} \right\| k_r [\psi(u_j, u_\tau)] \frac{du_j}{\dot{u}_j}, & u_\tau \in (u_{2a,b} \pm \delta), \\ 0, & u_\tau \notin (u_{2a,b} \pm \delta). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Формула (3.50) приобретает вид

$$K_{xq}(N, u_\tau) = \sum_{j=1}^N U(N-j) J(j, u_\tau). \tag{3.53}$$

Здесь интеграл (3.52) вычисляется при сдвиге на $(j_\tau - j)$ витков. Возможно упрощение формулы (3.52), аналогичное примененному выше при выводе приближенной формулы (3.45):

$$\begin{aligned}
 J(j, u_\tau) \approx \sigma_r^2 & \left[\frac{U(u_{1a}) B(u_{1a})}{\dot{u}_{1a}} \right] \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{matrix} \right\| F(u_{1a}, u_\tau)_j + \\
 & + \sigma_r^2 \left[\frac{U(u_{1b}) B(u_{1b})}{\dot{u}_{1b}} \right] \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{matrix} \right\| F(u_{1b}, u_\tau)_j,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$



Рис. 3.19. Зависимость интеграла (3.51) от интервала прогноза

где применено обозначение

$$F(u_{1a}, u_\tau)_j = \int_{u_{1a}-\Delta}^{u_{1a}+\Delta} k_r[\psi(u_j, u_\tau)] du_j. \quad (3.55)$$

Выражение для функции $F(u_{1b}, u_\tau)_j$ аналогично. Подстановка (3.54) в (3.53) приводит к достаточно простому выражению для расчета матричной функции взаимной корреляции $K_{xq}(t, \tau)$ погрешностей вектора состояния на момент прогноза и будущих значений шума.

Иллюстрацией к расчету функции (3.55) является рис. 3.20. Жирной красной линией показано сечение функции $k_r[\psi(u_j, u_\tau)]$ при заданном u_τ , для которого вычисляется площадь подынтегральной функции.

На рис. 3.21 представлен конкретный пример расчета интегралов $F(u_{1a}, u_\tau)_j$ и $F(u_{1b}, u_\tau)_j$. Исходные данные — те же, что применялись выше. Сдвиг $(j_\tau - j) = 6$ витков. Левая кривая относится к интегралу $F(u_{1a}, u_\tau)$, а правая — к интегралу $F(u_{1b}, u_\tau)$.

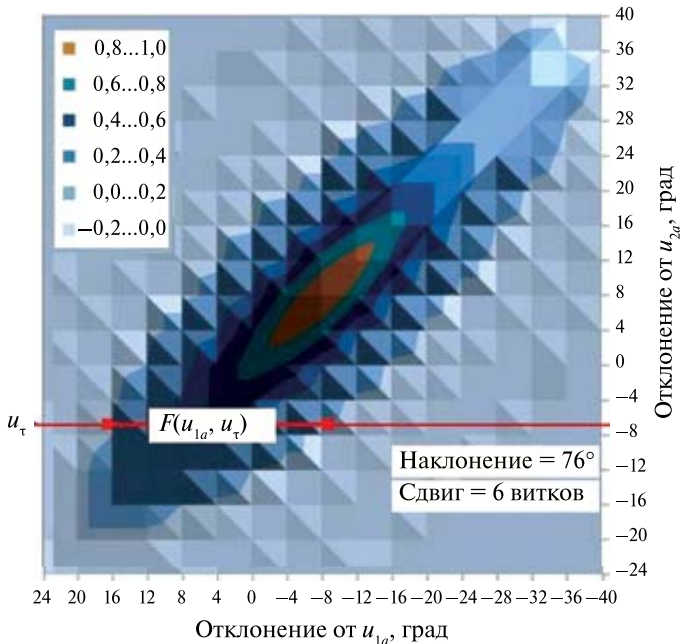


Рис. 3.20. Сечение функции $k_r[\psi(u_j, u_\tau)]$ при заданном u_τ

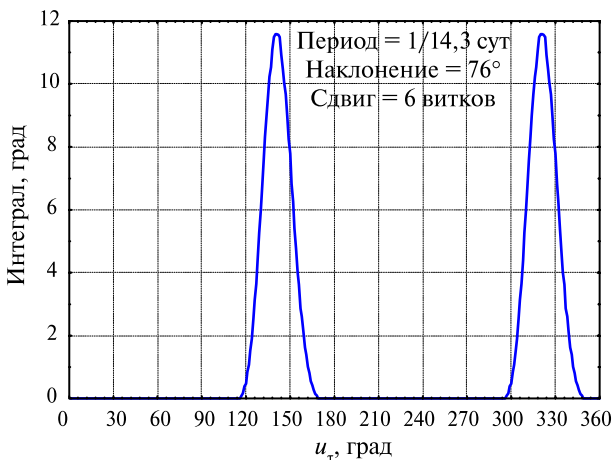


Рис. 3.21. Пример расчета интегралов

При вычислениях функции взаимной корреляции (3.53) интегралы $F(u_{1a}, u_\tau)_j$ и $F(u_{1b}, u_\tau)_j$ рассчитываются при разных сдвигах, соответствующих номерам витков $j = 1, \dots, N$. Поэтому интегралы отличаются моментами времени, в которых они достигают максимума. Вычисление функции взаимной корреляции в соответствии с выражением (3.53) приводит к суммарной оценке вклада разных витков на интервале прогноза. Иллюстрацией оценки этого суммарного вклада является сумма интегралов $F(u_{1a}, u_\tau)_j$ и $F(u_{1b}, u_\tau)_j$ при разных значениях $j = 1, \dots, N$:

$$Sum(u_\tau) = \sum_{j=1}^N \left[F(u_{1a}, u_\tau)_j + F(u_{1b}, u_\tau)_j \right]. \quad (3.56)$$

На рис. 3.22 представлены функции (3.56) при $N = 14$ витков и при двух значениях номеров витков, для которых вычисляется корреляция: $j_\tau = N + 1$ и $j_\tau = N + 14$. Из данных рисунка видно, что в результате суммирования максимумы корреляции достигаются при значениях аргумента широты $u_\tau = 90^\circ$ и $u_\tau = 270^\circ$. Естественно, что величина максимума тем больше, чем больше интервал прогноза. Эти максимумы практически не зависят от номера витка, к которому относятся значения u_τ . Этот результат согласуется с данными рис. 3.11, на котором представлена гистограмма значений аргумента широты в точках пересечения следов орбиты на разных витках.

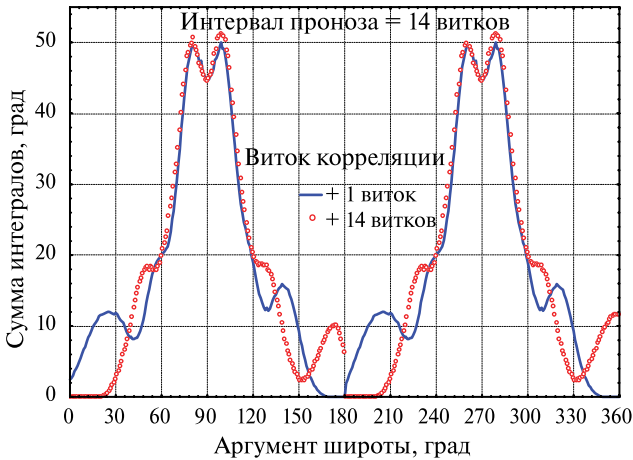


Рис. 3.22. Результаты вычисления суммы (3.56)

На рис. 3.23 и 3.24 представлены компоненты функции (3.53) при $N = 14$ витков и при двух значениях номеров витков, для которых вычисляется корреляция: $j_\tau = N + 1$ и $j_\tau = N + 14$. Значение СКО определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала по сферическим функциям принято равным $\sigma_n = 10^{-9}$. В качестве компонентов выбраны отдельные составляющие матрицы $K_{xq}(N, u_\tau)$ с номерами (1,1), (2,2), (3,3), (4,3), (5,1) и (6,2). В соответствии с принятой формой представления элементов орбиты и возмущающих сил эти компоненты на рисунках обозначены как (aT), (uS), (iW), (Ω W), (IS) и (hT). Размерности компонентов соответствуют принятым в табл. 3.1, умноженным на $[\text{км}/\text{с}^2]$.

Как и следовало ожидать, экстремумы функций расположены в окрестности значения аргументов широты $u_\tau = 90^\circ$ и $u_\tau = 270^\circ$. Основное отличие этих данных от формы кривых на рис. 3.22 в том, что компоненты (iW), (Ω W), (IS) и (hT) функции $K_{xq}(N, u_\tau)$ меняют знак в Северном и Южном полушариях. Кроме того, компонент (iW) существенно отличается по величине от других компонентов.

В табл. 3.16 в качестве примера представлены все компоненты функции взаимной корреляции при фиксированном значении аргумента широты $u_\tau = 80^\circ$ на витке $j_\tau = N + 1$. В этой точке компоненты функции $K_{xq}(N, u_\tau)$ достигают экстремальных значений.

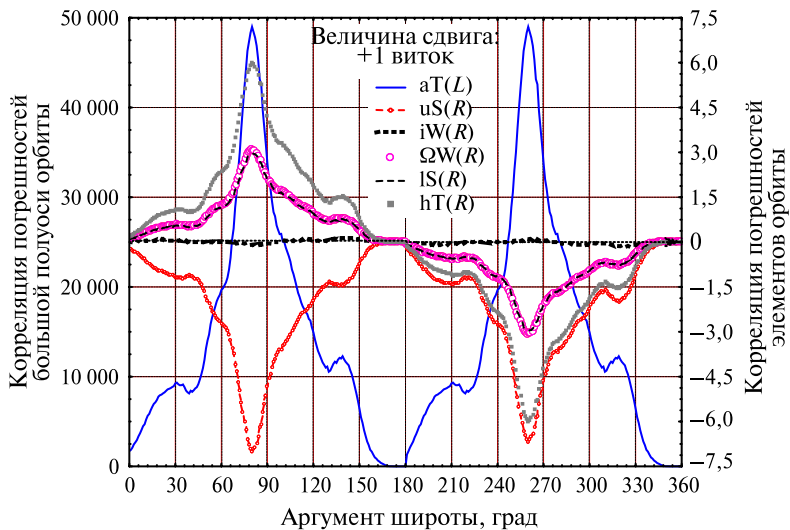


Рис. 3.23. Компоненты функции $K_{xq}(N, u_\tau)$ при $j_\tau = N + 1$, умноженные на 10^{16}

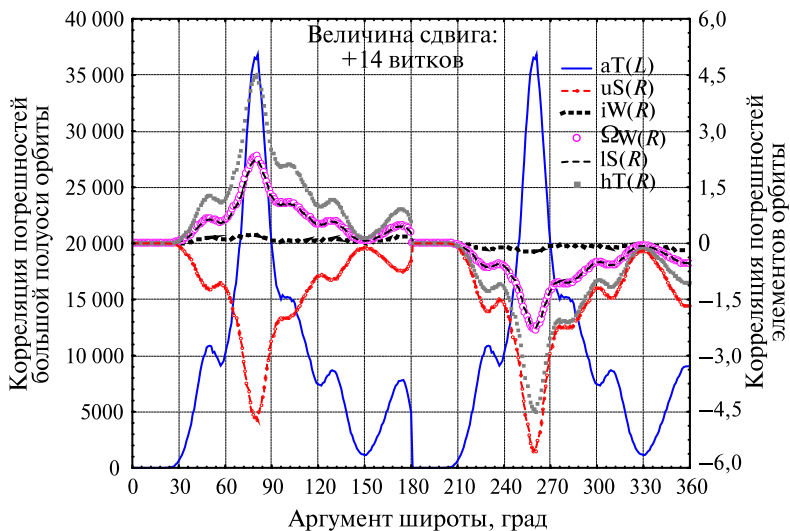


Рис. 3.24. Компоненты функции $K_{xq}(N, u_\tau)$ при $j_\tau = N + 14$, умноженные на 10^{16}

Таблица 3.16. Матрица $K_{xq}(N, u_\tau)$ при $u_\tau = 80^\circ$ на витке $j_\tau = N + 1$

	S	T	W
<i>u</i>	-7,0048	-427,1759	-0,7496
<i>a</i>	0,0000	48997,8062	0,0000
<i>i</i>	0,0000	0,0000	-0,0788
Ω	0,0000	0,0000	3,0984
<i>l</i>	3,0064	-0,1577	0,0000
<i>h</i>	0,0788	6,0128	0,0000

Все значения умножены на 10^{16} . Полужирным шрифтом выделены компоненты, которые выводились на графики, представленные на рис. 3.23 и 3.24.

При рассмотрении *второй* ситуации принимается, что значение u_τ относится к j_τ -му витку на интервале прогноза. Особенность интеграла (3.51) для данной ситуации заключается в том, что при любом u_τ всегда имеется точка орбиты с аргументом широты $u_j = u_\tau$, в которой угол $\psi = 0$ и коэффициент корреляции $k_r[\psi(u_j, u_\tau)]$ достигает максимального значения (1). Поэтому при любом u_τ интеграл (3.51) не равен нулю. В этом заключается основное отличие рассматриваемой ситуации от предыдущей. В окрестности точки $u_j = u_\tau$ расчет функции взаимной корреляции $K_{xq}(t, \tau)$ упрощается, так как $k_r[\psi(u_j, u_\tau)] = k_r(u_j - u_\tau)$. Алгоритм сводится к вычислению интеграла (3.51) по квадратурным формулам и применению аналитической зависимости (3.53).

Важно отметить, что и при значениях u_τ внутри интервала прогноза существует корреляция $k_r[\psi(u_j, u_\tau)]$ на соседних витках, обусловленная наличием точек пересечения следов. Методика учета этого фактора подробно изложена выше.

Важным прикладным результатом данного раздела является обоснование того, что при прогнозировании движения КО возникает корреляция погрешностей вектора состояния на момент прогноза и будущих значений гравитационного шума. Такой корреляции нет при учете в модели белого шума.

В разд. 1.3 в общем виде было показано, что учет матричных функций взаимной корреляции $K_{xq}(t_0, t) = K_{xq}(t, t_0)^T$ обеспечивает при прогнозировании корреляционной матрицы погрешностей векто-

ра состояния корректное выполнение прогнозов с использованием промежуточной точки. Пренебрежение этой корреляцией приводит к недостаточно объективной оценке погрешностей.

3.7. Прогнозирование корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния

В данном разделе рассматривается конкретный пример расчета статистических характеристик погрешностей на основе применения формулы (1.9). Оценивается «чистое» влияние цветного гравитационного шума — без учета погрешностей начальных условий. Расчеты выполнялись двумя способами:

- 1) с учетом только интегралов I_0 , т. е. при интегрировании по диагональной области (см. рис. 3.3).
- 2) с учетом интегралов I_0 и I_{k-j} ($k-j > 0$), т. е. при интегрировании по всей области возможных значений аргументов.

При выполнении расчетов с использованием только интегралов I_0 формула (3.24) упрощается:

$$Q(N)_0 = \sum_{j=1}^N U(N-j) I_0 U^T(N-j). \quad (3.57)$$

При расчетах с использованием второго способа применялась полная формула (3.24). Тем самым учитывалось влияние корреляции гравитационных возмущений, которая возникает в точках пересечения следов орбиты на разных витках. Исходные данные — те же, что применялись в предыдущих разделах. Точность определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала принята равной $\sigma_n = 10^{-9}$. Прогнозирование выполнялось на 30 витков. По результатам расчета компонентов корреляционной матрицы K_x определялись СКО погрешностей прогнозирования каждого из компонентов вектора состояния:

$$\sigma(EI_j) = \sqrt{K_x(j, j)}, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (3.58)$$

На рис. 3.25–3.27 представлены зависимости СКО погрешностей всех шести элементов орбиты от интервала прогнозирования. Результаты применения первого способа помечены цифрой «0», а второго способа — буквой «s».

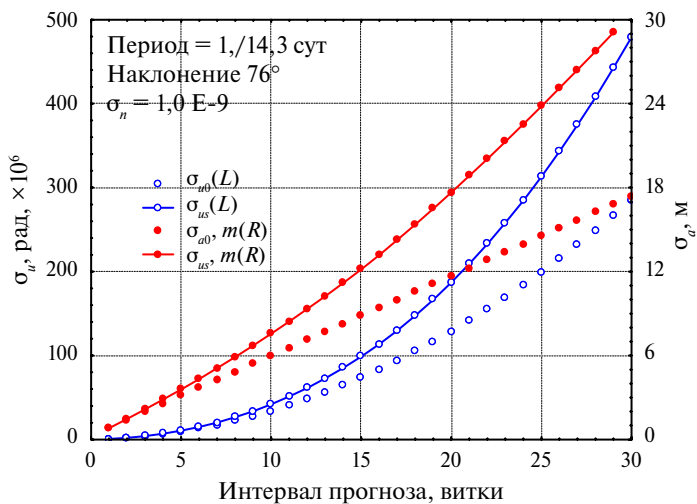


Рис. 3.25. СКО погрешностей прогнозирования (σ) аргумента широты (u) и большой полуоси (a)

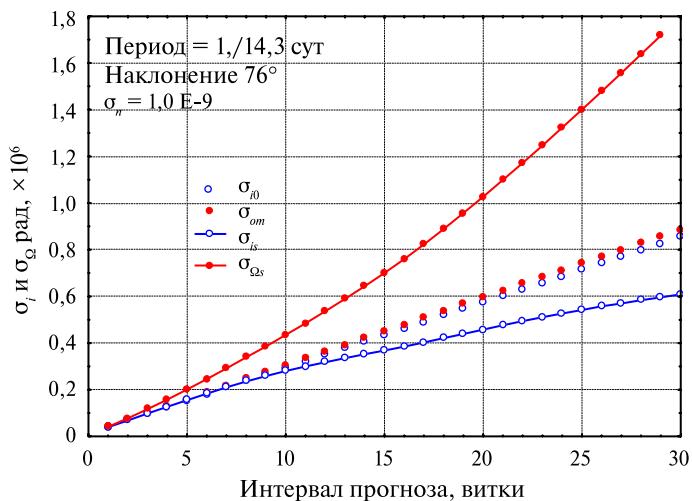


Рис. 3.26. СКО погрешностей прогнозирования (σ) наклонения (i) и долготы восходящего узла (om)

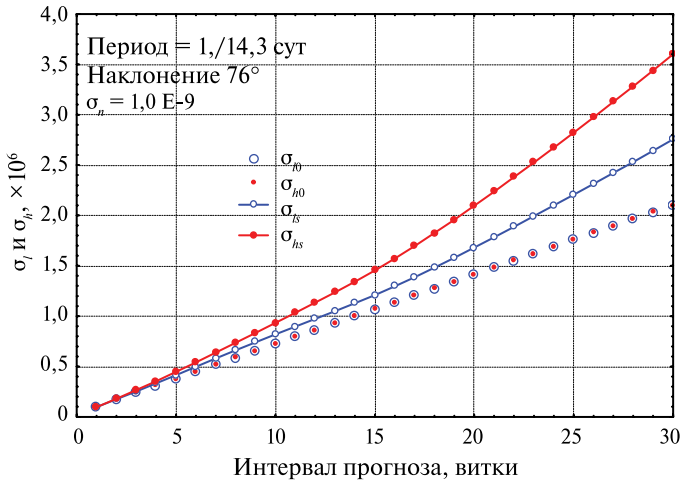


Рис. 3.27. СКО погрешностей прогнозирования элементов $l = e \cos(\omega)$ и $h = e \sin(\omega)$

Зависимость СКО погрешностей прогнозирования полуоси при использовании только интеграла I_0 (кривая σ_{u0}) близка к линейной.

Строго говоря, это СКО пропорционально \sqrt{N} , где N — интервал прогнозирования. Однако при достаточно коротких интервалах прогнозирования эта нелинейность проявляется слабо. При дополнительном учете интегралов I_{k-j} ($k-j > 0$), т. е. при интегрировании по всей области возможных значений аргументов, зависимость СКО погрешностей полуоси (кривая σ_{us}) приобретает параболический характер. Эффект учета рассматриваемого фактора растет по мере увеличения интервала прогнозирования и через 30 витков достигает 70 %. Суммарное значение СКО погрешности полуоси при прогнозе на 30 витков составило 30 м. Следует заметить, что при уточнении начальных условий (НУ) по измерениям эта погрешность может отчасти компенсироваться.

Зависимость СКО погрешностей прогнозирования аргумента широты при использовании только интеграла I_0 (кривая σ_{u0}) имеет параболический характер. При дополнительном учете интегралов I_{k-j} ($k-j > 0$), т. е. при интегрировании по всей области возможных значений аргументов, нелинейность зависимости (кривая σ_{us}) усиливается. Эффект учета рассматриваемого фактора растет по мере увеличения интервала прогнозирования и через 30 витков также

достигает 70 %. Суммарное значение СКО погрешности аргумента широты при прогнозе на 30 витков достигает 0,000480 рад, чему соответствует СКО погрешностей по положению 3,4 км. При прогнозе на 1 сут соответствующее значение СКО составляет $\sim 0,7$ км.

При использовании только интеграла I_0 зависимости СКО погрешностей прогнозирования обоих элементов орбиты (кривые σ_{θ} и $\sigma_{\text{ом}0}$) близки к линейной и практически совпадают. При дополнительном учете интегралов I_{k-j} ($k-j > 0$), т. е. при интегрировании по всей области возможных значений аргументов, СКО погрешностей прогнозирования долготы восходящего узла увеличиваются в 2 раза, а у наклона — уменьшаются на 30 %. В конце интервала прогноза СКО достигают значений 0,0000018 и 0,0000006 рад. Этим оценкам соответствуют СКО погрешностей по положению 12,9 и 4,3 м. Эффект уменьшения СКО погрешностей прогнозирования наклона при учете интегралов I_{k-j} ($k-j > 0$) оказался неожиданным. Он является следствием того, что компоненты $I_{k-j}(3,3)$ имеют отрицательные значения (см. табл. 3.3–3.15). В результате дополнительного анализа этому эффекту найдено следующее объяснение. Как видно из формулы (3.12), компонент $b_{33}(u)$ матрицы $B(t)$ зависит от косинуса аргумента широты. В соответствии с формулой (3.49) при вычислении интеграла I_{k-j} используются произведения $b_{33}(u_{1a})b_{33}(u_{2a})$ и $b_{33}(u_{1b})b_{33}(u_{2b})$. В точке пересечения следов эти произведения всегда отрицательны, так как значения u_{1a} и u_{2a} , а также u_{1b} и u_{2b} расположены по разные стороны точек орбиты с аргументами широты 90 и 270°.

При использовании только интеграла I_0 зависимости СКО погрешностей прогнозирования обоих элементов орбиты (кривые σ_{θ} и σ_{h0}) близки к линейной и практически совпадают. При дополнительном учете интегралов I_{k-j} ($k-j > 0$), т. е. при интегрировании по всей области возможных значений аргументов, СКО погрешностей прогнозирования этих элементов орбиты увеличиваются на 30 и 70 % соответственно. В конце интервала прогноза СКО достигают значений 0,0000028 и 0,0000036. Этим оценкам соответствуют СКО погрешностей по положению ~ 20 и 26 м.

Изложенные в данном разделе материалы достаточно хорошо согласуются с известными закономерностями изменения погрешностей прогнозирования элементов орбит спутников. Эти материалы иллюстрируют существенное влияние корреляции гравитационных возмущений в точках пересечения следов орбиты на разных витках.

Вклад этого эффекта увеличивается по мере роста интервала прогнозирования и при прогнозе более чем на 2...3 сут он является превалирующим.

3.8. Выводы

1. Состав вектора состояния выбран с учетом зависимости корреляционной функции шума от значений аргумента широты. Эта величина используется в качестве «быстрого» компонента вектора состояния. В качестве остальных пяти компонентов применены классические Кеплеровы элементы орбиты.
2. Представлены формулы для переходной матрицы $U(u, u_0)$ (6×6) и матричной функции $B(u)$ (6×3), которая используется в дифференциальных уравнениях для прогнозирования вектора состояния. Из компонентов этих функций только один ($u_{11}(u, u_0)$) содержит вековую составляющую. Остальные являются периодическими функциями аргумента широты.
3. Выполнено преобразование формулы (3.15) для вычисления двойного интеграла к более удобному для вычислений виду. При прогнозировании корреляционной матрицы на целое число витков используется периодичность большинства компонентов матричных функций $U(t, \xi)$ и $B(\xi)$ и допущение о постоянстве элементов орбиты на интервале прогнозирования. Такой прогноз учитывает основную (вековую) составляющую в эволюции погрешностей прогнозирования. При прогнозе на N витков область аргументов в двойном интеграле (3.15) разбивается на квадраты, соответствующие разным номерам витков. Положение каждого из этих квадратов характеризуется двумя индексами (j, k) , значения которых изменяются от 1 до N . Двойной интеграл (3.15) представлен в виде суммы двойных интегралов для каждого из этих квадратов. Показано, что вычисляемые для одного витка двойные интегралы (они обозначены как I_{j-k}) зависят только от разности индексов j и k . Удобство такого представления заключается в том, что вместо рассмотрения области интегрирования, состоящей из $N(N+1)/2$ квадратов, двойные интегралы I_{j-k} вычисляются в N квадратах.
4. Рассмотрен алгоритм вычисления двойного интеграла I_0 , у которого аргументы относятся к одному и тому же витку. Приведен числовой пример.

5. Проанализирован алгоритм вычисления двойного интеграла I_{j-k} , у которого аргументы относятся к разным виткам. При его вычислении используются значения аргументов широты в точках пересечения следов орбиты на разных витках. Приведен числовой пример.
6. Рассмотрен алгоритм вычисления матричной функции взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и шума, которая возникает при прогнозе движения. Приведен числовой пример. Ранее отмечалось, что учет матричных функций взаимной корреляции обеспечивает при прогнозировании корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния корректное выполнение прогнозов с использованием промежуточной точки.
7. Детально изложен пример расчета корреляционной матрицы погрешностей при прогнозе движения. Оценивается «чистое» влияние цветного гравитационного шума — без учета погрешностей начальных условий. Расчеты выполнялись двумя способами:
 - 1) с учетом только интегралов I_0 , т. е. при интегрировании по диагональной области изменения аргументов;
 - 2) с учетом интегралов I_0 и I_{j-k} ($k - j > 0$), т. е. при интегрировании по всей области возможных значений аргументов.

Эти материалы иллюстрируют существенное влияние корреляции гравитационных возмущений в точках пересечения следов орбиты на разных витках. Вклад этого эффекта увеличивается по мере роста интервала прогнозирования и при прогнозе более чем на 2...3 сут он является превалирующим.

8. В прил. В приведен текст компьютерной программы для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния спутника с учетом влияния случайных гравитационных возмущений.

4. НАСТРОЙКА ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА

4.1. Проблема выбора значения параметра σ_n

В последние годы была выполнена значительная работа по определению вариаций плотности атмосферы и их учету при прогнозировании (Nazarenko, 1998, 2007; Nazarenko et al., 2007a, b; Nazarenko, Alfriend, 2009; Yurasov et al., 2004, 2005a–c, 2005, 2006). Были получены существенные результаты в развитии моделей движения и в изучении случайных погрешностей прогнозирования движения КО, вызванных флуктуациями атмосферного торможения. Эти результаты позволяют сделать следующий шаг в совершенствовании методов определения и прогнозирования движения КО — на основе более полного учета статистических характеристик разного рода возмущений.

При прогнозировании движения спутников применяются разные модели гравитационного поля, имеющие различную точность, характеризующую параметром σ_n . Данный параметр является основой расчета СКО погрешностей радиальной составляющей гравитационных возмущений (σ_n), которое используется при прогнозировании корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния. Поэтому настройка параметров алгоритма заключается в выборе необходимого значения параметра σ_n и учете при этом степени используемых гармоник геопотенциала.

В разд. 2 были рассмотрены результаты вычисления СКО погрешностей радиальной компоненты гравитационных ускорений (σ_r). Особенностью этих результатов является учет различных значений дисперсии погрешностей коэффициентов разложения потенциала n -го порядка ($\sigma_n^2 = \text{const}$), которые принимаются не зависящими от степени n . Эти оценки были использованы для выбора оптимального порядка учитываемых гармоник n^* . Вычисления выполнялись по формуле $n^* = 0,003/\sqrt{\sigma_n}$. Статистические характеристики суммы $\left(\delta\bar{c}_{nk}^2 + \delta\bar{d}_{nk}^2\right)$ определялись в зависимости от величины n и

значения n^* . Для учета влияния не учитываемых гармоник ($n > n^*$) использовалась аппроксимация $\sqrt{\bar{c}_{nk}^2 + \bar{d}_{nk}^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-5} / n^2$. При суммировании по степени n учитывалась 1000 членов разложения.

Результаты вычисления СКО радиальной составляющей возмущений для спутников с различными высотами орбиты, а также при различных значениях параметра σ_n представлены на рис. 2.7. Кроме того, на рисунке приведены соответствующие оценки оптимального порядка учитываемых гармоник n^* . Из этих данных видно, что рассмотренные факторы, а именно, СКО (σ_n) погрешностей определения коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} , а также высота орбиты оказывают очень сильное влияние на СКО радиальной составляющей погрешностей. В рассмотренных условиях эта характеристика меняется на пять порядков (дисперсия меняется на 10 порядков!).

В разд. 2 отмечалось также, что данные о точности коэффициентов разложения гравитационного потенциала в ряд, публикуемые авторами моделей, не являются достаточно достоверными. Из данных рис. 2.4 видно, что в современных моделях гравитационного поля Земли СКО погрешностей определения коэффициентов (σ_n) не меньше значения $\approx 10^{-9}$. Для этого значения СКО оптимальному числу учитываемых гармоник соответствует степень $n^* = 95$. Однако на практике в алгоритмах прогнозирования движения спутников учитывается меньшее число гармоник. В соответствии с данными рис. 2.7 оптимальному числу учитываемых гармоник $n^* = 30$ соответствует значение $\sigma_n = 10^{-8}$.

В разд. 2 были также приведены оценки суммы $\sum_{n=2}^{n^*} (R_{\oplus}/r)^{2n} (n+1)^3$,

которая характеризует вклад учитываемых гармоник в результирующее значение дисперсии радиальной составляющей возмущений σ_r^2 . Соответствующие результаты расчета представлены на рис. 2.6. Из этих данных видно, что при росте степени учитываемых гармоник n значение суммы медленно стремится к некоторому предельному значению, величина которого тем больше, чем меньше высота орбиты спутника.

На рис. 4.1 представлены зависимости СКО радиальной составляющей (σ_r) от степени учитываемых гармоник в различных условиях.

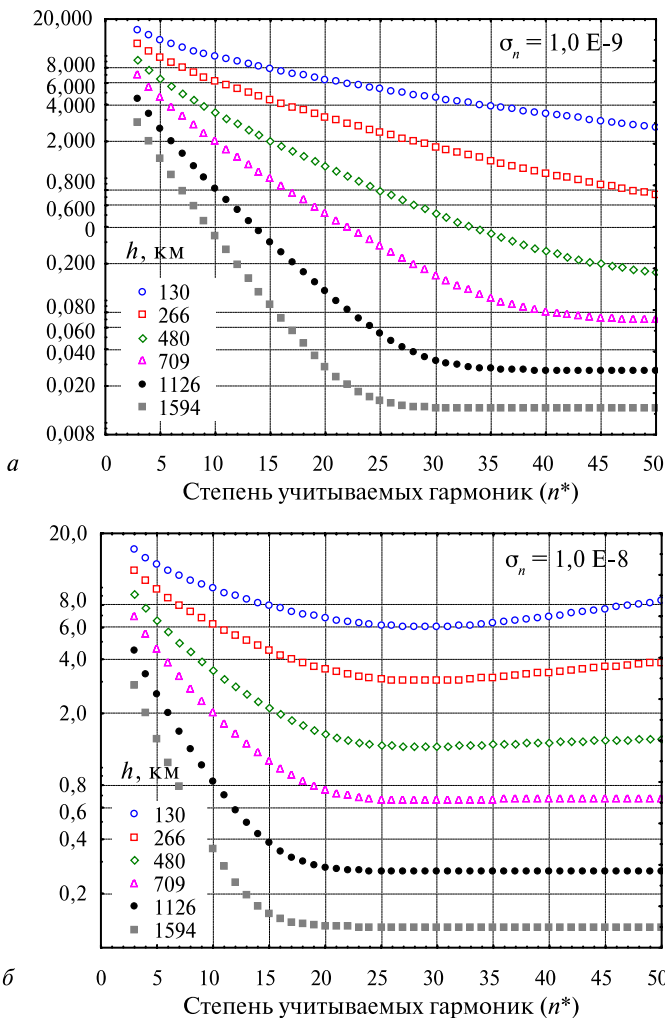


Рис. 4.1. Зависимости СКО радиальной составляющей (σ_r) от степени учитываемых гармоник: $a - \sigma_n = 10^{-9}$; $b - \sigma_n = 10^{-8}$

Из данных рис. 4.1б видно, что оптимальная степень учитываемых гармоник $n^* = 30$, соответствующая значению $\sigma_n = 10^{-8}$, на самом деле обеспечивает четко выраженный минимум СКО радиальной составляющей σ_r для спутников с высотой орбиты до ~ 300 км. Для более высокоорбитальных спутников зависимость СКО радиальной

составляющей от степени учитываемых гармоник характерна тем, что сначала значения σ_r быстро уменьшаются, а затем стабилизируются. При этом стабилизация наступает при значениях степени $n_{\max} < n^* = 30$. Например, для спутников с высотой орбиты 1500 км стабилизация наступает при значениях степени $n \approx 15...20$.

Аналогичные закономерности справедливы и для варианта расчетов при $\sigma_n = 10^{-9}$ (см. рис. 4.1а). Отличие заключается только в том, что в этом случае оптимальная степень учитываемых гармоник существенно больше ($n^* = 95$) и обеспечивает минимум значения σ_r для спутников с высотой орбиты до ~ 300 км. Для более высокорбитальных спутников зависимость СКО радиальной составляющей от степени учитываемых гармоник убывает медленнее, чем при значении $\sigma_n = 10^{-8}$ (см. рис. 4.1б). Для спутников с высотой орбиты 1500 км стабилизация наступает при значениях степени $n \approx 25...30$.

На основе опыта применения той или иной модели движения спутников пользователь устанавливает максимальное число членов разложения гравитационного потенциала (n_{\max}), которые учитываются в правых частях уравнений движения в алгоритме прогнозирования. Этот опыт, а также данные рисунков 2.6 и 4.1 рекомендуется использовать для выбора соответствующего значения параметра σ_n .

4.2. Предварительный выбор значения параметра σ_n по данным о столкновении спутников «Иридиум-33» и «Космос-2251»

Данные о столкновении этих спутников 10 февраля 2009 г. в 16 ч 56 мин предоставляют уникальную возможность для точной оценки погрешностей прогнозирования. Расчеты на основе использования предшествующих так называемых двухрядных элементов орбит (TLE, <http://www.space-track.org>) производились тремя способами (Nazarenko, 2009):

- 1) непосредственный прогноз TLE на основе применения Американской аналитической модели движения SGP 4 (Hoots, Roehrich, 1980);
- 2) уточнение начальных условий (НУ) с помощью метода наименьших квадратов (МНК) при использовании шести наборов TLE ($n_z = 6$) и применении численной модели движения;

- 3) уточнение НУ с помощью метода оптимальной фильтрации измерений (ОФИ) при использовании двадцати наборов TLE ($n_z = 20$) и применении численной модели движения.

Последние перед столкновением начальные условия в форме TLE за 9 февраля соответствовали моментам времени: 18 ч («Иридиум-33») и 12 ч («Космос-2251»). На рис. 4.2 представлены расчетные значения расстояния между спутниками в окрестности момента столкновения. Из полученных результатов видно, что применение методики ОФИ привело к уменьшению погрешностей прогноза в 2,7 раза по сравнению с применением других способов расчета.

В процессе анализа орбитальных данных в момент столкновения, соответствующих варианту расчета TLE+SGP4, было установлено, что в точке столкновения суммарная погрешность прогноза по времени составила 0,06 с.

На рис. 4.3 представлены апостериорные оценки СКО погрешностей прогнозирования обоих рассматриваемых КА с использованием способа 1. Они получены по результатам прогноза на интервале времени до столкновения КА. Видно, что при прогнозе на 1-е сутки СКО погрешностей по времени составили 0,06 и 0,02 с для КА «Иридиум-33» и «Космос-2251» соответственно. Эти оценки до-

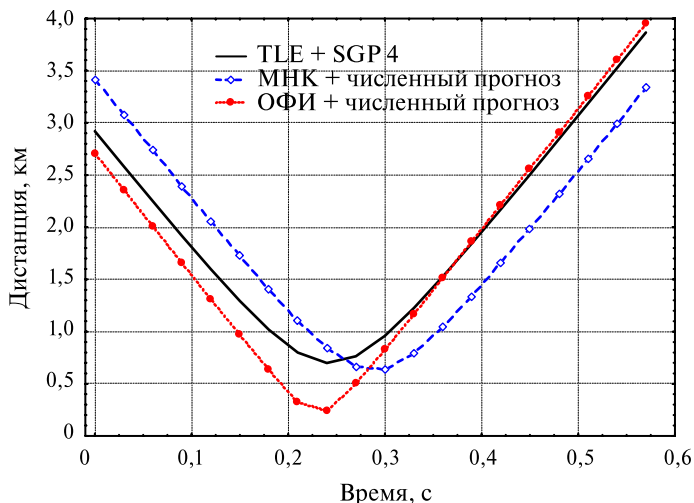


Рис. 4.2. Изменение расстояния между спутниками

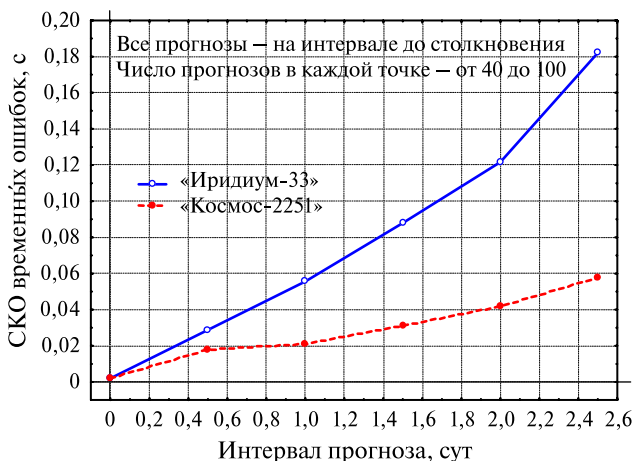


Рис. 4.3. Апостериорные оценки СКО временных погрешностей прогноза

статочно хорошо согласуются с приведенной выше соответствующей оценкой погрешности расчета траекторных данных на момент столкновения (вариант расчета TLE+SGP4).

Результаты анализа точности прогнозирования по данным о столкновении спутников «Иридиум-33» и «Космос-2251» были изложены также в докладе (*Khutorovskiy et al., 2009*). Основные выдержки приведены ниже. Все оценки получены по данным Российской системы контроля космического пространства. Последнее уточнение начальных условий для прогноза выполнено 10 февраля в 16 ч 46 мин 56 с UTC, т. е. за 10 мин до столкновения. Зависимость погрешностей прогноза столкновения от интервала прогноза представлена на рис. 4.4.

Оценки погрешностей:

- за 2 сут до столкновения прогнозные значения минимального расстояния между спутниками находились в диапазоне 50...100 м;
- за 17 ч до столкновения прогнозные значения минимального расстояния между спутниками не превышали 20 м.

Данные рассматриваемого доклада характерны тем, что, по сравнению с данными рис. 4.2 и 4.3, они получены по существенно большему числу измерений и являются более точными. При получении

этих результатов использовалась, по-видимому, более точная модель движения, характеристики которой в докладе не приводятся.

На рис. 4.5 приведены результаты расчета априорных статистических характеристик погрешностей прогнозирования спутников

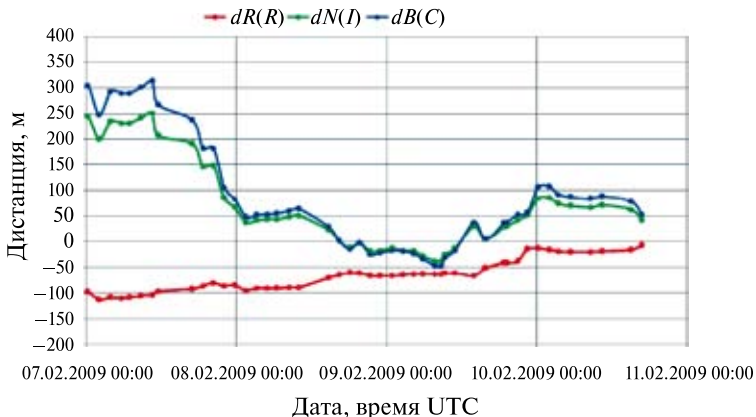


Рис. 4.4. История прогнозирования столкновения

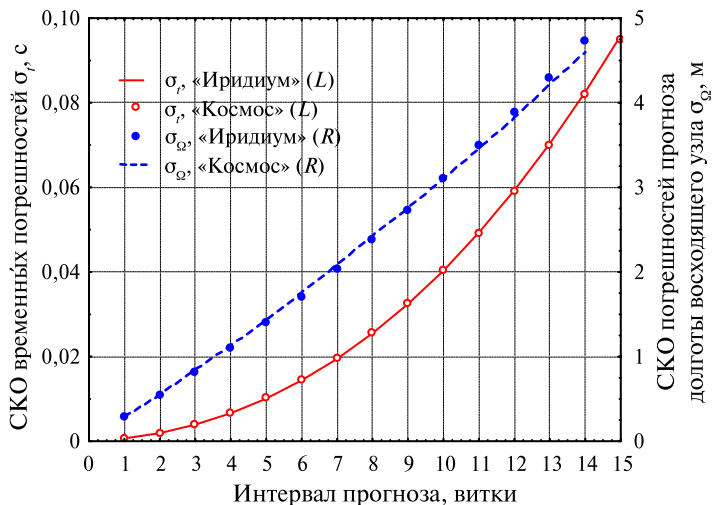


Рис. 4.5. Априорные оценки погрешностей прогнозирования параметров орбиты σ_t и σ_Ω

«Иридиум-33» и «Космос-2251», полученные на основе применения изложенной выше методики учета случайных гравитационных возмущений. СКО погрешностей определения коэффициентов гравитационного потенциала принималось равным $\sigma_n = 10^{-9}$. Естественно, что эти оценки согласуются с данными рис. 3.25–3.27 и отличаются от них только размерностью.

При сравнении априорных оценок, представленных на рис. 4.5, с данными реальных погрешностей (рис. 4.3 и 4.4) следует иметь в виду, что априорные оценки учитывают только «чистое» влияние гравитационных возмущений, а оценки реальных погрешностей отражают влияние ряда дополнительных факторов. К этим дополнительным факторам относятся: характеристики (точность) начальных условий, влияние негравитационных возмущений, относительно небольшое число реализаций при получении реальных значений погрешностей прогнозирования, а также различия в числе учитываемых коэффициентов гравитационного потенциала. С учетом этого обстоятельства согласие изложенных выше априорных и реальных погрешностей прогнозирования следует считать приемлемым.

Таким образом, при прогнозировании корреляционных матриц в качестве первого приближения можно использовать значение параметра $\sigma_n = 10^{-9}$. В дальнейшем, при учете методики получения начальных условий и их точности, значение этого параметра может быть уточнено.

4.3. Оценка точности определения и прогнозирования орбит спутников типа GPS

Выполним анализ влияния гравитационных возмущений на точность определения и прогнозирования орбит спутников типа GPS. Рассмотрим предельно упрощенное усредненное уравнение движения спутника в гравитационном поле Земли, учитывающее только временные параметры (время пересечения экватора на N -м витке и период):

$$\frac{dt_N}{dN} = T_N. \quad (4.1)$$

Вместо истинного значения периода T_N при прогнозе используется его расчетное значение:

$$\frac{d\hat{t}_N}{dN} = \hat{T}_N. \quad (4.2)$$

Уравнение для временной погрешности прогнозирования принимает вид

$$\frac{d\delta t_N}{dN} = \frac{d\hat{t}_N}{dN} - \frac{dt_N}{dN} = \hat{T}_N - T_N = \delta T_N. \quad (4.3)$$

Связь погрешностей расчета периода δT_N с данными о погрешностях гравитационного поля $\delta U(r, \varphi, \lambda)$ легко определяется из интеграла энергии. Эта связь выражается следующим образом:

$$\delta T_N = \frac{3}{2} T_N \frac{\delta a_N}{a} = 3 T_N \frac{a}{\mu} \delta U(r, \varphi, \lambda). \quad (4.4)$$

Орбиту примем круговой и представим $\delta U(r, \varphi, \lambda)$ в виде

$$\delta U(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{a} \delta R(a, \varphi, \lambda). \quad (4.5)$$

Здесь

$$\delta R(a, \varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^n (\delta c_{nk} \cos k\lambda + \delta d_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi) \quad (4.6)$$

— безразмерная относительная погрешность расчетного потенциала, возникающая вследствие неточности известных значений коэффициентов c_{nk} и d_{nk} и «обрезания» членов высокого порядка. Погрешность (4.6) принимается случайной величиной с нулевым математическим ожиданием.

Корреляционная функция погрешностей потенциала $\delta R(a, \varphi, \lambda)$ строится по методике, изложенной в разд. 2. Она выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} K_U(a, \cos \psi) &= \sigma_U^2 k_U(a, \cos \psi) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^{2n} \frac{(2n+1)}{2} (\delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{d}_{nk}^2) P_{n0}(\cos \psi). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь используются нормированные коэффициенты; $k_U(a, \psi)$ — безразмерная корреляционная функция. Дисперсия σ_U^2 вычисляется по этой формуле при $P_{n0}(1) = 1$. В табл. 4.1 представлены рассчитанные значения СКО погрешностей потенциала (σ_U) спутников для трех диапазонов высот при различной точности (σ_n) определения коэффициентов \bar{c}_{nk} и \bar{d}_{nk} . Оценки для спутников типа GPS выделены полужирным шрифтом.

Таблица 4.1. Оценки σ_U для различных высот и при различных значениях σ_n

σ_n	Высота, км		
	1600	20 180	35 780
1,0 E-10	3,12 E-10	0,134 E-10	0,051 E-10
1,0 E-9	31,2 E-10	1,34 E-10	0,511 E-10
1,0 E-8	312 E-10	13,4 E-10	5,11 E-10

Выше отмечалось, что данные авторов моделей гравитационного поля об оценках погрешностей определения коэффициентов (σ_n) не являются достаточно достоверными. По-видимому, наиболее реалистичная оценка находится в интервале значений σ_n от 1,0 E-9 до 1,0 E-8. Для спутников типа GPS этому соответствуют оценки σ_U от 1,343E-10 до 13,43 E-10.

На рис. 4.6 представлены нормированные автокорреляционные функции $k_U(h, \psi)$ для упомянутых выше трех типов спутников. Эти функции построены во вращающейся с Землей системе координат.

На основе представленной выше автокорреляционной функции $k_U(a, \psi)$ для спутника с высотой орбиты 20 180 км построена соответствующая корреляционная функция $k_U(u_1, u_2)$ в инерциальной

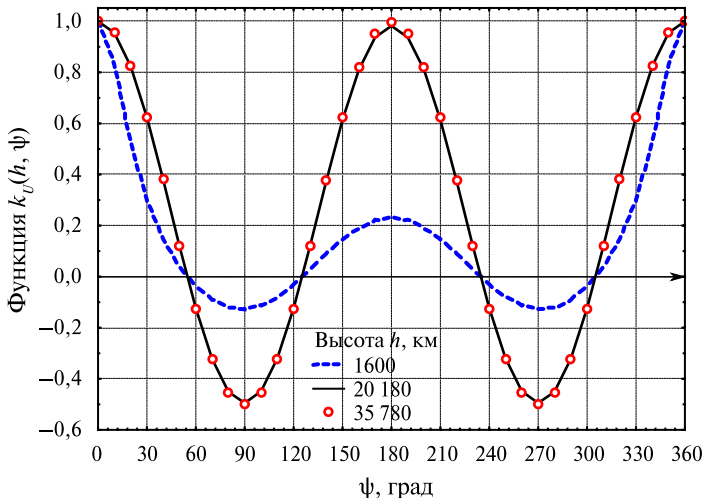


Рис. 4.6. Нормированные автокорреляционные функции $k_U(h, \psi)$

системе координат, которая характеризует корреляцию погрешностей (4.6) в точках орбиты со значениями аргумента широты u_1 и u_2 (см. рис. 2.18).

После подстановки (4.4) и (4.5) в (4.3) уравнение для погрешностей запишем в более компактном виде:

$$\frac{d\delta t_N}{dN} = 3T_\Omega \delta R(a, \varphi, \lambda) = bq(N), \quad (4.8)$$

где $q(N)$ — Гауссов случайный процесс (шум) с единичной дисперсией и корреляционной функцией $k_U(u_1, u_2)$; b — постоянный коэффициент, $b = 3T_N \sigma_U$; σ_U^2 — дисперсия погрешностей потенциала. Связь между аргументом широты и номером витка имеет простой вид: $u = 2\pi N$. Погрешность прогноза, обусловленная влиянием шума, выражается следующим образом:

$$\delta t_N = \delta t(N) = b \int_{\xi=N_0}^N q(\xi) d\xi. \quad (4.9)$$

Среднеквадратическое отклонение погрешностей $\delta t(N)$ легко определяется на основе (4.9):

$$\sigma_t(N) = b \sqrt{\int_{\eta=N_0}^N \int_{\xi=N_0}^N k_U(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (4.10)$$

Рассмотрим особенности и результаты расчета двойного интеграла. На рис. 4.7 представлен вид «сверху» на распределение $k_U(u_1, u_2)$ (см. рис. 2.18). На нем выделены квадратные области аргументов, соответствующие половине оборота спутника. Аргумент u_2 меняется в интервале от 0 до 720° , т. е. в пределах двух витков. Это как раз период времени, через который повторяются условия прохождения спутника над поверхностью Земли.

Из данных рис. 4.7 четко виден периодический характер поведения функции $k_U(u_1, u_2)$ в области аргументов u_1 и u_2 . Имеется три типа рассматриваемых областей (квадратов) размером $180 \times 180^\circ$. Они обозначены как I_0 , I_1 и I_2 . Двойные интегралы вида (4.10) в этих областях одинаковы. Их значения приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Значения двойных интегралов (10) в областях I_0 , I_1 и I_2

I_0	I_1	I_2
0,08336	-0,00541	-0,07029

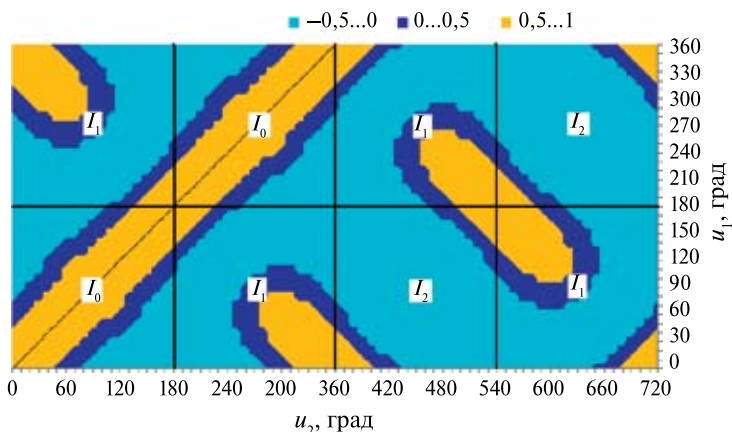


Рис. 4.7. Вид «сверху» на область аргументов корреляционной функции $k_f(u_1, u_2)$ спутника типа GPS

На рис. 4.8 представлена область вычисления двойного интеграла (4.10) в пределах четырёх витков. Области I_0 , I_1 и I_2 повторяются через каждые 2 витка (1 сут) в последовательности I_0 , I_1 и I_2 и I_1 (и по вертикали, и по горизонтали). Применение этой закономерности облегчает вычисление двойного интеграла (4.10).

На рис. 4.9 представлены СКО временных погрешностей прогноза, пересчитанные в СКО погрешностей прогноза по положению (вдоль траектории). Рассмотрено два варианта точности определения коэффициентов разложения гравитационного потенциала (параметр σ_n).

Из данных этого рисунка видны следующие закономерности:

- при изменении точности определения коэффициентов c_{nk} и d_{nk} на порядок оценки СКО соответствующих погрешностей меняются также на порядок;
- зависимость СКО погрешностей прогноза от времени имеет вековую и периодическую составляющую; при интервалах прогноза до 1 сут периодическая составляющая приблизительно в 4...8 раз больше вековой составляющей;
- вековая составляющая имеет линейный характер и увеличивается на 5 и на 0,5 см за 1 сут соответственно для двух рассмотренных вариантов значений параметра σ_n .

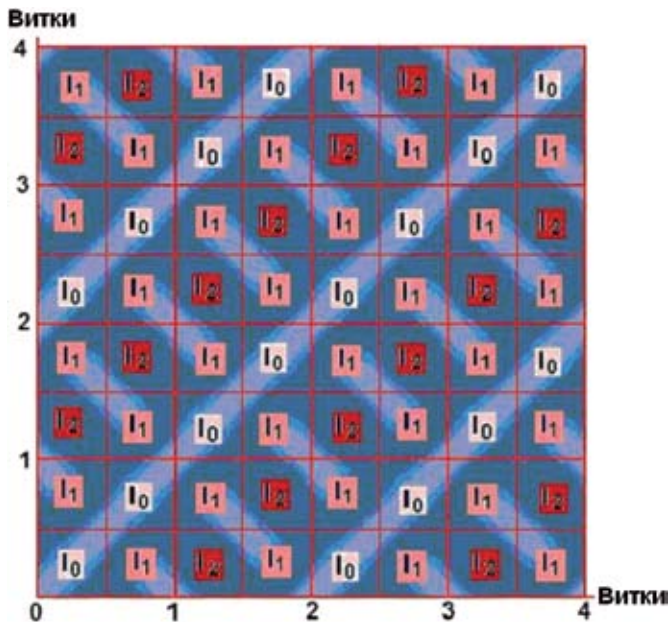


Рис. 4.8. Область вычисления двойного интеграла (4.10) в пределах четырех витков

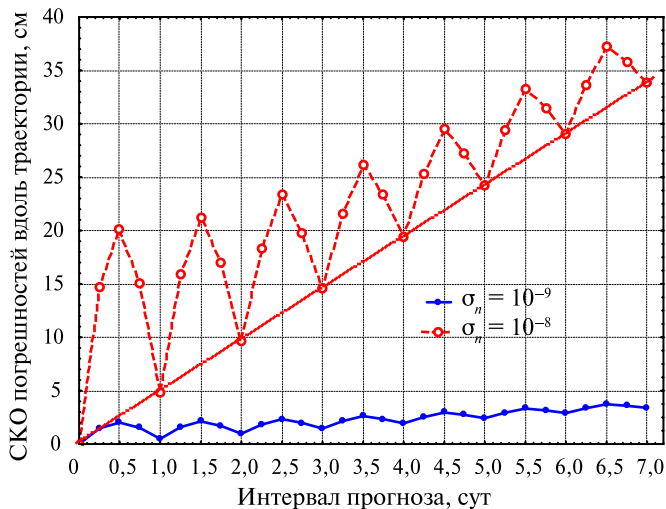


Рис. 4.9. СКО погрешностей прогноза при разных значениях σ_n

Комментарий

Изложенные выше оценки погрешностей прогноза отражают «чистое» влияние погрешностей расчетных значений гравитационного поля. Однако они не учитывают влияние погрешностей начальных условий (НУ), которые сами зависят от многих факторов: методики получения НУ по данным измерений, точности измерений, числа учитываемых членов разложения гравитационного потенциала и др. Ниже влияние погрешностей НУ рассмотрено более детально.

Оценка точности с учетом результатов обработки данных измерений. Искомые начальные условия обозначим как t_0 и T_0 . Примем, что через каждые 0,5 витка измеряется время пролета спутника через узел орбиты (время пересечения экватора). Связь измерений (z_i) с начальными условиями и источниками ошибок имеет вид

$$z_i = t_0 + (N_i - N_0)T_0 + b \int_{N_0}^{N_i} q(\xi) d\xi + v_i = \|1 \quad N_i - N_0\| x_0 + v_{i\Sigma},$$

$$i = 1, \dots, n_z. \quad (4.11)$$

Здесь x_0 — искомый вектор начальных условий;

$$v_{i\Sigma} = b \int_{N_0}^{N_i} q(\xi) d\xi + v_i \quad (4.12)$$

— суммарная погрешность измерений, статистические характеристики которой известны. Обратим внимание на то, что вектор начальных условий x_0 может быть «привязан» к произвольной точке орбиты.

Рассмотрим сначала *простейший метод наименьших квадратов* (МНК) с единичной весовой матрицей. После введения традиционных матричных обозначений:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & N_1 - N_0 \\ 1 & N_2 - N_0 \\ \dots & \dots \\ 1 & N_{n_z} - N_0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{n_z} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad V_\Sigma = \begin{bmatrix} v_{1\Sigma} \\ v_{2\Sigma} \\ \dots \\ v_{n_z\Sigma} \end{bmatrix}$$

искомая МНК — оценка и корреляционная матрица ее погрешностей — могут быть представлены следующим образом:

$$\hat{x}_0 = (F^T F)^{-1} F^T Z, \quad (4.13)$$

$$K_{\hat{x}_0} = \left(F^T F \right)^{-1} F^T M \left(V_{\Sigma} V_{\Sigma}^T \right) F \left(F^T F \right)^{-1}. \quad (4.14)$$

Корреляционная матрица $M \left(V_{\Sigma} V_{\Sigma}^T \right)$, входящая в выражение (4.14), легко строится на основе определения суммарных погрешностей (4.12):

$$K_z = M \left(V_{\Sigma} V_{\Sigma}^T \right) = b^2 \{ Q_{ij} \} + \sigma_z^2 E = \sigma_z^2 \left(S_n^2 \{ Q_{ij} \} + E \right). \quad (4.15)$$

Здесь $\{ Q_{ij} \}$, $i, j = 1, \dots, n_z$ — матрица размером $(n_z \times n_z)$, компоненты которой рассчитываются по формуле

$$Q_{ij} = \int_{\xi=N_0}^{N_i} \int_{\eta=N_0}^{N_j} k_U(\xi, \eta) d\xi d\eta; \quad (4.16)$$

σ_z^2 — дисперсия ошибок измерений; $S_n = b/\sigma_z$ — отношение «сигнал/шум».

Рассмотрено также применение *метода оптимальной фильтрации измерений (конкретизация метода максимального правдоподобия — ММП — с учетом шумов в модели движения)* (Nazarenko, 1998, 2007, 2009; Nazarenko et al., 2007a, b), которое в данном случае характерно использованием недиагональной весовой матрицы $P = K_z^{-1}$. Эта матрица строится путем обращений матрицы (4.15). Она учитывает статистические характеристики гравитационных возмущений. Расчет корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния производится по формуле

$$K_{\hat{x}_0}^{\text{ММП}} = \left(F^T P F \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

Другой особенностью применения этого метода является расчет всех входящих в (4.17) матриц не только на момент последнего измерения, но и для прогнозных точек. Это решение корректно и упрощает алгоритм прогноза СКО погрешностей.

Оценки СКО погрешностей прогноза были рассчитаны по формулам (4.15) и (4.17) для четырех вариантов исходных данных (табл. 4.3), различающихся длиной мерного интервала (числом измерений) и отношением «сигнал/шум» S_n . Во всех случаях СКО погрешностей измерений принималось равным $\sigma_z = 10$ см.

В последней строке табл. 4.3 приведены соответствующие оценки параметра σ_U , который характеризует достигнутую точность расче-

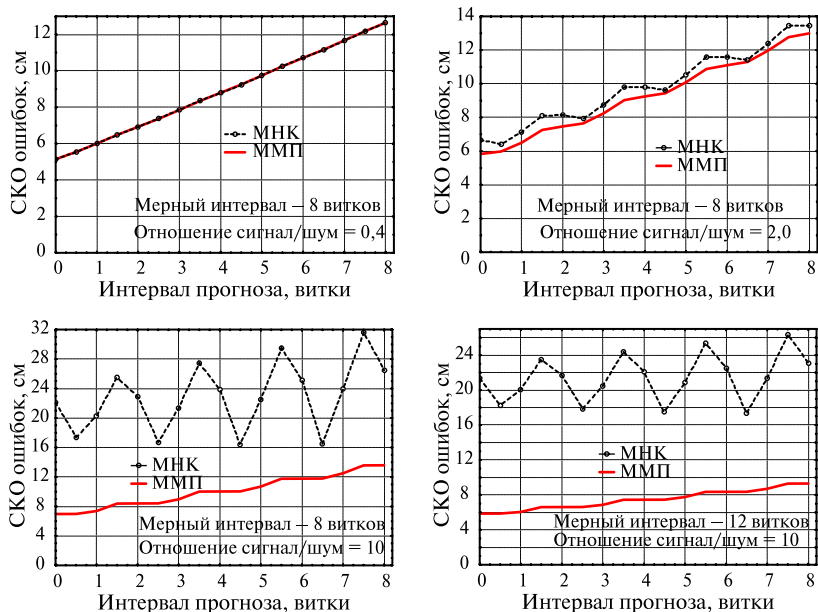


Рис. 4.10. Результаты оценок СКО погрешностей прогноза

та потенциала Земли. Значения этого параметра обсуждались выше (см. табл. 4.1).

Таблица 4.3. Данные о вариантах расчета

Номер варианта	1	2	3	4
Мерный интервал, витки	8	8	8	12
Отношение S_n	0,4	2	10	10
СКО погрешностей поля (σ_U)	1,0 E-10	5,0 E-10	25 E-10	25 E-10

На рис. 4.10 представлены СКО погрешностей прогноза движения спутника типа GPS для четырех рассмотренных вариантов исходных данных.

На основе представленных данных можно сделать следующие выводы.

1. Разница между результатами применения МНК и ММП (без учета и с учетом гравитационных шумов при взвешивании

измерений) растет по мере увеличения отношения «сигнал/шум», т. е. уровня гравитационных шумов по сравнению с погрешностями измерений. Если при отношении «сигнал/шум», равном 0,4, результаты практически совпадают, то при $S_n = 10$ применение ММП с учетом гравитационных шумов обеспечивает трехкратное повышение точности.

2. Полученные оценки погрешностей прогнозирования достаточно хорошо согласуются с предшествующими материалами исследований. В частности, результаты расчетов для вариантов № 3 и 4 (см. рис. 4.10) очень «похожи» на данные рис. 4.9, на котором представлены оценки СКО погрешностей, обусловленные «чистым» влиянием неизвестных гравитационных возмущений (без учета погрешностей НУ). Естественно, что эта «похожесть» проявляется тем лучше, чем больше отношение «сигнал/шум». Другим, вполне ожидаемым, результатом является повышение точности ММП оценок в 1,5 раза при увеличении мерного интервала с 8 до 12 витков. Этот эффект — следствие применения корректного «взвешивания» «старых» измерений, которого нет при использовании МНК.
3. Эффективность практического применения рассмотренной здесь методики уточнения параметров орбиты с учетом гравитационных шумов зависит от точности применяемой модели гравитационного поля и точности измерений. Как следует из комментариев к табл. 4.1 и данных табл. 4.3, современный уровень погрешностей гравитационного поля близок к условиям расчетов по вариантам 2, 3 и 4. Кроме того, эффективность применения этой методики будет расти с повышением точности измерений. *Поэтому применение методики уточнения и прогноза параметров орбит навигационных спутников с учетом гравитационных шумов является перспективным направлением дальнейших работ.*

Кроме рассмотренных выше вариантов были проведены дополнительные расчеты, цель которых — более полно оценить влияние мерного интервала и отношения «сигнал/шум» на точность определения и прогнозирования орбит. Соответствующие результаты представлены на рис. 4.11 и 4.12.

По сравнению с данными рис. 4.10 здесь рассмотрено два дополнительных мерных интервала: 16 и 20 витков. Видно, что для МНК

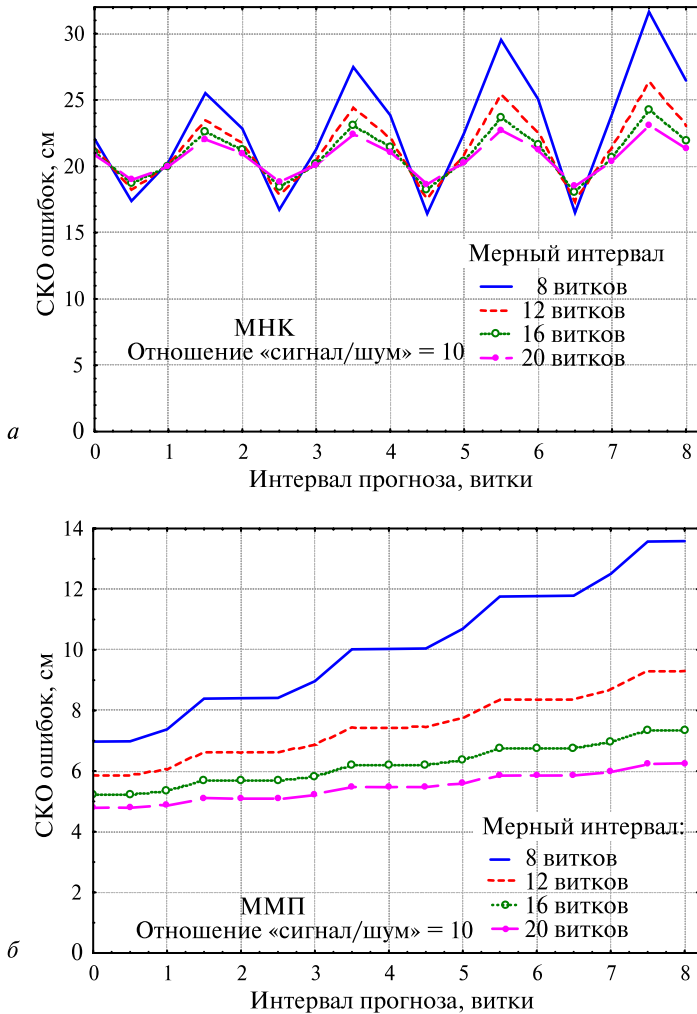


Рис. 4.11. Влияние мерного интервала при $S_n = 10$:
a — применение МНК; *б* — ММП

при росте мерного интервала в заданных пределах уровень погрешностей прогноза сначала заметно уменьшается, а затем стабилизируется. При прогнозе на 1 сут СКО ошибок прогноза находятся в интервале от 18 до 22 см. При использовании ММП рост мерного

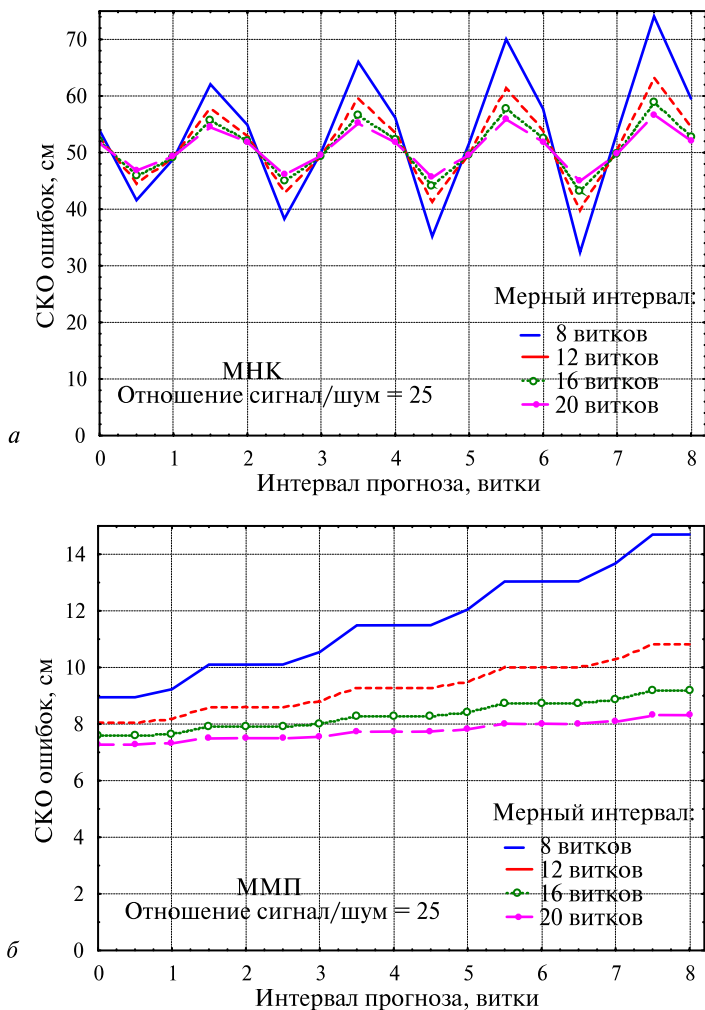


Рис. 4.12. Влияние мерного интервала при $S_n = 25$:
 а — применение МНК; б — ММП

интервала также приводит к стабилизации СКО погрешностей прогноза, но повышение точности оказывается более существенным. При прогнозе на 1 сут СКО ошибок прогноза находятся в интервале от 4,8 до 5,1 см. По сравнению с МНК этот уровень погрешностей в 4 раза меньше.

Этот рисунок отличается от предыдущего увеличением отношения «сигнал/шум» в 2,5 раза (СКО погрешностей поля $\sigma_U = 62,5 \text{ E-}10$). Общий характер зависимостей очень похож на данные рис. 4.11. Важное различие состоит в существенном росте уровня погрешностей при использовании МНК. При прогнозе на 1 сут СКО ошибок прогноза при мерном интервале в 16...20 витков увеличились в 2,5 раза: они находятся в интервале значений от 46 до 55 см. При использовании ММП уровень погрешностей также увеличился, но в существенно меньшей степени: только в 1,5 раза. При прогнозе на 1 сутки СКО ошибок прогноза находятся в интервале от 7,3 до 7,5 см. По сравнению с МНК этот уровень погрешностей в 6...7 раз меньше.

Таким образом, при увеличении отношения «сигнал/шум» до 25 применение ММП с учетом гравитационных шумов обеспечивает повышение точности в 6...7 раз. Эти результаты относятся к величине мерного интервала в пределах от 16 до 20 витков.

Для лучшего понимания изложенных материалов приведем конкретные примеры матриц K_z и $P = K_z^{-1}$. На рис. 4.13 и 4.14 представлены эти матрицы, рассчитанные в точке орбиты на момент последнего измерения + 0,5 витка при следующих значениях параметров: мерный интервал равен 16 виткам; $S_n = 10$; $\sigma_z = 1 \text{ см}$.

Представленные матрицы характерны следующими особенностями:

- в области аргументов (33×33) компоненты матрицы K_z изменяются почти на 2 порядка; наибольшие значения относятся к первому измерению, а наименьшие — к последнему; имеется существенная периодическая составляющая с периодом 2 витка (1 сут);
- матрица P имеет сходство с единичной матрицей: основные отличия: а) диагональные члены изменяются в пределах от 0,85 до 1,0; б) недиагональные члены изменяются в пределах от $-0,15$ до $+0,10$; в) все компоненты имеют периодическую составляющую с периодом 2 витка и в среднем увеличиваются при приближении к последнему измерению.

Изложенные особенности матриц K_z и P не являются тривиальными. Именно такой их характер отражает влияние не учтенных гравитационных возмущений и позволяет повысить точность определения и прогнозирования параметров орбиты.

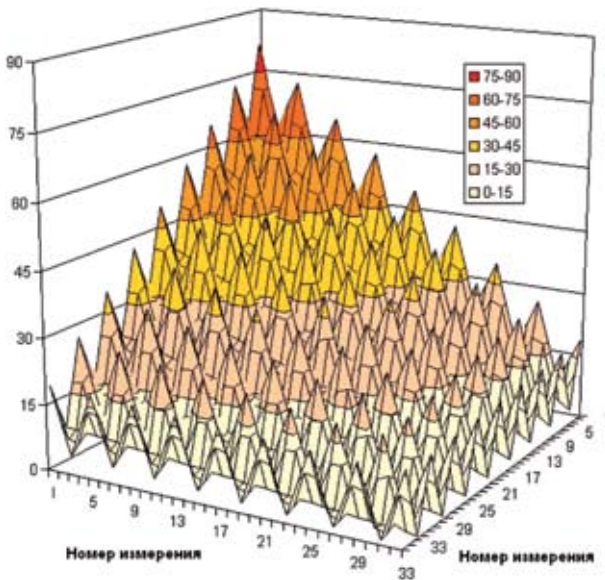


Рис. 4.13. Матрица K_z

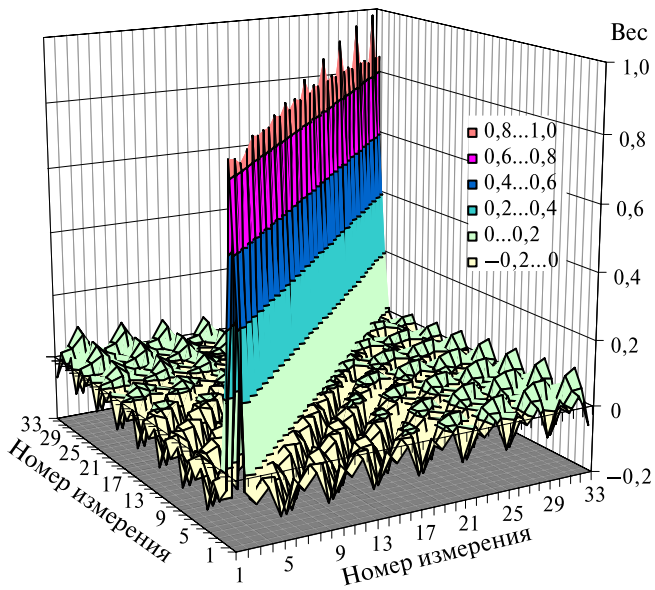


Рис. 4.14. Матрица P

В заключение раздела рассмотрим данные статьи Д. Валладо (*Val-lado, 2007*), относящиеся к анализу точности прогнозирования вектора состояния двух спутников типа GPS (SVN-22 и SVN-31):

«Доступные параметры орбит спутников GPS, содержащиеся в точных орбитальных эфемеридах (POE — Precision Orbit Ephemerides), обеспечивают потребителей очень полезным набором данных. Большая высота спутников позволяет не учитывать влияние атмосферного торможения, но вызывает необходимость рассмотрения влияния давления солнечного света — другой доминирующей неконсервативной силы... Как только были получены данные о массе и размерах спутников, была применена рекуррентная фильтрация измерений, чтобы определить отношение масштабных коэффициентов k_1/k_2 , которые используются при учете светового давления.

<...>

Для спутника SVN-22 в качестве данных наблюдения использовались результаты службы International GPS Service (IGS). Объявленная ею точность составляет 5...10 см по положению. Устойчивые оценки параметров орбиты были получены после 3 итераций. Затем выполнялось прогнозирование параметров орбиты на 2-месячный интервал. При этом в модели движения использовалось гравитационное поле 70×70 WGS-84/EGM-96, влияние притяжения Солнца и Луны и давление солнечного света.

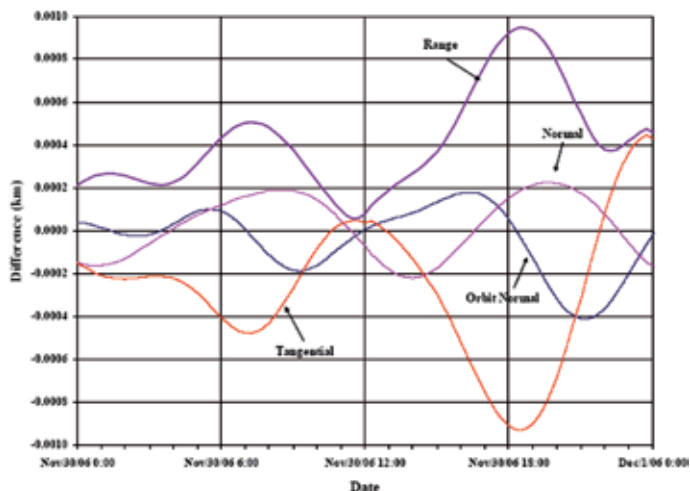


Figure 14: GPS SVN-22. Сравнение результатов прогноза с данными POE на суточном интервале

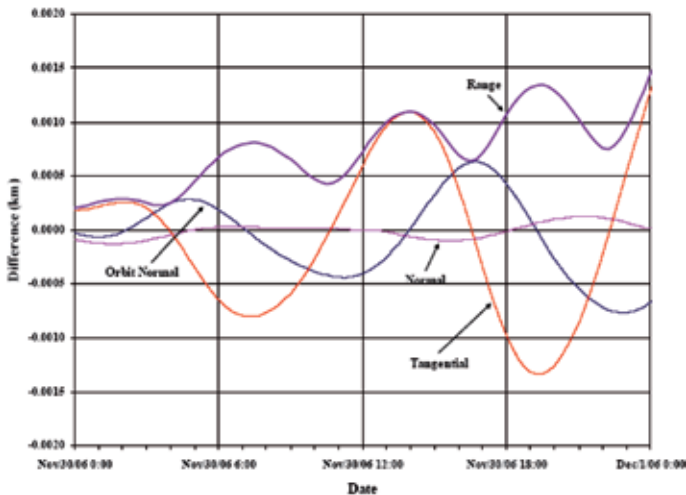


Figure 15: GPS SVN-31. Сравнение результатов прогноза с данными POE на суточном интервале»

<...>

Результаты представлены на рисунках. Заметим, что, с учетом уровня возможных погрешностей порядка 20 см, при уточнении использовались измерения на 4-суточном интервале.

Из сравнения материалов статьи Д. Валладо с изложенными выше результатами исследований видно, что между полученными оценками погрешностей прогнозирования нет существенных противоречий.

Комментарии

1. В результате предшествующих исследований установлены сравнительные соотношения между погрешностями оценок вектора состояния при использовании различных методов уточнения начальных условий по измерениям. Целесообразность применения МНК без расширения или с расширением вектора состояния зависит от уровня возмущений. Существует уровень малых возмущений, при котором более выгодно применять МНК без расширения вектора состояния. Однако и в этом случае погрешности больше, чем при использовании метода оптимальной фильтрации измерений (ОФИ) с учетом статистических характеристик разного рода возмущений. Эта методика является конкретизацией метода максимального правдоподобия.

2. Методика оптимальной фильтрации измерений развита в настоящее время в интересах повышения точности определения и прогнозирования низких орбит спутников, подверженных торможению в атмосфере. Ее эффективность проявляется наиболее сильно в условиях дефицита измерений: использование метода ОФИ позволяет применять достаточно большие мерные интервалы и за счет более корректного расчета весовой матрицы получать существенно лучшую точность по сравнению с МНК.
3. Применение ОФИ является перспективным также в интересах повышения точности определения высоких орбит спутников, на движение которых существенное влияние оказывают гравитационные возмущения (например, спутники системы ГЛОНАСС). Эффективность применения этой методики по сравнению с МНК зависит от точности модели гравитационного потенциала и точности измерений. Для внедрения методики необходимо учитывать статистические характеристики гравитационных возмущений в процессе уточнения и прогнозирования орбит.

4.4. Методика настройки параметров шумов

Выше, в разд. 4.3, были кратко рассмотрены оценки максимального правдоподобия (4.17). Для произвольного момента времени t_j они имеют вид

$$\hat{x}_j = \left(X_j^T P_j X_j \right)^{-1} X_j^T P_j Z_k. \quad (4.18)$$

Оценки (4.18) основаны на максимизации функции правдоподобия, которая выражается следующим образом:

$$L(Z_k | x_j) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} [Z_k - X_j x_j]^T P_j [Z_k - X_j x_j] \right\}. \quad (4.19)$$

Здесь применены обозначения:

$$Z_k = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_k \end{Bmatrix}$$

— вектор-столбец измерений, связанных с вектором состояния в момент t_j соотношением

$$z_i = h_i x_i + v_i, \quad i = 1, \dots, k;$$

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_k \end{pmatrix};$$

истинные значения вектора состояния в моменты времени t_i и t_j связаны соотношением

$$x_i = U(t_i, t_j)x_j + \int_{t_j}^{t_i} U(t_i, \xi)B(\xi)q(\xi)d\xi, \quad (4.20)$$

которое выражает решение дифференциального уравнения (1.1);

$$U_j = \begin{pmatrix} U(t_1, t_j) \\ U(t_2, t_j) \\ \dots \\ U(t_k, t_j) \end{pmatrix}, \quad X_j = HU_j;$$

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{pmatrix}$$

— корреляционная матрица погрешностей измерений;

$(HK_{wj}H^T + R_\Sigma) = P_j^{-1}$ — корреляционная матрица суммарных погрешностей, учитывающая влияние случайных возмущений (шума системы) на вектор состояния в момент времени t_j ;

$$K_{wj} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(j)} & Q_{12}^{(j)} & \dots & Q_{1k}^{(j)} \\ Q_{21}^{(j)} & Q_{22}^{(j)} & \dots & Q_{2k}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1}^{(j)} & Q_{k2}^{(j)} & \dots & Q_{kk}^{(j)} \end{pmatrix} = \{Q_{il}^{(j)}\}, \quad i, l = 1, \dots, k$$

— корреляционная матрица, учитывающая «чистое» влияние случайных возмущений на вектор состояния в момент времени t_j ;

$$Q_{ii}^{(j)} = \int_{t_j}^{t_i} \int_{t_j}^{t_i} U(t_i, \xi)B(\xi)K_q(\xi, \eta)_0 B^T(\eta)U^T(t_i, \eta)d\eta d\xi.$$

Оценка (4.18) доставляет максимум функции правдоподобия (4.19). При этом достигается минимум аргумента экспоненты

$$\Phi(x_j) = [Z_k - X_j x_j]^T (HK_{wj} H^T + R_\Sigma)^{-1} [Z_k - X_j x_j]. \quad (4.21)$$

В процессе отыскания оценок максимального правдоподобия эта величина является минимизируемым критерием. Данный критерий обладает замечательным свойством (Линник, 1962; Кендалл, Стьюард, 1966). А именно, *если матрица $(HK_{wj} H^T + R_\Sigma)$ правильно выражает статистические характеристики погрешностей, т. е. если выполняется условие*

$$M \left\{ [Z_k - X_j x_j] [Z_k - X_j x_j]^T \right\} = (HK_{wj} H^T + R_\Sigma), \quad (4.22)$$

то значение квадратичной формы (4.21) является случайной величиной, распределенной по закону χ^2 с числом степеней свободы, равным общему числу измерений (k). Оценка (4.18), полученная при минимизации критерия (4.21), отличается от истинного значения вектора состояния. Учет этого обстоятельства приводит к утверждению, что значение критерия $\Phi(\hat{x}_j)$ распределено по закону χ^2 с числом степеней свободы, равным общему числу измерений минус число уточняемых параметров (m). Поэтому среднее значение критерия в точке достижения минимума равно

$$M \left[\Phi(\hat{x}_j) \right] = k - m. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) является необходимым условием правильности исходных статистических характеристик погрешностей (шумов). Поэтому данное условие полезно использовать не только для контроля правильности исходных статистических характеристик, но и для их адаптивного уточнения (коррекции).

Естественно, что уточнение характеристик шумов на основе выражения (4.23) возможно только при наличии достаточно большой статистики, т. е. при выполнении большого числа уточнений параметров орбиты в стационарных условиях. Решение данной задачи является весьма сложной проблемой, связанной с необходимостью обработки большого числа измерений и с проведением автоматизированного анализа результатов уточнения параметров орбиты. Ниже на достаточно простых примерах показана возможность решения данной проблемы.

В качестве *первого примера* рассмотрим возможность определения СКО погрешностей так называемых двухрядных элементов орбит (TLE), которые регулярно определяются Американской системой контроля космического пространства и являются доступными в Интернете (<http://www.space-track.org>). Выбраны данные по спутникам «Космос-2251» (международный номер 93036A, номер в каталоге США 22675) и «Иридиум-33» (международный номер 97051C, номер в каталоге США 24946), которые столкнулись 10 февраля 2009 г. в 16 ч 56 мин. Некоторые результаты анализа орбитальных данных по этим спутникам были рассмотрены в разд. 4.2.

Использовались элементы орбиты в форме TLE за период с 01.01 по 14.02.2009 г. Общие данные о характеристиках этих элементов приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4. Данные о TLE

	Интервал	Число TLE	Высота, км	Наклонение, град
«Иридиум-33»	01.01–09.02	81	800	74,0
«Космос-2251»	01.01–09.02	62	800	86,4

В табл. 4.5. приведен фрагмент массива TLE спутника «Космос-2251» (начало и конец) на рассматриваемом интервале времени.

Таблица 4.5. Исходные TLE по спутнику «Космос-2251»

№ п/п	Исходные TLE
1	1 22675U 93036A 09001.77226482 -.00000017 00000-0 33537-5 0 7107 2 22675 074.0367 089.9971 0016969 179.3358 180.7818 14.31133166811878
2	1 22675U 93036A 09002.75090360 +.00000004 +00000-0 +11215-4 0 07125 2 22675 074.0368 088.2151 0016950 177.3512 182.7741 14.31133409812015
3	1 22675U 93036A 09003.17032001.00000007 00000-0 12588-4 0 7116 2 22675 074.0368 087.4515 0016938 176.4896 183.6378 14.31133470812071
...
61	1 22675U 93036A 09039.51970769 -.00000003 +00000-0 +87983-5 0 07417 2 22675 074.0356 021.2473 0016045 100.8058 259.4899 14.31135543817277
62	1 22675U 93036A 09040.49834364 -.00000001 00000-0 95251-5 0 7411 2 22675 074.0355 019.4646 0016027 098.7014 261.5952 14.31135643817415

С помощью американской аналитической модели движения SGP4 (*Hoots, Roehrich, 1980*) эти элементы орбиты были пересчитаны в

компоненты вектора состояния в геоцентрической инерциальной системе координат на тот же момент времени. В табл. 4.6 приведен фрагмент массива результатов пересчета.

Таблица 4.6. Компоненты вектора состояния спутника «Космос-2251»

	№ п/п			
	1	2	3	4
Время, сут	18628.77226482	18629.75090341	18630.17031998	...
x , км	0.3634661	223.6634792	319.2947266	...
y , км	7180.8488842	7177.3373141	7173.7001789	...
z , км	0.058e-4	0.000e-4	0.757e-4	...
V_x , км/с	-2.0465759756	-2.0458291162	-2.0449191708	...
V_y , км/с	-0.0075300990	0.0556778824	0.0827486245	...
V_z , км/с	7.1591578565	7.1591880224	7.1592067032	...

Начальные условия для прогнозирования движения уточнялись с помощью метода наименьших квадратов по семи последовательным измерениям вектора состояния. Последовательно (со сдвигом на 1 измерение) выполнялась обработка данных всех исходных измерений. По результатам уточнения орбита прогнозировалась на 4 «будущих» измерения и рассчитывались соответствующие разности. В этих условиях было выполнено $62 - 7 - 4 = 51$ уточнение параметров орбиты. Описание применяемой программы приведено в прил. Г. Ее характерной особенностью является пересчет исходных орбитальных данных (измерений) в подвижную орбитальную систему координат (см. рис. 3.1), т. е. в отклонения измеренного шестимерного вектора состояния от опорной траектории по радиусу (S), трансверсали (T) и бинормали (W):

$$\begin{aligned}
 \Delta z_{j1} &= \Delta R_{Sji}, \\
 \Delta z_{j2} &= \Delta R_{Tji}, \\
 \Delta z_{j3} &= \Delta R_{Wji}, \\
 \Delta z_{j4} &= \Delta V_{Tji}, \\
 \Delta z_{j5} &= \Delta V_{Sji}, \\
 \Delta z_{j6} &= \Delta V_{Wji}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь $j = 1, \dots, 51$ — номер уточнения; $i = 1, \dots, 7$ — номер измерения на мерном интервале.

Другой особенностью программы является пренебрежение влиянием шумов системы при расчете корреляционной матрицы (4.22). Данная мера оказалась приемлемой потому, что здесь рассматривается возможность оценки статистических характеристик погрешностей измерений, а также потому что в рассматриваемых условиях погрешности исходных измерений больше влияния шумов системы на мерном интервале. Это означает, что в матрице (4.24) учитывалось только слагаемое R_{Σ} . Компоненты этой диагональной матрицы имеют вид

$$R_i = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_6 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Каждая из разностей (4.24) использовалась для вычисления отношения квадрата разности к априорной дисперсии ошибок измерений:

$$f_{jik} = \frac{\Delta z_{jik}^2}{\sigma_k^2} = p_k \Delta z_{jik}^2, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (4.26)$$

При выполнении условия $M\left(\Delta z_{jik}^2\right) = \sigma_k^2$ отношения (4.26) являются случайными величинами, распределенными по закону χ^2 со степенью свободы 1. При расчете минимизируемого критерия оценки (4.26) суммировались для каждого из уточнений ($7 \times 6 = 42$ слагаемых). Кроме того, оценки (4.26) суммировались для каждого из компонентов исходных шестимерных измерений ($7 \times 51 = 357$ слагаемых). Общее число оценок вида (4.26) на всем интервале обработки измерений равно $42 \times 51 = 2142$.

Значения весов p_k подбирались таким образом, чтобы в результате минимизации критерия (4.21) сумма $S_k = \sum_{j=1}^{51} \sum_{i=1}^7 f_{jik}$ мало отличалась от теоретического значения ее математического ожидания ($357 - 51 = 306$). Это означает, что должны выполняться условия $S_k/306 \approx 1,0$ и $S_k/357 \approx 1,0$. На рис. 4.15–4.17 представлены все зна-

чения отношения (4.26) для невязок по радиусу, трансверсали и бинормали. На рис. 4.18 представлены соответствующие гистограммы значений этих отношений для невязок по радиусу, трансверсали и бинормали.

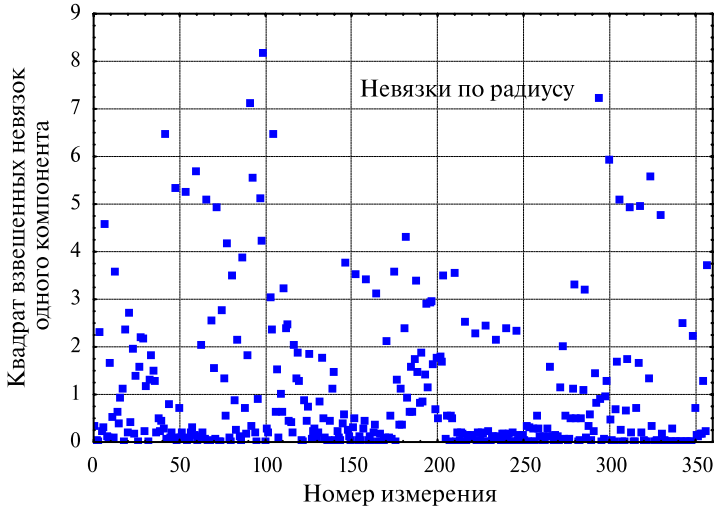


Рис. 4.15. Отношения (4.26) для невязок по радиусу



Рис. 4.16. Отношения (4.26) для невязок по трансверсали

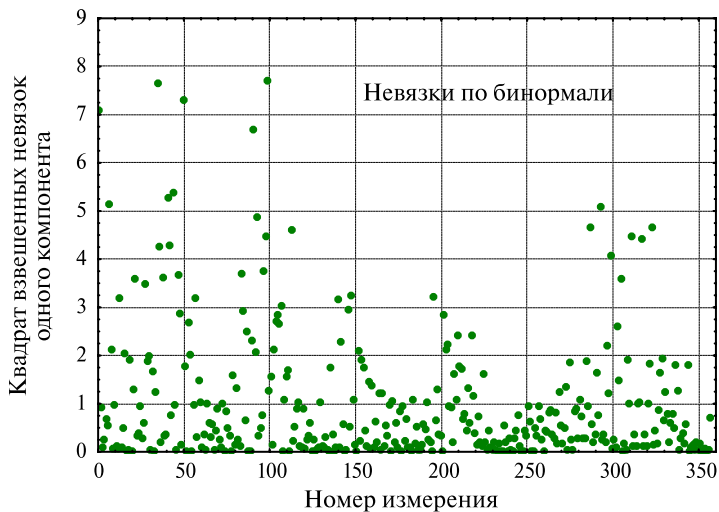


Рис. 4.17. Отношения (4.26) для невязок по бинормали

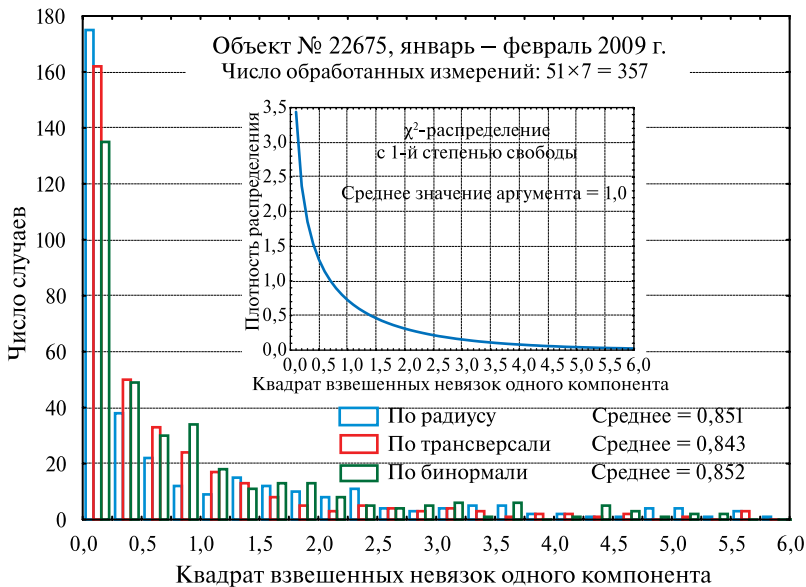


Рис. 4.18. Гистограммы отношений (4.26) для невязок в координатах



Рис. 4.19. Гистограммы отношений (4.26) для невязок по скорости

Аналогичные гистограммы для составляющих невязок по скорости представлены на рис. 4.19.

Из представленных данных видно, что в результате адаптации достигнуто достаточно хорошее согласие с теоретическим распределением случайных значений отношения (4.26). Средние значения отношения (4.26) для каждой из трех рассмотренных невязок в координатах соответственно составили 0,851; 0,853 и 0,852. Соответствующие средние значения отношения (4.26) для невязок по скорости составили 0,867; 0,842 и 0,847.

В табл. 4.7 представлены значения весов p_k и соответствующие им СКО погрешностей измерений, при которых получены изложенные выше результаты адаптации.

Для контроля результатов адаптации по каждому из уточнений

вычислялись также значения суммы $S_j = \sum_{k=1}^6 \sum_{i=1}^7 f_{jik}$. Число такого

рода оценок равно 51. Они распределены по закону χ^2 со степенью свободы, равной $6 \times (7 - 1) = 36$. На рис. 4.20 представлены соответствующая гистограмма, а также ее сравнение с теоретическим распределением.

Таблица 4.7. «Космос-2251». Полученные значения весов p_k и СКО

	По координатам (км)			По скорости (км/с)		
	радиус	трансверсаль	бинормаль	радиус	трансверсаль	бинормаль
p_k	2230	150	1100	1.34e+8	2.00+9	1.60e+9
СКО	0,021	0,082	0,030	0,86e-4	0,22e-4	0,25e-4

Из данных рис. 4.20 видно, что реальное и теоретическое распределения суммы согласуются приемлемым образом. Среднее значение суммы составило 35,8. Отношение $35,8/36 = 0,994$, т. е. на 0,6 % отличается от 1,0.

По результатам обработки данных измерений рассчитывались также корреляционные матрицы погрешностей вектора состояния на

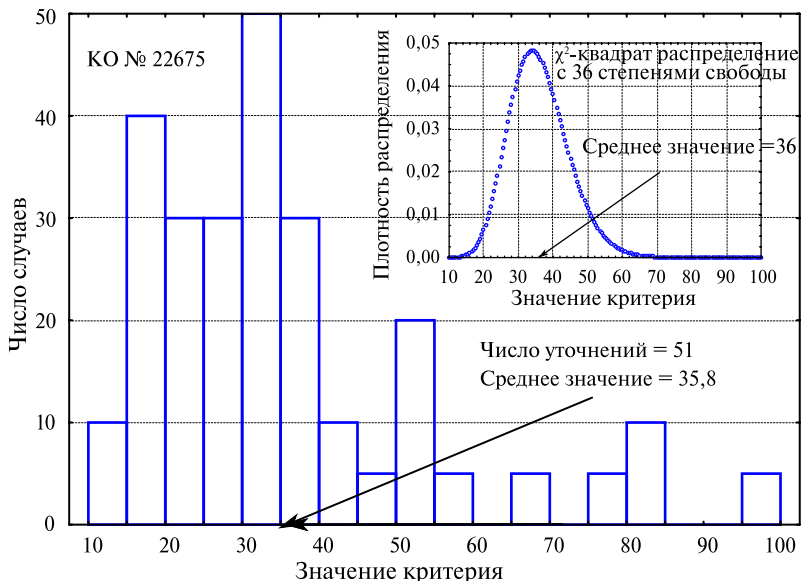


Рис. 4.20. Гистограмма значений суммы S_j

момент уточнения (момент времени первого измерения) и их прогнозные значения. Пример корреляционной матрицы для одного из уточнений на мерном интервале, равном 53 виткам, представлен в табл. 4.8.

Таблица 4.8. Пример корреляционной матрицы погрешностей

2,654E-5	1,099E-6	0,0	0,143E-9	-2,761E-8	0,0
1,099E-6	1,981E-3	0,0	-1,212E-6	1,177E-9	0,0
0,0	0,0	1,103E-4	0,0	0,0	0,0
-1,143E-9	-1,212E-6	0,0	2,189E-9	-1,224E-12	0,0
-2,761E-8	1,177E-9	0,0	-1,224E-12	2,873E-11	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,559E-11

Соответствующие СКО погрешностей компонентов вектора состояния представлены в табл. 4.9.

Таблица 4.9. Значения СКО по данным корреляционной матрицы на момент уточнения

По координатам (км)			По скорости (км/с)		
радиус	трансверсаль	бинормаль	радиус	трансверсаль	бинормаль
0,005	0,044	0,012	0,47e-4	0,54e-5	0,87e-5

Сравнение этих результатов с соответствующими данными об СКО погрешностей измерений (табл. 4.7) показывает, что в результате уточнения погрешности вектора состояния уменьшились в несколько раз.

Как упоминалось выше, по результатам обработки данных измерений выполнялись прогнозы вектора состояния на «будущие» 4 измерения и вычислялись разности измеренных и всех расчетных оценок вектора состояния (и на интервале обработки, и вне этого интервала). Сделан 51 такой прогноз. По полученным разностям вычислялись соответствующие СКО. Результаты этих вычислений для спутника «Космос-2251» представлены на рис. 4.21. Здесь СКО разностей по трансверсали пересчитаны в СКО разностей по времени (путем деления оценок на значение скорости КА).

При анализе данных рис. 4.21 следует иметь в виду, что дисперсия разности оценок равна сумме дисперсий каждого из слагаемых.

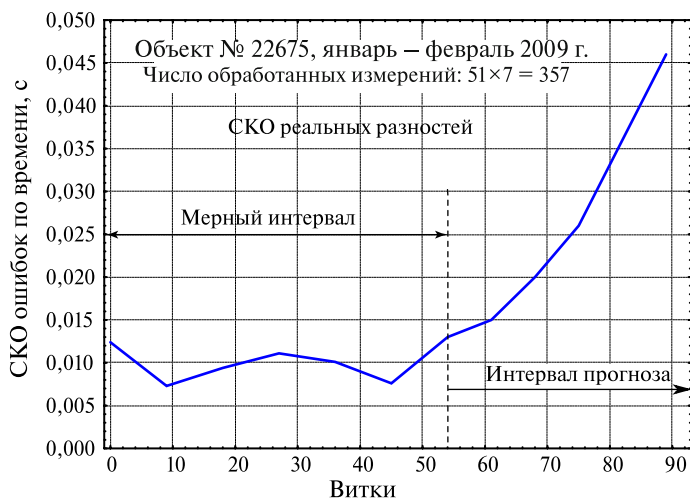
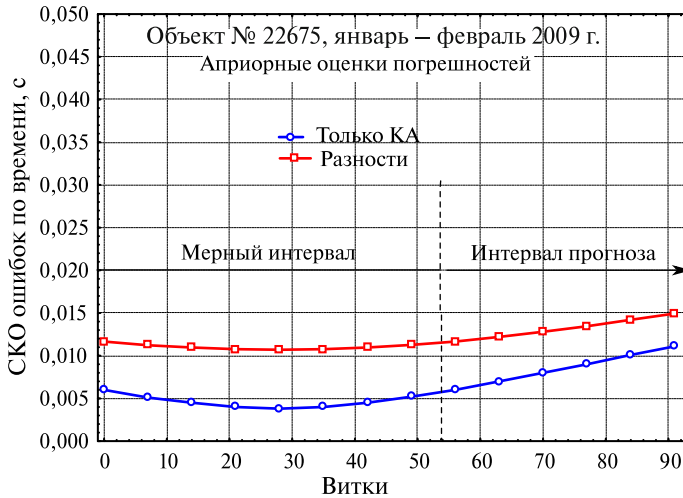


Рис. 4.21. СКО невязок по времени между измеренными и расчетными значениями вектора состояния

Поэтому в соответствии с данными табл. 4.7 и 4.9 СКО невязок по трансверсали $\sqrt{(0,082)^2 + (0,044)^2} = 0,093$ км. Этому значению соответствует погрешность по времени, равная $0,093/7,44 = 0,0125$ с. Эта оценка совпадает с данными рис. 4.21 для моментов времени первого и последнего измерения. Характер изменения СКО невязок, представленных на рис. 4.21, является вполне ожидаемым. Внутри мерного интервала СКО невязок меньше, чем по его краям, а вне мерного интервала погрешности монотонно растут.

Были вычислены также СКО погрешностей вектора состояния в разные моменты времени на основе прогнозирования корреляционной матрицы (без учета влияния случайных возмущений). Эти результаты представлены на рис. 4.22 (кривая «Только КА»). На нем приведены СКО соответствующих разностей, рассчитанные на основе априорных оценок СКО с учетом дисперсии погрешностей измерений по трансверсали $(0,044)^2$.

Сравнение данных этого рисунка на мерном интервале с соответствующими результатами, представленными на рис. 4.21, свидетельствует об их хорошем совпадении. Вне мерного интервала СКО реальных погрешностей *больше* соответствующих априорных



Рису. 4.22. Априорные СКО погрешностей по времени, а также невязок между измеренными и расчетными значениями вектора состояния

оценок. Их разница *растет по мере увеличения интервала прогнозирования*.

Было выполнено также адаптивное уточнение СКО погрешностей TLE по данным о спутнике «Иридиум-33». Результаты определения весовых коэффициентов и соответствующих СКО представлены в табл. 4.10.

Таблица 4.10. «Иридиум-33». Полученные значения весов и СКО

	По координатам (км)			По скорости (км/с)		
	радиус	трансверсаль	бинормаль	радиус	трансверсаль	бинормаль
p_k	841	51	200	0,51e+8	7,8e+8	7,8e+8
СКО	0,034	0,140	0,071	1,40e-4	0,357e-4	0,357e-4

Для спутника «Иридиум-33» СКО погрешностей исходных TLE оказались в 1,4...2,3 раза больше, чем для спутника «Космос-2251». Возможное объяснение этого результата состоит в том, что до столкновения спутник «Иридиум-33» был управляемым. В остальном основные результаты исследований по этому спутнику согласуются с соответствующими результатами по спутнику «Космос-2251».

Таким образом, в результате рассмотрения *первого примера* показана возможность определения дисперсии погрешностей измерений на основе анализа компонентов минимизируемого критерия по методу наименьших квадратов. Однако при этом не гарантируется соответствие СКО реальных и априорных погрешностей прогнозирования, которое зависит от корректности учета случайных возмущений. Обеспечение соответствия этих погрешностей является более сложной задачей, так как в реальных условиях имеется несколько источников случайных возмущений (погрешности моделей атмосферы и гравитационного поля) и уровень этих случайных возмущений является относительно невысоким.

В качестве *второго примера* рассмотрим возможность уточнения уровня случайных возмущений. Используется упрощенная модель движения КО, учитывающая только временные параметры орбиты. Такого рода модель успешно применялась при проведении ряда исследований (Анисимов и др. 1975; Назаренко, Скребушевский, 1981; Nazarenko, 1991, 2007, 2009; Nazarenko, Cherniavskiy, 1996) для оценки влияния возмущений на временные параметры орбиты (погрешности вдоль траектории). При этом подходе в вектор состояния включают только элементы орбиты, характеризующие движение в плоскости околокруговой орбиты. Следуя этому подходу, рассмотрено движение спутника в плоскости орбиты с номером витка в качестве аргумента. Компонентами вектора состояния являются следующие три параметра: время пересечения экватора t_i , период обращения спутника T_i и изменение периода под действием возмущений за виток ΔT_i . Эволюция этих параметров описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + T_{i+1}, \\ T_{i+1} &= T_i + \Delta T_i, \\ \Delta T_i &= \Delta T_m + q_i. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В приведенных выше ссылках параметр ΔT_i связывается с влиянием атмосферных возмущений. Однако в общем случае его происхождение может быть разным. Величина ΔT_m — это среднее значение параметра ΔT_i , а q_i — Гауссов случайный процесс с известной корреляционной функцией $K_q(t, \tau)_0$. В качестве измерений используются значения времени пересечения экватора в начале витка N_j :

$$z_j = t_j + v_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.28)$$

где погрешности измерений v_j (типа дискретного белого шума) распределены по нормальному закону с нулевым математическим

ожиданием и дисперсией σ_z^2 . Интервал времени между измерениями принимается постоянным и равным ΔN (в витках).

Уравнения (2.27), измерения (2.28) и статистические характеристики случайных величин q_j и v_j позволяют определить статистические характеристики погрешностей определения и прогнозирования временных параметров. В качестве метода определения параметров орбиты используется модификация метода максимального правдоподобия (4.18), учитывающая влияние возмущений в виде цветного шума (Kaula, 1959). В процессе исследований используется следующая автокорреляционная функция случайного процесса q_j :

$$K_q(t, \tau)_0 = \begin{cases} \sigma_q^2 \left(1 - \frac{|t - \tau|}{\Delta} \right) & \text{при } |t - \tau| < \Delta, \\ 0 & \text{при } |t - \tau| \geq \Delta. \end{cases} \quad (4.29)$$

Затем, на основе результатов моделирования случайной последовательности q_j , некоторых начальных условий $t_0, T_0, \Delta T_m$ и уравнений (2.27), рассчитывается последовательность значений вектора состояния $x_i^T = \|t_i, T_i, \Delta T_u\|$ (с шагом один виток). Следующей операцией моделирования является расчет последовательности модельных значений измерений z_i по формуле (2.28). При этом случайные ошибки измерений определяются с помощью датчика случайных чисел.

На рис. 4.23 представлена схема последовательных расчетов при обработке данных измерений (2.28) в процессе моделирования. Показаны два временных интервала определения и прогнозирования параметров орбиты: текущий (для j_d -го уточнения) и последующий, построенный путем сдвига всех данных на dN витков. Здесь

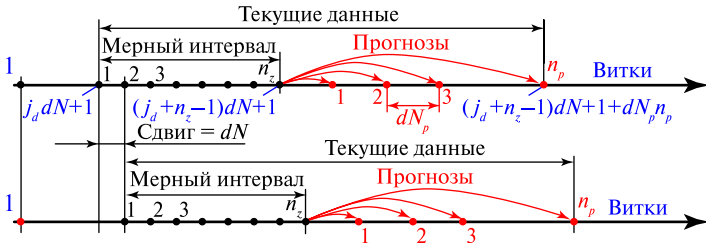


Рис. 4.23. Схема последовательной обработки данных измерений

применены следующие обозначения: n_z — число измерений, используемое при уточнении; n_p — число прогнозов; dN_p — интервал времени (в витках) между последовательными прогнозами. Максимальный интервал прогноза составляет $dN_p n_p$ витков. Проведение уточнений и прогнозов по данной схеме их циклической организации позволяет получить достаточно большое количество реализаций за приемлемое время. При анализе результатов моделирования удобно пользоваться отношением

$$S_n = \frac{\sigma_q}{\sigma_z}, \quad (4.30)$$

которое можно трактовать как отношение «сигнал/шум», т. е. уровень оцениваемого сигнала по отношению к ошибкам измерений.

Характерной особенностью применения рассматриваемого метода уточнения параметров является поведение остаточных невязок ($z_i - h_i \hat{x}_i$) на мерном интервале. Их изменение сильно отличается от данных рис. 4.21 и 4.22. Один из примеров представлен на рис. 4.24. Видно, что и сами невязки, и их СКО сильно меняются (на несколько порядков), достигая минимума в конце мерного интервала. Этот эффект связан с влиянием шума системы, в результате учета которого старым измерениям присваивается меньший вес.

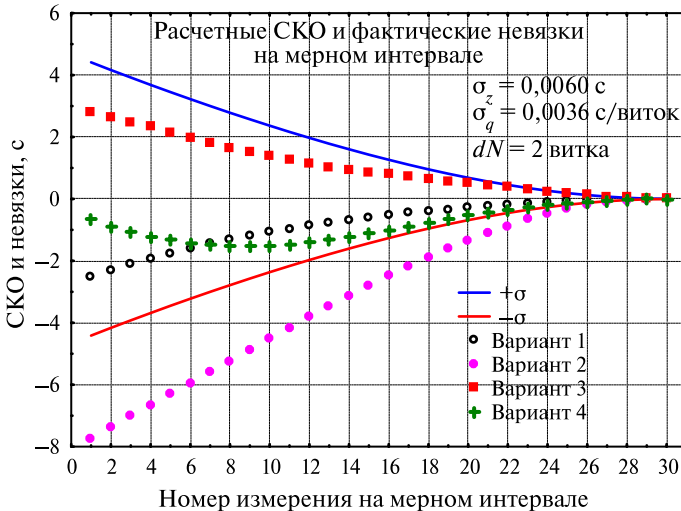


Рис. 4.24. Изменение остаточных невязок на мерном интервале

При использовании данного метода появляется возможность увеличения мерного интервала по сравнению с применением МНК. Тем не менее, изложенное выше свойство (4.23) минимизируемого критерия остается справедливым. Это положение иллюстрируют данные рис. 4.25, на котором представлена гистограмма значений квадратичной формы (4.21) при использовании на мерном интервале 30 измерений. Общее число уточнений на модели составляло 10 000. Представленное распределение приближается к нормальному со средним значением 27,39 и СКО, равным 9,48.

Расчеты на рассматриваемой модели позволяют оценить влияние различий фактических и расчетных СКО (погрешностей измерений и шума системы). Ниже рассмотрены результаты расчетов для двух вариантов исходных данных. Параметры этих вариантов представлены в табл. 4.11.

Таблица 4.11. Параметры вариантов

№ варианта	СКО измерений σ_z , с	СКО шума σ_q , с/виток	Отношение «сигнал/шум» S_n	Значение критерия (4.23), $n_z = 20$
1	0,006	0,00036	0,06	18,11
2	0,0006	0,00036	0,6	17,70

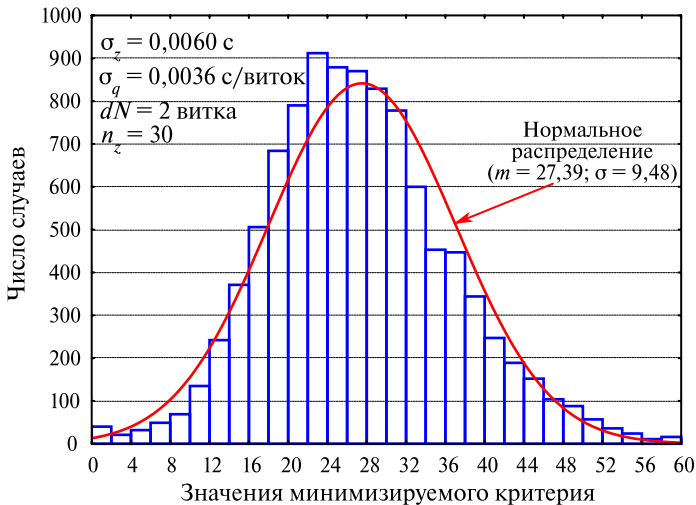


Рис. 4.25. Распределение минимизируемого критерия при $n_z = 30$

Расчеты были проведены для двух значений числа измерений на мерном интервале $n_z = 5$ и $n_z = 20$. Применение малого мерного интервала ($n_z = 5$) позволяет уменьшить влияние шума системы на значение критерия и на этой основе найти приближенное значение СКО ошибок измерений. Другие параметры алгоритма для этих вариантов принимались одинаковыми:

интервал между измерениями $dN = 2$ витка;

интервал корреляции шума $\Delta = 30$ витков.

В варианте 1 оценки σ и σ_q приняты близкими к соответствующим значениям временных погрешностей при использовании TLE (см. выше). В варианте 2 СКО ошибок измерений уменьшены на порядок.

Расчетные значения параметров σ и σ_q варьировались по отношению к приведенным в таблице номинальным значениям, а именно уменьшались и увеличивались в несколько раз. Соответствующие значения корректирующего коэффициента приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12. Значения корректирующего коэффициента $k(j)$

Номер j	1	2	3	4	5
$k(j)$	1/10	1/3	1	3	10

Для каждой из 25 комбинаций расчетных значений параметров σ_z и σ_q на модели производился расчет среднего значения минимизируемого критерия (4.21). Соответствующие результаты расчетов для вариантов 1 (при $n_z = 5$ и $n_z = 20$) и 2 представлены на рис. 4.26–4.28.

Данные рис. 4.26 подтверждают возможность определения СКО погрешностей измерений σ_z при малой величине мерного интервала и при относительно невысоком уровне шума системы, который в данном случае оказывает малое влияние на среднее значение минимизируемого критерия. Значение параметра σ_q в этих условиях определить невозможно.

Рассмотрим пример. Оценивание величины σ_z производилось на модели при случайно выбранном значении $\sigma_q = 0,00012$ с/виток, которое в 3 раза меньше приведенного в табл. 4.11 номинального значения. На рис. 4.28 приведено сечение представленной на рис. 4.26 функции при выбранном фиксированном значении

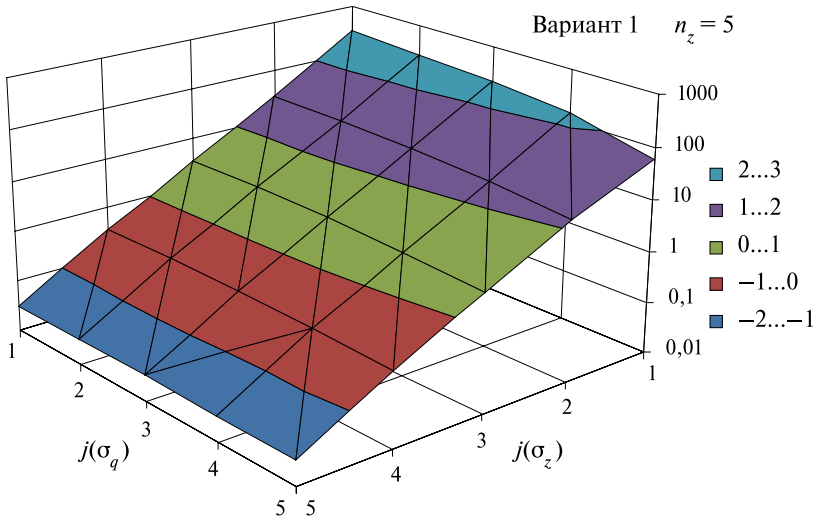


Рис. 4.26. Значения критерия при различных СКО. Вариант 1, $n_z = 5$

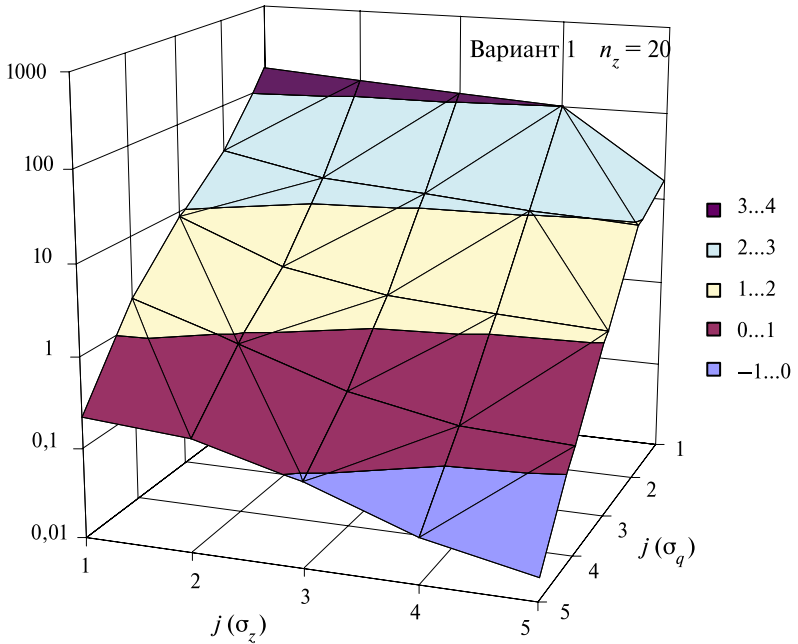


Рис. 4.27. Значения критерия при различных СКО. Вариант 1, $n_z = 20$

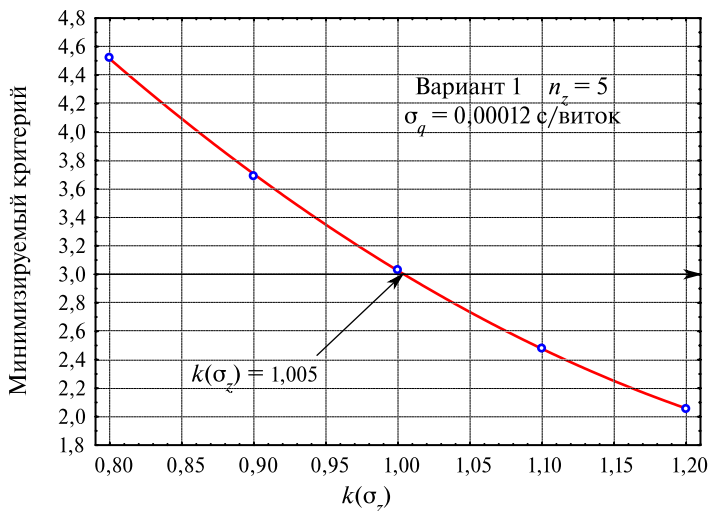


Рис. 4.28. Сечение функции рис. 4.22

$\sigma_q = 0,00012$ с/виток. Видно, что теоретическое значение критерия достигается при расчетном значении $\sigma_z = 1,005 \times 0,006$ с. В данном примере погрешность определения параметра σ_z составила доли процентов.

Для определения параметра σ_q использовался мерный интервал из 20 измерений (рис. 4.27). Зависимость минимизируемого критерия от параметра σ_q при найденном значении параметра $\sigma_z = 1,005 \times 0,006$ с представлена на рис. 4.29. Здесь рассмотрен более узкий интервал отклонений от номинального значения параметра σ_q ($1 \pm 0,2$). Видно, что в данном случае существенный вклад вносят случайные отклонения от монотонной закономерности, что связано с недостаточным числом реализаций для получения точных усредненных оценок. Поэтому применено сглаживание средних значений минимизируемого критерия. Теоретическое значение критерия достигается при расчетном значении σ_q , близком к номинальному ($k(\sigma_q) \approx 0,96$).

Таким образом, определение статистических характеристик погрешностей измерений и шума системы возможно на основе последовательного анализа результатов уточнения параметров орбиты при малом и большом значениях мерного интервала.

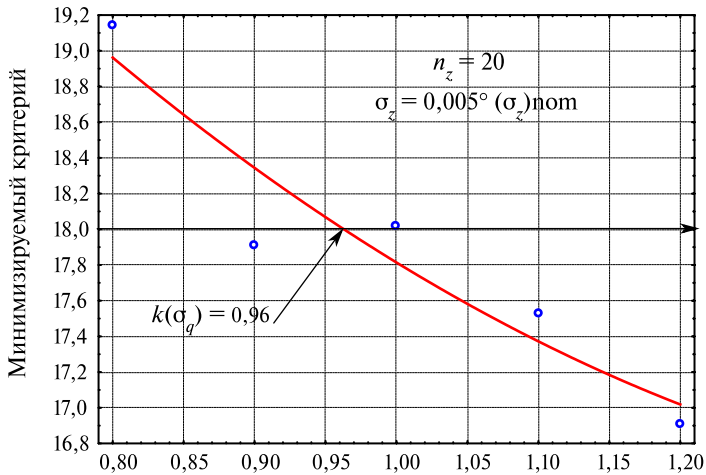


Рис. 4.29. Сечение функции рис. 4.23

Рассмотренный выше пример определения параметров σ_z и σ_q относится к условиям, когда значение отношения «сигнал/шум» $S_n = \sigma_q/\sigma_z = 0,06$ было относительно небольшим (вариант 1). Это позволило определить с приемлемой точностью значение параметра σ_z при обработке данных измерений на малом мерном интервале.

Рассмотрен также случай существенно большего отношения «сигнал/шум» (вариант 2, $\sigma_z = 0,0006$ с). На рис. 4.30 представлена зависимость минимизируемого критерия от расчетных значений параметров σ_z и σ_q при $n_z = 20$. Видно, что в этом случае, по сравнению с данными рис. 4.27, влияние вариаций параметра σ_q проявляется существенно более сильно.

Для определения параметра σ_z применялся мерный интервал, состоящий из 5 измерений, при случайно выбранном значении $\sigma_q = 0,00012$ с/виток (как в рассмотренном выше примере). Зависимость критерия от варьируемых значений параметра σ_z представлена на рис. 4.31. Его форма — такая же, как у рис. 4.27.

Видно, что теоретическое значение критерия достигается при расчетном значении $\sigma_z = 1,005 \times 0,006$ с. В данном примере погрешность определения параметра σ_z составила $\sim 1,5\%$. Определение параметра σ_q по данным рис. 4.26 трудностей не вызывает, так как

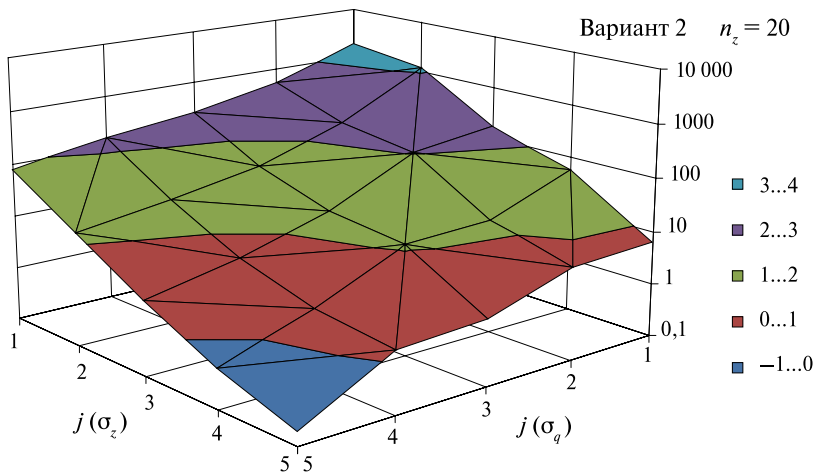


Рис. 4.30. Значения критерия при вариациях расчетных СКО. Вариант 2

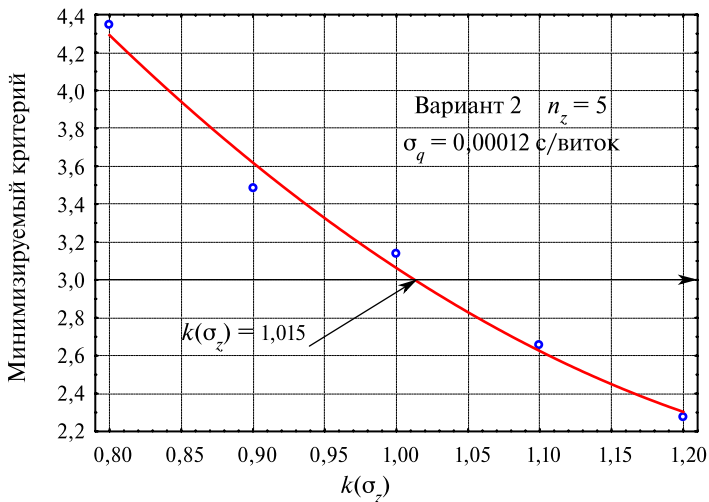


Рис. 4.31. Вариант 2. Сечение зависимости критерия от σ_z при $\sigma_q = 0,00012$ с/виток

величина критерия существенно изменяется при вариациях параметра σ_q . Таким образом, и при увеличении отношения «сигнал/шум» возможно определение параметров σ_z и σ_q на основе последо-

вательного анализа результатов уточнения параметров орбиты при малом и большом значениях мерного интервала.

В заключение раздела рассмотрим данные об СКО фактических временных погрешностей на момент последнего измерения. Они определялись на модели для каждого из вариантов и для каждого сочетания расчетных значений параметров σ_z и σ_q при $n_z = 20$. Соответствующие результаты представлены в табл. 4.13 и 4.14.

Таблица 4.13. СКО погрешностей при расчетах по варианту 1 (с)

Значения $k(j)$ для σ_z	Значения корректирующего коэффициента $k(j)$ при варьировании σ_q				
	1/10	1/3	1	3	10
1/10	0,00452	0,00479	0,00529	0,00565	0,00603
1/3	0,00608	0,00480	0,00495	0,00511	0,00574
1	0,01334	0,00588	0,00449	0,00469	0,00531
3	0,02466	0,01354	0,00530	0,00439	0,00477
10	0,03116	0,02795	0,01381	0,00570	0,00452

Таблица 4.14. СКО погрешностей при расчетах по варианту 2 (с)

Значения $k(j)$ для σ_z	Значения корректирующего коэффициента $k(j)$ при варьировании σ_q				
	1/10	1/3	1	3	10
1/10	0,00055	0,00057	0,00059	0,00060	0,00059
1/3	0,00067	0,00056	0,00057	0,00059	0,00060
1	0,00153	0,00066	0,00056	0,00057	0,00059
3	0,00439	0,00141	0,00066	0,00055	0,00058
10	0,01374	0,00434	0,00148	0,00069	0,00054

Из представленных в таблицах данных видно, что минимальные погрешности достигаются при отношении «сигнал/шум» ($S_n = \sigma_q/\sigma_z$), соответствующих номинальному значению этого отношения $S_n = 0,6$. Они выделены жирным шрифтом. При уменьшении этого отношения (левый нижний угол таблиц) погрешности существенно увеличиваются (в несколько раз). При увеличении отношения «сигнал/шум» (правый верхний угол) погрешности также увеличиваются, но незначительно. Данный результат вполне ожидаем: при совпадении реальных и расчетных СКО источников ошибок результаты уточнения являются оптимальными по точности.

4.5. Выводы

1. В современных моделях гравитационного поля Земли СКО погрешностей определения коэффициентов (σ_n) не меньше значения $\sim 10^{-9}$. Для этого значения СКО оптимальному числу учитываемых гармоник соответствует степень $n^* = 95$. Однако на практике в алгоритмах прогнозирования движения спутников учитывается меньшее число гармоник. На основе опыта применения той или иной модели движения спутников пользователь устанавливает максимальное число членов разложения гравитационного потенциала, которые учитываются в правых частях уравнений движения в алгоритме прогнозирования. Этот опыт, а также данные рис. 2.6 и 4.1 рекомендуется использовать для выбора соответствующего значения параметра σ_n .
2. 10 февраля 2009 г. в 16 ч 56 мин произошло столкновение спутников «Иридиум-33» и «Космос-2251». Данные об их столкновении предоставляют уникальную возможность для точной оценки погрешностей прогнозирования. В результате анализа доступных орбитальных данных показано, что при прогнозировании корреляционных матриц в качестве первого приближения можно использовать значение параметра $\sigma_n = 10^{-9}$. В дальнейшем, при учете методики получения начальных условий и их точности, значение этого параметра может быть уточнено.
3. Выполнен анализ влияния гравитационных возмущений на точность определения и прогнозирования орбит спутников типа GPS. В результате анализа «чистого» влияния погрешностей расчетных параметров гравитационного поля установлено:
 - зависимость СКО погрешностей прогноза от времени имеет вековую и периодическую составляющие; при интервалах прогноза до 1 сут периодическая составляющая примерно в 4...8 раз больше вековой составляющей;
 - вековая составляющая имеет линейный характер и увеличивается на 5 и на 0,5 см за 1 сут соответственно для двух рассмотренных вариантов значений параметра $\sigma_n = 10^{-9}$ и $\sigma_n = 10^{-8}$.

Эти оценки погрешностей не учитывают влияния погрешностей начальных условий (НУ), которые сами зависят от многих факто-

ров: методики получения НУ по измерениям, точности измерений, числа учитываемых членов разложения гравитационного потенциала и др.

При анализе погрешностей прогноза с учетом погрешностей НУ на модели рассмотрено применение метода наименьших квадратов (МНК) и модификации метода максимального правдоподобия (ММП), которое в данном случае характерно учетом шумов модели движения. На основе представленных результатов сделаны следующие выводы.

- Разница между результатами применения МНК и ММП (без учета и с учетом гравитационных шумов при взвешивании измерений) растет по мере увеличения отношения «сигнал/шум», т. е. уровня гравитационных шумов по сравнению с погрешностями измерений. Если при отношении «сигнал/шум», равном 0,4, результаты практически совпадают, то при отношении 10 применение ММП с учетом гравитационных шумов обеспечивает трехкратное повышение точности.
- Полученные оценки погрешностей прогнозирования достаточно хорошо согласуются с данными о «чистом» влиянии гравитационных возмущений. Это согласие проявляется тем лучше, чем больше отношение «сигнал/шум».
- Применение методики уточнения и прогноза параметров орбит навигационных спутников с учетом гравитационных шумов является перспективным направлением дальнейших работ.

Сравнение данных статьи Д. Валладо (*Vallado, 2007*), содержащей оценки точности прогнозирования вектора состояния двух спутников типа GPS, с изложенными выше результатами исследований показало, что между полученными оценками погрешностей прогнозирования нет существенных противоречий.

4. Рассмотрена методика настройки параметров шумов. Она основана на использовании минимизируемого критерия упомянутой выше модификации ММП. А именно, используется свойство, что в точке достижения минимума значение критерия является случайной величиной, распределенной по закону χ^2 с числом степеней свободы, равным общему числу измерений минус число

уточняемых параметров. При этом среднее значение критерия в точке достижения минимума равно общему числу измерений минус число уточняемых параметров.

На конкретном примере показано, что при небольшом отношении «сигнал/шум» уточнение СКО погрешностей измерений возможно на основе применения МНК при небольшом мерном интервале. С использованием этого способа определены погрешности так называемых «двухрядных элементов орбит» (TLE) столкнувшихся спутников «Иридиум-33» и «Космос-2251».

Для определения СКО погрешностей измерений и шума системы в более общем случае используются результаты применения ММП. Определение СКО выполняется в два этапа. На первом этапе применение малого мерного интервала позволяет уменьшить влияние шума системы на значение критерия и на этой основе найти приближенное значение СКО ошибок измерений. На втором этапе применение большого мерного интервала позволяет определить СКО шума системы. Эффективность этого способа определения СКО источников погрешностей подтверждена большим количеством экспериментов на имитационной модели.

Таким образом, определение статистических характеристик погрешностей измерений и шума системы возможно на основе последовательного анализа результатов уточнения параметров орбиты с помощью ММП при малом и большом значениях мерного интервала.

5. В приложениях Г и Д приведены тексты компьютерных программ, которые применялись при анализе точности TLE и при определении СКО погрешностей измерений и шума системы на имитационной модели.

Заключение

Характерной особенностью подхода к решению рассматриваемой в монографии проблемы является то, что не учтенные в модели движения гравитационные возмущающие ускорения принимаются стационарным гауссовым цветным шумом. Методические вопросы, связанные с построением статистических характеристик этих возмущений и их применением для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния спутников, подробно рассмотрены в разд. 2 и 3.

Изложенный в монографии подход отличается от традиционного. Обычно прикладные баллистические спутниковые задачи решаются на основе применения метода наименьших квадратов (МНК), в котором весовая матрица не учитывает влияние случайных возмущений. Поэтому корреляционная матрица погрешностей МНК-оценок не позволяет получить достоверные данные о погрешностях прогнозирования движения.

В разд. 1 показано, что при прогнозировании движения спутника возникает взаимная корреляция погрешностей вектора состояния и значений шума в разные моменты времени. Поэтому для обеспечения корректного прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния необходимо учитывать эту взаимную корреляцию. Выполнение прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей без учета матриц взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и шума приводит к неправильным результатам.

Из материалов разд. 1 и 4 следует важная прикладная рекомендация, что для корректного определения статистических характеристик погрешностей прогнозирования движения спутников необходимо перейти от применения МНК к модификации метода

максимального правдоподобия (ММП), в котором весовая матрица учитывает влияние случайных возмущений. Эффект применения этого метода заключается не только в получении более достоверных оценок погрешностей, но и в повышении точности определения и прогнозирования орбит. Последнее обстоятельство актуально для решения целого ряда прикладных задач.

В реальных условиях наряду с гравитационными возмущениями на спутник действуют и возмущения другого происхождения, в частности атмосферные. В разд. 4 отмечалось, что в последние годы была выполнена значительная работа по определению вариаций плотности атмосферы и их учету при прогнозировании. В результате достигнуты существенные успехи в развитии моделей движения и в изучении случайных погрешностей прогнозирования движения КО, вызванных флуктуациями атмосферного торможения. Подробное изложение соответствующих методических вопросов и результатов исследований выходит за рамки рассматриваемой в монографии проблемы. Тем не менее, материалы разд. 1 и 4 применимы не только к гравитационным возмущениям, но и к возмущениям другого происхождения.

В предисловии отмечалось, что разработка методики для получения априорных статистических характеристик погрешностей прогнозирования движения спутников, пригодных для разнообразных типов орбит, является одной из новых задач космической баллистики. Получение достоверных статистических оценок погрешностей актуально для решения многих прикладных задач, связанных с запуском КА таких, например, как:

- выбор запаса топлива, необходимого для поддержания заданных параметров орбиты;
- управление полетом спутника в процессе его эксплуатации;
- корректное использование функциональной спутниковой информации, которая вырабатывается в процессе эксплуатации КА;
- предсказание времени и места падения КА;
- оценка вероятности столкновений КА с другими объектами и принятие мер по предотвращению столкновений.

Достоверная оценка погрешностей прогнозирования является актуальной и в интересах контроля за полетом большого числа не-

активных объектов — так называемого космического мусора. Слежение за спутниками ведут системы контроля космического пространства, которые занимаются каталогизацией всех объектов в ОКП. В связи с большим числом объектов космического мусора очень трудной задачей является надежное отождествление получаемых измерений с объектами каталога и обнаружение новых объектов. Достоверная оценка погрешностей прогнозирования здесь играет решающую роль.

В связи с ростом техногенного загрязнения околоземного космического пространства повысилась вероятность столкновений КА с более мелкими объектами, которые пока не поддаются каталогизации. Остро стоит проблема уменьшения нижней границы размеров каталогизированных объектов. Решение этой проблемы на основе привлечения дополнительных измерительных средств связано не только с необходимостью обеспечения достоверности статистических оценок погрешностей прогнозирования, но и с необходимостью повышения точности определения и прогнозирования орбит.

Усовершенствование прикладных компьютерных программ, в которых оценка точности прогнозирования спутников играет важную роль, является достаточно сложной проблемой. Наряду с преодолением объективных организационных трудностей необходимо иметь в виду и субъективный фактор. Как правило, специалисты ориентированы на применение традиционного подхода; к новшествам они относятся скептически. Тем не менее, по мнению автора, объективная реальность заключается в том, что альтернативы изложенному в монографии подходу не существует. Рано или поздно он займет свое достойное место в прикладных программах. Автор надеется, что описанные в приложениях компьютерные программы облегчат внедрение изложенных в монографии алгоритмов в практику прикладных баллистических расчетов.

Литература

- Аким Э.Л., Энеев Т.М.* (1963) Определение параметров движения космических аппаратов по траекторным измерениям // Космич. исслед. 1963. Т. 1. № 5.
- Анисимов В.Д.* и др. (1975) Прогнозирование и определение орбит искусственных спутников Земли с учетом вариаций атмосферного торможения // Определение движения космических аппаратов. М.: Наука, 1975.
- Демин В.Г.* (1968) Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
- Дубошин Г.Н.* (1968) Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.
- Жонголович И.Д.* (1952) Внешнее гравитационное поле Земли и связанные с ним фундаментальные постоянные // Тр. Ин-та теоретич. астрономии. Вып. 3. 1952.
- Кендалл М., Стьюарт А.* (1966) Теория распределений. М.: Физматгиз, 1966.
- Линник Ю.В.* (1962) Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки измерений. М.: Физматгиз, 1962.
- Маделунг Э.* (1960) Математический аппарат физики. М. Физматгиз, 1960.
- Мудров В.И., Кушко В.Л.* (1976) Методы обработки измерений. М.: Сов. радио, 1976.
- Назаренко А.И.* (1968) О целесообразности учета новых уточняющих факторов в математическом описании некоторых систем // Анализ и синтез систем автоматического управления. М.: Наука, 1968. С. 334–337.
- Назаренко А.И., Маркова Л.Г.* (1973) Методы определения и прогнозирования орбит ИСЗ при наличии погрешностей в математическом описании движения // Прикладные задачи космической баллистики. М.: Наука, 1973. С. 36–67.
- Назаренко А.И., Скребушевский Б.С.* (1981) Эволюция и устойчивость спутниковых систем. М.: Машиностроение, 1981. 284 с.
- Рогозин В.П., Зуева А.Н.* (2007) Совершенствование геодезического обеспечения космической навигационной системы «ГЛОНАСС» // Рос. научно-технич. конф. «Спутниковые навигационные системы и их роль в жизни современного человека». НПО ПМ Железногорск, окт. 2007.
- Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. Т. 2. М.; Л.: ОНТИ НКТП, 1937.
- Эльясберг П.Е.* (1976) Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.

- 1973 Smithsonian Standard Earth III / Ed. E.M. Gaposkin. Cambridge SAO, 1973.
- Gersten R.H., Gore R.C., Hall N.S.* (1967) Statistical Properties of Orbit Perturbations Induced by the Earth's Anomalous Gravity // *J. Spacecraft*. 1967. V. 4. Sep. P. 1150.
- Hoots F.R., Roehrich R.L.* (1980) Model for Propagation of NORAD Element Sets. Spacetrack Report N. 3. U.S. Air Force: Aerospace Defense Command, 1980.
- Kalman R.E.* (1963) New Methods in Wiener Filtering Theory // *Proc. 1st Symp. Engineering Applications of Random Function Theory and Probability* / Ed. J.L. Bogdanoff, F. Kozin. N. Y.: John Wiley & Sons, 1963.
- Kaula W.M.* (1959) Statistical and Harmonic Analysis of Gravity // *J. Geophysical Research*. 1959. V. 64. Dec. P. 2411–2418.
- Kaula W.M.* (1966) Theory of Satellite Geodesy. Blaisdell Pub, Mass., 1966.
- Khutorovskiy Z.N.* et al. (2009) Analysis of the Iridium 33 – Cosmos 2251 Collision Prediction Using Information of Russian Space Surveillance System // 27th IADC. Darmstadt, 2009.
- Lemoine F.G.* et al. (1998) The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96. NASA Goddard Space Flight Center. NASA/TP-1998-206861. July 1998.
- Marsh J.G.* et al. (1990) The GEM-T2 Gravitational Model // *J. Geophysical Research*. 1990. V. 95. N. B13.
- Nazarenko A.I.* (1991) Apriori and a Posteriori Orbit Prediction Errors Evaluations of Low Artificial Earth Satellite // *Kosmicheskie Issledovaniya*. 1991. V. 29. N. 4.
- Nazarenko A.I.* (1991) Determination and Prediction of Satellite Motion at the End of the Lifetime // *Intern. Workshop on Salyut-7/Kosmos-1686 Reentry*, ESOC, Darmstadt (G), 9 April 1991.
- Nazarenko A.I.* (1998) Determination and Prediction of Orbits with Due Account of Disturbances as a “Color” Noise // *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*. Monterey, CA. Feb. 1998. AAS 98-191.
- Nazarenko A.I.* (2007) Accuracy of Determination and Prediction Orbits in LEO. Estimation Errors Depending on Accuracy and Amount of Measurements // 7th US/Russian Space Surveillance Workshop. Monterey. Oct.–Nov. 2007.
- Nazarenko A.I.* (2009) Increasing the Accuracy of Orbit Forecasting on the Basis of Improvement of Statistical Methods for Processing Measurements // 5th European Conf. Space Debris. Darmstadt. 30 Mar. – 02 Apr. 2009.
- Nazarenko A.I., Alfriend K.T.* (2009) Development of the technique for covariance prediction using the gravity color noise // *Space Flight Mechanics Meeting held in Savannah, GA. Feb. 8–12, 2009. AAS-09-230*.
- Nazarenko A.I., Cherniavskiy G.M.* (1996) Evaluation of the Accuracy of Forecast Satellite Motion in the Atmosphere // 2nd US/Russian Space Surveillance Workshop. Poznan, Poland. 4–6 July 1996. P. 6–17.
- Nazarenko A.I., Yurasov V.S., Alfriend K.T., Cefola P.J.* (2007a) Optimal Measurement Filtering and Motion Prediction Taking Into Account the Atmospheric Perturbations // *AAS/AIAA Conf.*, Mackinac. Aug. 2007. AAS 07-363.
- Nazarenko A.I., Yurasov V.S., Alfriend K.T., Cefola P.J.* (2007b) Optimal measurement filtering and motion prediction taking into account the atmospheric

- perturbations // 7th US/Russian Space Surveillance Workshop. Oct. 8–12, 2007. Naval Postgraduate School, Monterey, California.
- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K.* (2008) An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly 2008. Vienna, Austria, April 13–18. 2008.
- Tapley et al.* (1994) The JGM-3 Gravity Model // *Annales Geophys.* 1994. V. 12. Suppl. C192.
- Vallado D.A.* (2004) *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Published jointly by Microcosm Press and Kluwer Academic Publishers, 2004. 966 p.
- Vallado D.A.* (2007) An Analysis of State Vector Prediction Accuracy // 7th US/Russian Space Surveillance Workshop. Monterey. Oct.–Nov. 2007.
- Wright J.R.* (1981) Sequential Orbit Determination with Auto-Correlated Gravity Modeling Errors // *AIAA. J. Guidance and Control.* 1981. V. 4. N. 2. May–June 1981. P. 304.
- Wright J.R. et al.* (2008a) Orbit Gravity Error Covariance // 18th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. Galveston, Texas, Jan. 2008. Paper AAS 08-157.
- Wright J.R. et al.* (2008b) Orbit Covariance Inner Integrals with Polynomials // 18th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. Galveston, Texas, Jan. 2008. Paper AAS 08-161.
- Yurasov V.S., Nazarenko A.I., Cefola P.J., Alfriend K.T.* (2004) Results and Issues of Atmospheric Density Correction // 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conf. Maui, Hawaii. Feb. 2004. AAS 04-305. Published in the *J. Astronautical Society*. 2004. V. 52. N. 3. July–Sept.
- Yurasov V.S., Nazarenko A.I., Cefola P.J., Alfriend K.T.* (2005a) Density Corrections for the NRLMSIS-00 Atmosphere Model // AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conf. Copper Mountain, Co. Jan. 23–27, 2005. AAS 05-168.
- Yurasov V.S., Nazarenko A.I., Alfriend K.T., Cefola P.J.* (2005b) Reentry Time Prediction Using Atmospheric Density Corrections // 4th European Conf. on Space Debris. Darmstadt, Germany. Apr. 2005.
- Yurasov V.S., Nazarenko A.I., Cefola P.J., Alfriend K.T.* (2005c) Application of the ARIMA Model to Analyze and Forecast the Time Series of Density Corrections for NRLMSIS-00 // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf. Lake Tahoe, CA. Aug. 2005. AAS 05-256.
- Yurasov V.S., Nazarenko A.I., Cefola P.J., Alfriend K.T.* (2006) Direct density correction method: Review of results // 57th Intern. Astronautical Congress. Valencia, Spain 2006. Paper IAC-06-C1.5.2.

Приложение А

Обоснование формул (2.42) и (2.43)

А.1. Используемые тождества и обозначения

$$P_{nk}(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n}{dx^k}, \quad (P_n = P_{n0}(x) \text{ — полином Лежандра}). \quad (\text{A.1})$$

$$(1-x^2) \frac{d^{k+1} P_n}{dx^{k+1}} - 2kx \frac{d^k P_n}{dx^k} P_n(x) = -(n+k)(n+1-k) \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \\ (\text{Дубошин, 1968, с. 175}). \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^k \frac{d^k P_n}{dx^k} \right] = -(n+k)(n+1-k) (1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \\ (\text{Дубошин, 1968, с. 175}). \quad (\text{A.2}')$$

$$(1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k+1} P_n}{dx^{k+1}} = 2kx (1-x^2)^{k-2} \frac{d^k P_n}{dx^k} P_n(x) - \\ -(n+k)(n+1-k) (1-x^2)^{k-2} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}}. \quad (\text{A.2}'')$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_{nk}}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] P_{nk} = 0 \\ (\text{Дубошин, 1968, с. 158}). \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] = -n(n+1) P_n, \quad (\text{A.3}')$$

$$I_{nn}^{(k)} = \int_{-1}^1 P_{nk}(x) P_{nk}(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^k \left(\frac{d^k P_n}{dx^k} \right)^2 dx = \frac{2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!} \\ (\text{Дубошин, 1968, с. 176}). \quad (\text{A.4})$$

$$I_{nm}^{(k-1)} = \int_{-1}^1 P_{n,k-1}(x)P_{n,k-1}(x)dx = \frac{2(n+k-1)!}{(2n+1)(n-k+1)!}, \quad (\text{A.4}')$$

$$G_n^{(k)} = \int_{-1}^1 P_{nk}(x)P_{nk}(x) \frac{dx}{1-x^2} = ? \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_{nk}(x)}{dx} \frac{dP_{nk}(x)}{dx} dx = ? \quad (\text{A.6})$$

А.2. Определение интеграла (А.5)

Для определения интеграла (А.5) применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \text{A.5} = G_n^{(k)} &= \int_{-1}^1 P_{nk}(x)P_{nk}(x) \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^k P_n}{dx^k} dx = \\ &= (1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \right] \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Здесь первое слагаемое равно 0 (при $k > 0$). Раскроем квадратную скобку во втором слагаемом. Используя тождество (А.2'), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \right] &= (1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k+1} P_n}{dx^{k+1}} - (k-1) 2x (1-x^2)^{k-2} \frac{d^k P_n}{dx^k} = \\ &= 2x (1-x^2)^{k-2} \frac{d^k P_n}{dx^k} - (n+k)(n+1-k) (1-x^2)^{k-2} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Подстановка (А.8) в (А.7) приводит к выражению

$$\begin{aligned} G_n^{(k)} &= - \int_{-1}^1 2x (1-x^2)^{k-2} \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} dx + \\ &+ (n+k)(n+1-k) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k-2} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} dx = \\ &= \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} (1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} dx + (n+k)(n+1-k) G_n^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Первое слагаемое в (А.9) можно упростить, применяя интегрирование по частям и введя обозначения

$$J_n^{(k)} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \frac{d^{k+1} P_n}{dx^{k+1}} dx, \quad (\text{A.10})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} (1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} dx = (1-x^2)^{k-1} \frac{d^k P_n}{dx^k} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \Big|_{-1}^{-1} - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k-1} \left(\frac{d^k P_n}{dx^k} \right)^2 dx - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \frac{d^{k+1} P_n}{dx^{k+1}} dx = -G_n^{(k)} - J_n^{(k)}. \quad (\text{A.11})$$

Подстановка (A.11) в (A.9) приводит к уравнению

$$G_n^{(k)} = -\frac{1}{k-1} \left(G_n^{(k)} + J_n^{(k)} \right) + (n+k)(n+1-k) G_n^{(k-1)}. \quad (\text{A.12})$$

Его решение относительно искомой оценки:

$$G_n^{(k)} = \frac{k-1}{k} (n+k)(n+1-k) G_n^{(k-1)} - \frac{1}{k} J_n^{(k)}. \quad (\text{A.13})$$

Для получения окончательного результата необходимо определить интеграл (A.10). Применим интегрирование по частям и используем тождество (A.2'):

$$\begin{aligned} J_n^{(k)} &= (1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \frac{d^k P_n}{dx^k} \Big|_{-1}^{-1} - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{k-1} \frac{d^{k-1} P_n}{dx^{k-1}} \right] \frac{d^k P_n}{dx^k} dx = \\ &= (n+k-1)(n+2-k) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{k-2} \frac{d^{k-2} P_n}{dx^{k-2}} \frac{d^k P_n}{dx^k} dx = (n+k-1)(n+2-k) J_n^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Проанализируем значения интегралов $G_n^{(k)}$ и $J_n^{(k)}$ при $k=1$ и их сумму:

$$G_n^{(1)} = \int_{-1}^1 \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 dx, \quad (\text{A.15})$$

$$J_n^{(1)} = \int_{-1}^1 P_n \frac{d^2 P_n}{dx^2} dx, \quad (\text{A.16})$$

$$G_n^{(1)} + J_n^{(1)} = \int_{-1}^1 \left[\frac{dP_n}{dx} \frac{dP_n}{dx} + P_n \frac{d^2 P_n}{dx^2} \right] dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[P_n \frac{dP_n}{dx} \right] dx = P_n \frac{dP_n}{dx} \Big|_{-1}^{-1}. \quad (\text{A.17})$$

Значения функций P_n и $\frac{dP_n}{dx}$ в точках $x=1$ и $x=-1$ известны:

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad \left(\frac{dP_n(x)}{dx} \right)_{x=1} = \frac{1}{2} n(n+1), \\ \left(\frac{dP_n(x)}{dx} \right)_{x=-1} &= -(1)^n \frac{1}{2} n(n+1). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Подстановка значений (А.18) в (А.17) приводит к результату

$$G_n^{(1)} + J_n^{(1)} = n(n+1). \tag{A.19}$$

Выведем формулу для значений интеграла $G_n^{(l)}$ при разных n . Воспользуемся тождеством (2.22):

$$\frac{dP_n}{dx} = x \frac{dP_{n-1}}{dx} + nP_{n-1}. \tag{A.20}$$

После подстановки (А.20) в (А.15) и довольно громоздкого интегрирования по частям получен следующий результат:

$$G_n^{(l)} = 2n + G_{n-1}^{(l)} = n(n+1). \tag{A.21}$$

Справедливость этой формулы легко проверить путем вычисления интегралов (А.15) при малых n . Из (А.19), (А.21) и (А.14) следует важный результат

$$J_n^{(k)} = 0. \tag{A.22}$$

Поэтому формула (А.13) упрощается

$$G_n^{(k)} = \frac{k-1}{k} (n+k)(n+1-k) G_n^{(k-1)}. \tag{A.23}$$

Применим ее для последовательного определения $G_n^{(k)}$ при разных k :

$$\begin{aligned} G_n^{(1)} &= (n+1)n, \\ G_n^{(2)} &= \frac{1}{2} (n+2)(n+1-2) G_n^{(1)}, \\ G_n^{(3)} &= \frac{2}{3} (n+3)(n+1-3) G_n^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ G_n^{(k-1)} &= \frac{k-2}{k-1} (n+k-1)(n+1-k+1) G_n^{(k-2)}. \end{aligned} \tag{A.24}$$

Перемножение этих значений в соответствии с формулой (А.23) приводит к результату:

$$G_n^{(k)} = \frac{1}{k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \tag{A.25}$$

Таким образом, построена формула для определения интеграла (2.42).

А.3. Определение интеграла (А.6)

При определении этого интеграла применим тождество (А.3), обозначения (А.4), (А.5) и интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_{nk}(x)}{dx} \frac{dP_{nk}(x)}{dx} dx = \\
 &= (1-x^2) \frac{dP_{nk}(x)}{dx} P_{nk} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_{nk}(x)}{dx} \right] P_{nk}(x) dx = \\
 &= n(n+1) \int_{-1}^1 P_{nk}(x) P_{nk}(x) dx - k^2 \int_{-1}^1 P_{nk}(x) P_{nk}(x) \frac{dx}{1-x^2} = \\
 &= n(n+1) I_{nn}^{(k)} - k^2 G_n^{(k)}. \tag{A.26}
 \end{aligned}$$

Значения интегралов $I_{nn}^{(k)}$ и $G_n^{(k)}$ приведены выше. Поэтому окончательно мы можем записать:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_{nk}(x)}{dx} \frac{dP_{nk}(x)}{dx} dx = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \left[\frac{2n(n+1)}{2n-1} - k \right]. \tag{A.27}$$

Таким образом, построена формула для определения интеграла (2.43).

Приложение Б

Программа для построения автокорреляционных функций случайных гравитационных возмущений в связанной с Землей системе координат

Б.1. Исходные данные и константы алгоритма

Исходные данные:

h — высота точки { км };

σ_n — СКО погрешностей нормированных коэффициентов (σ_n);

n_{\max} — максимальная степень учитываемых при прогнозировании гармоник.

Константы:

$n_{\max} = 1000$ — максимальная степень гармоник при суммировании;

$\mu = 398600$ — гравитационная постоянная { км³/сек² };

$R_e = 6378$ — экваториальный радиус Земли { км };

$nq = 45$ — число разбиений аргумента функции $k_r(\psi)$ на интервалы;

$dq = \pi/180$ — величина интервала разбиения аргумента ψ { 1° }.

Б.2. Структура программы

В основу вычислений СКО гравитационных возмущений по радиусу (σ_r) и нормированной автокорреляционной функции $k_r(\psi)$ положены формулы (2.63) и (2.64). Значения $\left\{ \delta \bar{c}_{nk}^2 + \delta \bar{a}_{nk}^2 \right\}$ вычисляются по формуле (2.52) с учетом числа учитываемых при прогнозе гармоник (n_{\max}). Оптимальное число учитываемых гармоник рассчитывается по формуле (2.18). Однако эта оценка имеет справочный характер: в дальнейших расчетах она не используется. Полиномы Лежандра $P_{n+1,0}(x)$ вычисляются по рекуррентной формуле (2.21) в цикле по степеням n . Кроме того, в соответствии с форму-

лой (2.65) вычисляется интеграл $\int_0^{\psi_{\max}} k_r(\psi) d\psi$ (при $\psi_{\max} = 45^\circ$).

Исходные данные вводятся пользователем в интерактивном режиме с помощью клавиатуры.

Программа содержит два основных цикла:

- внешний цикл по значениям угла ψ в интервале от 0 до 45° ;
- внутренний цикл по значениям степени полиномов Лежандра n в интервале от 2 до $n_{\text{maximum}}=1000$.

Б.3. Результаты расчета

Результаты расчета записываются в файл «kor_psi.dat». Ниже представлен пример этого файла. Примечания выделены курсивом.

```

CORRELATION FUNCTION of GRAVITY FORCES
sigma n= 1.0E-0009, h= 700 km, nmax= 36 (Исходные данные)
n optimal=94 (Оптимальная степень учитываемых гармоник)
sigma r=0.1012 miligal (СКО гравитационных возмущений  $\sigma_r$ )
psi kq(psi) (Автокорреляционная функция  $k_r(\psi)$ )
  0  1.000
  1  0.920
  2  0.708
  3  0.434
  4  0.183
  5  0.017
  6 -0.038
  7 -0.003
  8  0.075
  9  0.142
 10  0.163
 11  0.127
 12  0.051
 13 -0.034
 14 -0.097
 15 -0.119
 16 -0.097
 17 -0.046
 18  0.012
 19  0.054
 20  0.068
 21  0.053
 22  0.017
 23 -0.024
 24 -0.054
 25 -0.064
 26 -0.052
 27 -0.024

```

```

28  0.007
29  0.031
30  0.040
31  0.033
32  0.015
33 -0.006
34 -0.024
35 -0.031
36 -0.028
37 -0.015
38  0.000
39  0.013
40  0.019
41  0.018
42  0.011
43  0.001
44 -0.007
45 -0.011

```

Spsi=Sum(corr)= 2.94574 degree (*Интеграл (2.65)*)

Б.4. Текст программы

```

Program PRILOG_B; { Calculation sigma(r) }
{ 08.09.2008 }
const
  nmaximum=1000;
  mu=398600; { km^3/sec^2 }
  Re=6378; { km }
  nq=45;
  dq=pi/180; { 1 grad }
type
  vpsi=array[0..nq] of real; { jq }
var
  R_to_r, sigman, Spsi, h, eta, g, r:double;
  kpsi:vpsi;
  Pl1, Pl2, Pl3, psi, cospsi, dn, xn, partn, Sumn, -
  sqrtS, Scor, corr, SS:double;
  nm, n, jq, nmax:integer;
  fal:text;
{-----}
Procedure Legandr(P1, P2, x:double; nx:integer);
Begin
  Pl3:=((2*nx-1)*x*P2-(nx-1)*P1)/nx;
End;
{-----}
BEGIN
assign(fal, 'kor_psi.dat');
rewrite(fal);

```

```
writeln(' ');
writeln(fal,' ');
writeln('CORRELATION FUNCTION of GRAVITY FORCES');
writeln(fal,'CORRELATION FUNCTION of GRAVITY FORCES');
writeln(' ');
writeln(fal,' ');

writeln('Input altitude h, km'); { Ввод исходных данных }
readln(h);
r:=Re+h;
R_to_r:=Re/r;
writeln('Input sigma n value');
readln(sigman);
writeln('Input maximal degree of harmonix taking into
account');
readln(nmax);

writeln('sigma n=',sigman:10,', h=',h:5:0,' km',',',
nmax=',nmax:3);
writeln(fal,'sigma n=',sigman:10,', h=',h:5:0,' km',',',
nmax=',nmax:3);

nm:=trunc(0.003/sqrt(sigman)); { n optimal }
writeln(' ');
writeln('n optimal=',nm:4);
writeln(fal,' ');
writeln(fal,'n optimal=',nm:4);
{-----}
dn:=R to r*R to r; { (Re/r)^2 }
g:=(mu/r/r)*10000000; { milygal }

{*****}
Sumn:=0;
FOR jq:=0 to nq do begin { 1-й цикл jq psi} psi:=dq*jq;
cospsi:=cos(psi);
Pl1:=1.5*cospsi*cospsi-0.5;
Pl2:=2.5*cospsi*cospsi-1.5*cospsi;
Scor:=0;
xn:=dn;
for n:=2 to nmaximum do begin { 2-й цикл n }
if n=2 then Pl3:=Pl1;
if n=3 then Pl3:=Pl2;
if n>3 then Legendr(Pl1,Pl2,cospsi,n); { Обращение к
процедуре }

xn:=dn*xn;
if n<=nmax then eta:=2*sigman*sigman { eta }
else eta:=sqr(1.2e-5/n/n);
partn:=xn*(n+1)*(n+1)*(n+0.5);
if jq=0 then begin
Sumn:=Sumn+partn*eta;
end;
Scor:=Scor+partn*eta*Pl3;
```

```
P11:=P12;
P12:=P13;
  end; { 2-й цикл n }
sqrtS:=sqrt(Sumn)*g;

corr:=Scor/Sumn;
kpsi[jq]:=corr;
if jq=0 then SS:=0.5*corr {SS=sum(corr)}
  else begin
if jq<nq then SS:=SS+corr
  else SS:=SS+0.5*corr;
  end;
  end; { 1-й цикл jq psi }
Spsi:=SS;
{*****}
writeln(' '); { Вывод результатов }
writeln(' sigma r=',sqrtS:7:4,' miligal');
writeln(fal,' ');
writeln(fal,' sigma r=',sqrtS:7:4,' miligal');
writeln(fal,' ');

writeln(fal,'psi',' kq(psi)');
for jq:=0 to nq do begin
write(fal,jq:3);
writeln(fal,kpsi[jq]:7:3);
end;

writeln(' ');
writeln(' Spsi=Sum(corr)=' ,Spsi:9:5,' degree');
writeln(fal,' ');
writeln(fal,' Spsi=Sum(corr)=' ,Spsi:9:5,' degree');

close(fal);
END.
```

Приложение В

Программа для прогнозирования корреляционной матрицы погрешностей вектора состояния с учетом «чистого» влияния гравитационных возмущений

В.1. Исходные данные и константы алгоритма

Исходные данные:

h — высота орбиты { км };

σ_n — СКМО погрешностей нормированных коэффициентов (σ_n);

n_{\max} — максимальная степень учитываемых при прогнозировании гармоник;

i — наклонение орбиты { градусы };

N_{rev} — интервал прогнозирования { витки }

Константы:

$n_{\text{maximum}}=1000$ — максимальная степень гармоник при суммировании;

$\mu=398600$ — гравитационная постоянная { км³/сек² };

$R_e=6378$ — экваториальный радиус Земли { км };

$n_q=45$ — число разбиений аргумента функции $k_r(\psi)$ на интервалы;

$dq=\pi/180$ — величина интервала разбиения аргумента ψ { 1° }.

$\text{rev}_{\max}=100$ — ограничение на величину интервала прогноза { витки }.

В.2. Структура программы

В основу вычислений положены формулы (3.24), (3.25) и (3.43). Тем самым при прогнозе корреляционных матриц реализуется учет «чистого» влияния случайных гравитационных возмущений: без учета погрешностей начальных условий и матрицы взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и шума системы в начальный момент времени $K_{xq}(t_0, \tau)$.

Исходные данные вводятся пользователем в интерактивном режиме с помощью клавиатуры.

Программа содержит 8 вспомогательных процедур, которые перечислены в таблице.

Вспомогательные процедуры

№ п/п	Название	Назначение	Выходные данные
1	Legandr	Вычисление полиномов Лежандра по рекуррентной формуле (2.21) в цикле по степеням n	$P_{n,0}(x)$
2	K_psi	Построение автокорреляционной функции случайных гравитационных возмущений в связанной с Землей системе координат (как в приложении Б)	σ_r и $k_r(\psi)$
3	G_matrix	Вычисление произведения матриц $U(u, u_0)$ (6×6) и $B(u)$ (6×3)	$G(u)$
4	C_matrix	Вычисление произведения $G(u_j) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} G^T(u_k)$	C
5	ulu2	Вычисление значений аргументов широты в точках пересечения следов орбиты	$u_{1a}, u_{2a}, u_{1b}, u_{2b}$
6	Massif_jk	Вычисление массивов значений широты и долготы точек орбиты на разных витках	mas_j, mas_k
7	I_general	Вычисление двойных интегралов по общей формуле (3.23)	I_0, I_{j-k}
8	Kx_0	Вычисление отдельных слагаемых суммы (3.24)	K_{xj} , (6×6)

Программа содержит два последовательных цикла по значениям интервалов прогнозирования в интервале от 1 до N_{rev} :

- 1) прогнозирование с учетом только матрицы I_0 , т. е. по области значений аргументов широты u_1 и u_2 , относящихся к одному и тому же витку; результирующие матрицы обозначены как K_{x0} .
- 2) прогнозирование с учетом только матриц I_{j-k} , т. е. по области значений аргументов широты u_1 и u_2 , относящихся к разным виткам; результирующие матрицы обозначены как K_{xk} .

Суммарная корреляционная матрица вычисляется как сумма $K_{xs} = K_{x0} + K_{xk}$. Рассчитываются также значения СКО погрешностей прогнозирования всех компонентов вектора состояния.

В.3. Результаты расчета

Результаты расчета записываются в файл «Kx_matr.dat». Ниже представлен пример этого файла. Примечания выделены курсивом.

CORRELATION MATRIX OF PREDICTION ERRORS

sigma n= 1.0E-0009, h= 700 km, nmax= 36 (Исходные данные)

n optimal= 94 (Оптимальная степень учитываемых гармоник)

Prediction i= 76.0 Interval= 15 rev (Исходные данные)

{ SKO погрешностей элементов орбиты, соответствующие матрице $K_{x0}(j)$.
Все значения умножены на 10^6 . Размерности: рад, км, рад, рад, безразмерная,
безразмерная }

sig0[j.jc], j=1...Nrev, jc=1...6

1	0.829	1025.9	0.051	0.053	0.125	0.126
2	2.407	1776.9	0.088	0.092	0.217	0.218
3	4.773	2512.9	0.125	0.130	0.307	0.308
4	7.928	3244.2	0.161	0.168	0.396	0.397
5	11.871	3973.3	0.198	0.205	0.486	0.487
6	16.603	4701.3	0.234	0.243	0.574	0.576
7	22.124	5428.6	0.270	0.280	0.663	0.665
8	28.434	6155.4	0.306	0.318	0.752	0.754
9	35.532	6882.0	0.343	0.355	0.841	0.843
10	43.419	7608.3	0.379	0.393	0.930	0.932
11	52.095	8334.5	0.415	0.430	1.018	1.021
12	61.559	9060.6	0.451	0.468	1.107	1.110
13	71.812	9786.5	0.487	0.505	1.196	1.198
14	82.854	10512.4	0.523	0.543	1.285	1.287
15	94.684	11238.3	0.559	0.580	1.373	1.376

Kx0[jc, jc] { Kкомпоненты матрицы $K_{x0}(N_{rev})$, умноженные на 10^1 }

	8965	-868897	-0.000	-0.337	0.103	0.007
-868897	126298265	0.000	0.000	-15.005	0.000	0.000
-0.000	0.000	0.313	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.337	0.000	0.000	0.337	0.000	0.000	0.000
0.103	-15.005	0.000	0.000	1.886	-0.000	0.000
0.007	-0.000	0.000	0.000	-0.000	1.894	0.000

Kxk[jc, jc] { Kкомпоненты матрицы $K_{xk}(N_{rev})$, умноженные на 10^1 }

	1331.338	-228449	0.013	-0.115	-0.213	0.404
-106873	21344993	0.000	0.000	41.555	-1.467	0.000
-0.0128	0.0000	-0.0495	0.0128	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1146	0.0000	-0.0128	0.1146	0.0000	0.0000	0.0000
-0.3599	41.5554	0.0000	0.0000	0.0180	0.0747	0.0000
0.3802	1.4674	0.0000	0.0000	-0.0747	0.3328	0.0000

{ SKO погрешностей элементов орбиты, соответствующие матрице $K_{xs}(j)$.
Все значения умножены на 10^6 . Размерности: рад, км, рад, рад, безразмерная,
безразмерная }

sigs[j.jc], j=1...Nrev, jc=1...6

2	2.4	1797.3	0.086	0.096	0.217	0.223
3	4.9	2571.1	0.119	0.141	0.307	0.322
4	8.2	3356.1	0.152	0.187	0.399	0.422
5	12.3	4153.7	0.185	0.234	0.490	0.524
6	17.4	4965.6	0.218	0.282	0.583	0.629
7	23.5	5796.5	0.249	0.332	0.675	0.734
8	30.5	6639.3	0.280	0.382	0.768	0.841

9	38.4	7499.6	0.310	0.432	0.858	0.947
10	47.3	8377.3	0.338	0.483	0.947	1.053
11	57.3	9271.3	0.365	0.535	1.035	1.160
12	68.3	10180.3	0.390	0.588	1.123	1.267
13	80.4	11104.0	0.415	0.641	1.210	1.376
14	93.6	12042.5	0.440	0.696	1.298	1.487
15	107.8	12999.5	0.463	0.752	1.386	1.600

Kxs (rev) : { *Компоненты матрицы $K_{xs}(N_{rev})$, умноженные на 10^1* }

11628	-1204220	0.000	-0.566	-0.469	0.790
-1204220	168988252	0.000	0.000	68.106	-0.000
0.000	0.000	0.214	-0.000	0.000	0.000
-0.566	0.000	-0.000	0.566	0.000	0.000
-0.469	68.106	0.000	0.000	1.922	-0.000
0.790	-0.000	0.000	0.000	-0.000	2.559

В.4. Текст программы

```

Program Prilog_C; { Kx=F(Nrev) (6x6) matrix }
                   { 16.05.2009 }

const
  nmaximum=1000;
  mu=398600;      { km^3/sec^2 }
  Re=6378;
  nq=45;
  dq=pi/180;      { 1 grad=0.0174 radian }
  Cg=180/pi;
  revmax=100;

type
  vpsi=array[0..nq] of real;          { jq }
  vGmatr=array[1..6] of array[1..3] of double;
  vCmatr=array[1..6] of array[1..6] of double;
  vfilamb=array[0..360] of array[1..2] of double;
  vsig=array[1..revmax] of array[1..6] of double;

var
  incldeg, sigman, h, r, R_to_r, incl, Spsi, Sum, Tdr, P:double;
  kpsi:vpsi;
  dlamb0, shift, cosi, ula, u2a, ulb, u2b, sigt, D-
  c, uj, uk, Pl3, g, dn:double;
  rev, nmax, Nrev, tt, jm, jc, kc, jt, jk, nm, n, j, jq:integer;
  Gt, Gj, Gk:vGmatr;
  Kx0, Kxk, Kxt, Kxs, Cs, Ct:vCmatr;
  fa2:text;
  masj, mask:vfilamb;
  sig0, sigk, sigs:vsig;
  {-----}

Procedure Legandr(P1, P2, x:double;nx:integer);
Begin
  Pl3:=((2*nx-1)*x*P2-(nx-1)*P1)/nx;
End;
  {-----}

Procedure K_psi;
var

```



```

P11,P12,psi,cospsi,eta,xn,partn,Sumn,sqrtS,Scor,corr,SS:
double;
Begin
Sumn:=0;
FOR jq:=0 to nq do begin           { jq psi }
psi:=dq*jq;
cospsi:=cos(psi);
P11:=1.5*cospsi*cospsi-0.5;
P12:=2.5*cospsi*cospsi-1.5*cospsi;
Scor:=0;
xn:=dn;

for n:=2 to nmaximum do begin     { n }
if n=2 then P13:=P11;
if n=3 then P13:=P12;
if n>3 then Legandr(P11,P12,cospsi,n);
xn:=dn*xn;
if n<=nmax then eta:=2*sigman*sigman { eta }
else eta:=sqr(1.2e-5/n/n);
partn:=xn*(n+1)*(n+1)*(n+0.5);
if jq=0 then begin
Sumn:=Sumn+partn*eta;
sqrtS:=sqrt(Sumn)*g;
end;
Scor:=Scor+partn*eta*P13;
P11:=P12;
P12:=P13;
end;                               { n }

if jq=0 then Sum:=sqrtS;           { !! sqrtS }
corr:=Scor/Sumn;
kpsi[jq]:=corr;
if jq=0 then SS:=0.5*corr         { SS=sum(corr) }
else begin
if jq<nq then SS:=SS+corr
else SS:=SS+0.5*corr;           { SS }
end;
end;                                 { jq psi }

Spsi:=SS;
End;
{-----}
Procedure G_matrix(ut:double);    { ut - radian }
var
u11,u12,u15,u16,sinu,cosu:double;
xx,ctgi,sini,b13,b21,b22,b51,b52,b53,b61,b62,b63:double;
g11,g12,g13,g21,g22,g33,g43,g51,g52,g53,g61,g62,g63:
double;
je,jf:integer;
Begin
for je:=1 to 6 do
for jf:=1 to 3 do
Gt[je,jf]:=0;
sinu:=sin(ut);

```

```

cosu:=cos(ut);
sini:=sin(incl);
ctgi:=cosi/sini;
u11:=1;
u12:=-1.5*ut/r;
u15:=2*sinu;
u16:=2*(cosu-1);
xx:=Tdr/(2*pi*r);           { =sqrt(p/mu) }
b13:=-xx*ctgi*sinu;
b21:=0;
b22:=2*r*xx;
b51:=xx*sinu;
b52:=xx*2*cosu;
b61:=-xx*cosu;
b62:=xx*2*sinu;
Gt[1,1]:=u15*b51+u16*b61;
Gt[1,2]:=u12*b22+u15*b52+u16*b62;
Gt[1,3]:=b13;
Gt[2,1]:=b21;
Gt[2,2]:=b22;
Gt[3,3]:=xx*cosu;           { = b33 }
Gt[4,3]:=xx*sinu/sini;     { = b43 }
Gt[5,1]:=b51;
Gt[5,2]:=b52;
Gt[6,1]:=b61;
Gt[6,2]:=b62;
End;
{-----}
Procedure C_matrix;
var je,jf:integer;
Begin
for je:=1 to 6 do
  for jf:=1 to 6 do
    Ct[je,jf]:=0;
    Ct[1,1]:=Gj[1,1]*Gk[1,1]+0.5*Gj[1,2]*Gk[1,2]+0.5*Gj
[1,3]*Gk[1,3];
    Ct[1,2]:=Gj[1,1]*Gk[2,1]+0.5*Gj[1,2]*Gk[2,2];
    Ct[1,3]:=0.5*Gj[1,3]*Gk[3,3];
    Ct[1,4]:=0.5*Gj[1,3]*Gk[4,3];
    Ct[1,5]:=Gj[1,1]*Gk[5,1]+0.5*Gj[1,2]*Gk[5,2]+0.5*Gj
[1,3]*Gk[5,3];
    Ct[1,6]:=Gj[1,1]*Gk[6,1]+0.5*Gj[1,2]*Gk[6,2]+0.5*Gj
[1,3]*Gk[6,3];
    Ct[2,1]:=Gj[2,1]*Gk[1,1]+0.5*Gj[2,2]*Gk[1,2];
    Ct[2,2]:=Gj[2,1]*Gk[2,1]+0.5*Gj[2,2]*Gk[2,2];
    Ct[2,5]:=Gj[2,1]*Gk[5,1]+0.5*Gj[2,2]*Gk[5,2];
    Ct[2,6]:=Gj[2,1]*Gk[6,1]+0.5*Gj[2,2]*Gk[6,2];
    Ct[3,1]:=0.5*Gj[3,3]*Gk[1,3];
    Ct[3,3]:=0.5*Gj[3,3]*Gk[3,3];
    Ct[3,4]:=0.5*Gj[3,3]*Gk[4,3];
    Ct[3,5]:=0.5*Gj[3,3]*Gk[5,3];
    Ct[3,6]:=0.5*Gj[3,3]*Gk[6,3];
    Ct[4,1]:=0.5*Gj[4,3]*Gk[1,3];

```

```

Ct [4, 3] :=0.5*Gj [4, 3]*Gk [3, 3];
Ct [4, 4] :=0.5*Gj [4, 3]*Gk [4, 3];
Ct [4, 5] :=0.5*Gj [4, 3]*Gk [5, 3];
Ct [4, 6] :=0.5*Gj [4, 3]*Gk [6, 3];
Ct [5, 1] :=Gj [5, 1]*Gk [1, 1]+0.5*Gj [5, 2]*Gk [1, 2]+0.5*Gj
[5, 3]*Gk [1, 3];
Ct [5, 2] :=Gj [5, 1]*Gk [2, 1]+0.5*Gj [5, 2]*Gk [2, 2];
Ct [5, 3] :=0.5*Gj [5, 3]*Gk [3, 3];
Ct [5, 4] :=0.5*Gj [5, 3]*Gk [4, 3];
Ct [5, 5] :=Gj [5, 1]*Gk [5, 1]+0.5*Gj [5, 2]*Gk [5, 2]+0.5*Gj
[5, 3]*Gk [5, 3];
Ct [5, 6] :=Gj [5, 1]*Gk [6, 1]+0.5*Gj [5, 2]*Gk [6, 2]+0.5*Gj
[5, 3]*Gk [6, 3];
Ct [6, 1] :=Gj [6, 1]*Gk [1, 1]+0.5*Gj [6, 2]*Gk [1, 2]+0.5*Gj
[6, 3]*Gk [1, 3];
Ct [6, 2] :=Gj [6, 1]*Gk [2, 1]+0.5*Gj [6, 2]*Gk [2, 2];
Ct [6, 3] :=0.5*Gj [6, 3]*Gk [3, 3];
Ct [6, 4] :=0.5*Gj [6, 3]*Gk [4, 3];
Ct [6, 5] :=Gj [6, 1]*Gk [5, 1]+0.5*Gj [6, 2]*Gk [5, 2]+0.5*Gj
[6, 3]*Gk [5, 3];
Ct [6, 6] :=Gj [6, 1]*Gk [6, 1]+0.5*Gj [6, 2]*Gk [6, 2]+0.5*Gj
[6, 3]*Gk [6, 3];
End;
{-----}
Procedure ulu2 (jj:integer);
var
dlamb, del, sindL2, cosdL2:double;
jit:integer;
Begin
dlamb0:=shift*jj;
dlamb0:=dlamb0-2*pi*trunc (dlamb0/(2*pi));
del:=0;
for jit:=1 to 4 do begin
dlamb:=dlamb0+del;
sindL2:=sin (dlamb/2);
cosdL2:=cos (dlamb/2);
if sindL2=0 then sindL2:=1.0e-6;
ula:=arctan (cosdL2/sindL2/cosi);
if cosdL2/cosi<0 then ula:=ula+pi;
del:=-shift*(ula/pi-0.5);          { 01.06 !!! -del }
end;

u2a:=pi-ula;
u2b:=ula+pi;
u2c:=u2a+pi;
End;
{-----}
Procedure Massif_jk (jkk:integer);
var
dL1, dL2, fil, cosfil, sinfil, cosL1, sinL1, sindL1, cosdL1,
coslam1, sinlam1, lam1, fi2, cosfi2, sinfi2, c-
osL2, sinL2, sindL2, cosdL2,
coslam2, sinlam2, lam2, sini:double;
Begin

```

```

sini:=sin(incl);
for jt:=0 to 360 do begin                                { uj }
  uj:=dq*jt;
  sinfil:=sini*sin(uj);
  cosfil:=sqrt(1-sinfil*sinfil);
  fil:=arctan(sinfil/cosfil);
  dL1:=P*uj;
  sindL1:=sin(dL1);
  cosdL1:=cos(dL1);
  cosL1:=cos(uj)/cosfil;
  sinL1:=sqrt(1-cosL1*cosL1);
  if sinfil<0 then sinL1:=-sinL1;
  sinlam1:=sinL1*cosdL1-cosL1*sindL1;
  coslam1:=cosL1*cosdL1+sinL1*sindL1;
  If coslam1<>0 then begin
    lam1:=arctan(sinlam1/coslam1);
    if coslam1<0 then lam1:=lam1+pi;
    end;
  if lam1<0 then lam1:=lam1+2*pi;
  if (coslam1=0) and (sinlam1>0) then lam1:=pi/2;
  if (coslam1=0) and (sinlam1<0) then lam1:=1.5*pi;
  masj[jt,1]:=fil;
  masj[jt,2]:=lam1;
  end;                                                { uj }

for jt:=0 to 360 do begin                                { uk }
  uj:=dq*jt;
  sinfil:=sini*sin(uj);
  cosfil:=sqrt(1-sinfil*sinfil);
  fil:=arctan(sinfil/cosfil);
  dL1:=P*(2*pi*jkk+uj);
  sindL1:=sin(dL1);
  cosdL1:=cos(dL1);
  cosL1:=cos(uj)/cosfil;
  sinL1:=sqrt(1-cosL1*cosL1);
  if sinfil<0 then sinL1:=-sinL1;
  sinlam1:=sinL1*cosdL1-cosL1*sindL1;
  coslam1:=cosL1*cosdL1+sinL1*sindL1;
if coslam1<>0 then begin
  lam1:=arctan(sinlam1/coslam1);
  if coslam1<0 then lam1:=lam1+pi;
  end;
  if lam1<0 then lam1:=lam1+2*pi;
  if (coslam1=0) and (sinlam1>0) then lam1:=pi/2;
  if (coslam1=0) and (sinlam1<0) then lam1:=1.5*pi;
  mask[jt,1]:=fil;
  mask[jt,2]:=lam1;
  end;                                                { uk }

End;
{-----}
Procedure I_general(kk:integer);
const
  Cq=0.0001;

```

```

var
psi, Kq, cosfi1, sinfi1, cosfi2, sinfi2, cospsi, sinpsi, sini, SS, xx:
double;
j1, j2: integer;
Begin
ulu2(kk);
sini:=sin(incl);
Massif_jk(kk);
for jc:=1 to 6 do
  for kc:=1 to 6 do
    Cs[jc, kc]:=0;
xx:=dlamb0*Cg;
SS:=0;
Dc:=(0.01*Sum)*(Tdr/360); { !! 11.06 *1.0 E+6, km/sec^2}
      { 1 miligal=(1 km/sec^2)*1.0 E+8 }
  { Tdr/360 =time step (sec) related to del u=1 degree }
for jt:=0 to 360 do begin      { jt }
j1:=jt;
cosfi1:=cos(masj[j1,1]);
sinfi1:=sin(masj[j1,1]);
for jk:=0 to 360 do begin      { jk }
j2:=jk;
cosfi2:=cos(mask[j2,1]);
sinfi2:=sin(mask[j2,1]);
cospsi:=cosfi1*cosfi2*cos(mask[j2,2]-masj[j1,2])+
sinfi1*sinfi2;
if cospsi>0 then begin          { cospsi>0 }
if 1-cospsi*cospsi>0 then sinpsi:=sqrt(1-cospsi*
cospsi)
else sinpsi:=0;
if cospsi<>0 then psi:=arctan(sinpsi/cospsi)
else psi:=pi/2;
if psi<0 then psi:=-psi;
jq:=round(psi*Cg);
if jq<nq then xx:=kpsi[jq]
else xx:=0;
end          { cospsi>0 }
else xx:=0;
{ if xx<0 then xx:=0; }      { ?? 28.08.09 }
SS:=SS+xx;

if xx<>0 then begin          { xx<>0 Calculation Ijk }
G_matrix(jt/Cg);
G_j:=Gt;
G_matrix(jk/Cg);
G_k:=Gt;
C_matrix;
for jc:=1 to 6 do
  for kc:=1 to 6 do
    Cs[jc, kc]:=Cs[jc, kc]+Ct[jc, kc]*xx*Dc*Dc; { *(1.0E-
6)^2 }
    xx:=xx;
end;          { xx<>0 Calculation Ijk }

```

```

                                end;          { jk }
                                end;          { jt }
End;
{-----}
Procedure Kx_0(tj,ij,ik:integer);
var
  rev1,rev2:real;
  j1,j2:integer;
Begin
  for j1:=1 to 6 do
    for j2:=1 to 6 do Kxt[j1,j2]:=Cs[j1,j2];
    rev1:=-3*pi*(tj-ij)/r;
    rev2:=-3*pi*(tj-ik)/r;
    Kxt[1,1]:=Cs[1,1]+rev1*Cs[2,1]+rev2*Cs[1,2]+rev1*rev2*
Cs[2,2];
    Kxt[1,2]:=Cs[1,2]+rev1*Cs[2,2];
    Kxt[1,3]:=Cs[1,3]+rev1*Cs[2,3];
    Kxt[1,4]:=Cs[1,4]+rev1*Cs[2,4];
    Kxt[1,5]:=Cs[1,5]+rev1*Cs[2,5];
    Kxt[1,6]:=Cs[1,6]+rev1*Cs[2,6];
    Kxt[2,1]:=Cs[2,1]+rev2*Cs[2,2];
    Kxt[3,1]:=Cs[3,1]+rev2*Cs[3,2];
    Kxt[4,1]:=Cs[4,1]+rev2*Cs[4,2];
    Kxt[5,1]:=Cs[5,1]+rev2*Cs[5,2];
    Kxt[6,1]:=Cs[6,1]+rev2*Cs[6,2];
  End;
{-----}
BEGIN
assign(fa2,'Kx_matr.dat');          { Ввод данных }
rewrite(fa2);
writeln('Input altitude h, km');
readln(h);
r:=Re+h;
R_to_r:=Re/r;
writeln('Input sigma n value');
readln(sigman);
WriteLn('Input maximal degree of harmonix taking into
account');
readln(nmax);
writeln('sigma n=',sigman:10,', h=',h:5:0,' km',',',
nmax=',nmax:3);
writeln(fa2,'sigma n=',sigman:10,', h=',h:5:0,' km',',',
nmax=',nmax:3);
writeln('Input inclination value, degree');
readln(incldeg);          { Inclination }
writeln('Input prediction interval, revolutions');
{ rev=15; }
          { Prediction interval }
readln(rev);
dn:=R to r*R to r;          { (Re/r)^2 }
g:=(mu/r/r)*100000000;          { mily gal }
cosi:=cos(incl);
Tdr:=exp(1.5*ln(r)+ln(2*pi)-0.5*ln(mu));

```

```

P:=Tdr/86400;
incl:=incldeg*pi/180;
shift:=2*pi*P;
nm:=trunc(0.003/sqrt(sigman));
writeln(nm:4,sigman:10);
writeln(fa2,sigman:10,' n optimal=',nm:4);
K_psi;
writeln(fa2,' ');
writeln('Prediction ',' i=',incldeg:5:1,' Interval=',
rev:3,' rev');
writeln(fa2,'Prediction ',' i=',incldeg:5:1,'
Interval=',rev:3,' rev');
writeln(fa2,' ');
writeln('sig0[j.jc], j=1...Nrev, jc=1...6');
writeln(fa2,'sig0[j.jc], j=1...Nrev, jc=1...6');
{-----}
for jc:=1 to 6 do begin
  for kc:=1 to 6 do begin
    Kx0[jc,kc]:=0;
    Kxk[jc,kc]:=0;
    Kxt[jc,kc]:=0;
    Kxs[jc,kc]:=0;
  end;
end;
{-----}
I_general(0); { k-j=0 }
for tt:=1 to rev do begin { 1-й цикл Prediction 0 }
  for j:=1 to tt do begin
    Kx_0(tt,j,j);
    for jc:=1 to 6 do begin
      for kc:=1 to 6 do begin
        Kx0[jc,kc]:=Kx0[jc,kc]+Kxt[jc,kc];
      end;
    end;
  end;
  for jc:=1 to 6 do
    sig0[j,jc]:=sqrt(Kx0[jc,jc]); { sig0 }
    writeln(j:2,sqrt(Kx0[1,1]):9:3,sqrt(Kx0[2,2]):8:1,sqrt
(Kx0[3,3]):6:3,sqrt(Kx0[4,4]):6:3,sqrt(Kx0[5,5]):6:3,
sqrt(Kx0[6,6]):6:3);
    writeln(fa2,j:2,sqrt(Kx0[1,1]):9:3,sqrt(Kx0[2,2]):8:1,
sqrt(Kx0[3,3]):6:3,sqrt(Kx0[4,4]):6:3,sq-
rt(Kx0[5,5]):6:3,sqrt(Kx0[6,6]):6:3);
  end; { 1-й цикл Prediction 0 }
writeln(fa2,' '); { Вывод результатов Kx0 }
writeln(fa2,'Kx0[jc,jc] ');
for jc:=1 to 6 do begin
  if jc=1 then begin
    write(fa2,Kx0[jc,1]:11:0,Kx0[jc,2]:11:0);
    for kc:=3 to 5 do write(fa2,Kx0[jc,kc]:9:3);
    writeln(fa2,Kx0[jc,6]:9:3);
  end;
end;

```

```

if jc=2 then begin
    write(fa2,Kx0[jc,1]:11:0,Kx0[jc,2]:11:0);
    for kc:=3 to 5 do write(fa2,Kx0[jc,kc]:9:3);
        writeln(fa2,Kx0[jc,6]:9:3);
    end;
if jc>2 then begin
    for kc:=1 to 5 do write(fa2,Kx0[jc,kc]:9:3);
        writeln(fa2,Kx0[jc,6]:9:3);
    end;
    end;
}-----}
for tt:=2 to rev do begin           { 2-й цикл Prediction
tt=1,...,rev }
Nrev:=tt;
writeln('Nrev=',Nrev:3);
for jm:=1 to Nrev-1 do begin      { Ik-j }
dlamb0:=shift*jm;
dlamb0:=dlamb0-2*pi*trunc(dlamb0/(2*pi));
if (dlamb0<pi-shift/2) or (dlamb0>pi+shift/2) then begin
{ Ik-j exists }
I_general(jm);                   { Cs=Ik-j=Ijm }

for j:=1 to Nrev-jm do begin
Kx_0(Nrev,j,j+jm);
for jc:=1 to 6 do begin
    for kc:=1 to 6 do begin
        Kxk[jc,kc]:=Kxk[jc,kc]+Kxt[jc,kc];
        end;
    end;
    end;
    end;           end;           { Ik-j exists }
    end;           { Ik-j }

for jc:=1 to 6 do begin
    sigs[tt,jc]:=sig0[tt,jc]*sig0[tt,jc]+2*Kxk[jc,jc];
    if sigs[tt,jc]>0 then sigs[tt,jc]:=sqrt(sigs[tt,jc])
    else sigs[tt,jc]:=0;
    end;
end;           { 2-й цикл Prediction tt=1,...,rev }

}-----}
writeln(fa2,'           ');      { ВЫВОД результатов Kxk }
writeln(fa2,' Kxk[jc,jc] ');
for jc:=1 to 6 do begin
    if jc=1 then begin
        write(fa2,Kxk[jc,1]:11:3,Kxk[jc,2]:11:1);
        for kc:=3 to 5 do write(fa2,Kxk[jc,kc]:9:3);
            writeln(fa2,Kxk[jc,6]:9:3);
        end;
    if jc=2 then begin
        write(fa2,Kxk[jc,1]:11:1,Kxk[jc,2]:11:0);
        for kc:=3 to 5 do write(fa2,Kxk[jc,kc]:9:3);
            writeln(fa2,Kxk[jc,6]:9:3);
    end;
end;

```



```

        end;
    if jc>2 then begin
        for kc:=1 to 5 do write(fa2,Kxk[jc,kc]:10:4);
            writeln(fa2,Kxk[jc,6]:10:4);
        end;
    end;

{-----}
writeln('sigs[j.jc], j=1..Nrev, jc=1...6');
writeln(fa2,'sigs[j.jc], j=1..Nrev, jc=1...6');
for Nrev:=2 to rev do begin
writeln(Nrev:2,sigs[Nrev,1]:9:3,sigs[Nrev,2]:8:1,sigs[Nrev,3]:6:3,
        sigs[Nrev,4]:6:3,sigs[Nrev,5]:6:3,sigs[Nrev,6]:6:3);
writeln(fa2,Nrev:2,sigs[Nrev,1]:9:1,sigs[Nrev,2]:8:1,sigs[Nrev,3]:6:3,
        sigs[Nrev,4]:6:3,sigs[Nrev,5]:6:3,sigs[Nrev,6]:6:3);
        end;
{-----}
for jc:=1 to 6 do { Kxs }
    for jk:=1 to 6 do Kxs[jc,jk]:=Kx0[jc,jk]+Kxk[jc,jk]+
Kxk[jk,jc];

writeln(fa2,' Kxs(rev): '); { Вывод суммарных
результатов Kxs }
for jc:=1 to 6 do begin
    if jc=1 then begin
        write(fa2,Kxs[jc,1]:11:0,Kxs[jc,2]:11:0);
        for kc:=3 to 5 do write(fa2,Kxs[jc,kc]:9:3);
            writeln(fa2,Kxs[jc,6]:9:3);
        end;
    if jc=2 then begin
        write(fa2,Kxs[jc,1]:11:0,Kxs[jc,2]:11:0);
        for kc:=3 to 5 do write(fa2,Kxs[jc,kc]:9:3);
            writeln(fa2,Kxs[jc,6]:9:3);
        end;
    if jc>2 then begin
        for kc:=1 to 5 do write(fa2,Kxs[jc,kc]:9:3);
            writeln(fa2,Kxs[jc,6]:9:3);
        end;
    end;
{-----}
close(fa2);
END.

```

Приложение Г

Программа для анализа точности TLE на основе их обработки МНК

Эта программа предназначена для адаптивной настройки значений весовых коэффициентов (4.25) на основе анализа отношения (4.26) квадрата невязок к дисперсии погрешностей измерений.

Г.1. Исходные данные и константы алгоритма

Исходными данными (измерениями) являются компоненты шестимерного вектора состояния спутника в геоцентрической инерциальной системе координат для различных моментов времени, полученные на основе пересчета TLE с помощью программы SGP4. Ниже приведен пример файла (RV_22675.dat), содержащего эти исходные данные (для КА «Космос-2251», № 22675) и состоящего из 62 строк:

N	t	x	y	z	Vx	Vy	Vz
1	18628.77226482	0.3634661	7180.8488842	0.0000058	-2.0465759756	-0.0075300990	7.1591578565
15	18629.75090341	223.6634792	7177.3373141	0.0000000	-2.0458291162	0.0556778824	7.1591880224
...
541	18666.51970769	6683.3602146	2598.6540577	-0.0000510	-0.7606906246	1.9032854138	7.1691446609
555	18667.49834365	6760.5719979	2389.3443212	-0.0000528	-0.7012149574	1.9261327782	7.1695597731

Здесь:

N — номер витка от начала массива;

t — время, включающее модифицированную Юлианскую дату (отсчет от $00^h 00^m 00^s 01.01.1958$) и доли суток;

x, y, z — координаты (км);

V_x, V_y, V_z — компоненты вектора скорости (км/с).

Ниже приведены основные константы алгоритма и пояснения к ним:

$n6=6$ — размерность вектора состояния.

$nmax=6$ — число измерений на мерном интервале = $n_{max} + 1$.

$pr1=2230$ — весовой коэффициент по радиусу (S).

$pr2=150$ — весовой коэффициент по трансверсали (T).

$pr3=1100$ — весовой коэффициент по бинормали (W).

$pvl=0.134e+9$ — весовой коэффициент по V_S .

$pv2=2.00e+9$ – весовой коэффициент по V_T .
 $pv3=1.60e+9$ – весовой коэффициент по V_W .
 $jbegin=1$ – номер измерения, с которого начинается их обработка.
 $Npr1=4$ – число «будущих» точек при прогнозах.
 $delld=0.5$; – интервал выдачи СКО погрешностей прогноза (сут).
 $Niter=9$ – число итераций при уточнении вектора состояния.
 $Sb=0.003$ – баллистический коэффициент спутника (m^2/kg).
 $F81=72$; $F=72$ – индексы солнечной активности.
 $Kp=2.6$ – индекс геомагнитной активности.
 $El_Name='RV_22675.dat'$ – имя файла исходных данных.

Г.2. Структура программы

В основу вычислений положено итерационное применение формулы (4.18), в которой весовая матрица имеет вид (4.25). В процессе итераций минимизируется критерий (4.19). После достижения минимума критерия для каждой компоненты вектора измерений по формуле (4.26) вычисляются отношения квадрата невязок к соответствующей априорной дисперсии. Эти оценки суммируются и записываются в файл “Kv_forms.dat”. Результаты каждого уточнения записываются в файл “Res6_adp.dat”. Уточнения параметров орбиты выполняются последовательно, с использованием всех исходных измерений. Эти результаты применяются в качестве НУ для прогноза. При сравнении прогнозных данных с «будущими» измерениями вычисляются невязки по всем компонентам вектора состояния в подвижной орбитальной системе координат. Путем усреднения невязок вычисляются их статистические характеристики: математическое ожидание, среднеквадратическое значение и СКО. Эти данные записываются в файл “Err5_adp.dat”.

Важную роль при решении рассматриваемой задачи играет модель движения спутника. Используется численное интегрирование уравнений движения с учетом зональных гармоник до 8-го порядка и торможения в атмосфере (модель атмосферы ГОСТ 25645.166-2004). Входные и выходные данные этой модели движения имеют ту же форму, что и приведенные выше данные исходных измерений. Численное интегрирование уравнений движения реализовано в пяти вспомогательных модулях программы (PRG_UNI2, Cnst_UN, Crdn_UN, Clst_UN, Time_UN), которые имеют расширение “...tpu”. Эти модули созданы в среде “Turbo Pascal6”. Обращение к модели движения имеет вид:

PrG1_UNI(RV0, sgnAtm, val_Sb, n_Sb, FkP, n_FkP, sgnGarm, tNt, RVN, sgnAnsw, sgnSb, sgnFkP, t_end);

В этом обращении:

RV0 – массив исходных значений компонентов вектора состояния;
RVN – массив результирующих значений компонентов вектора состояния;
tNt – время, на которое надо выполнить прогноз.

Остальные аргументы обращения имеют вспомогательный характер. Они используются для задания состава учитываемых при прогнозе возмущающих факторов.

Примечания

- В применяемой модели движения не учитываются возмущения от тессеральных гармоник. Это сделано потому, что, как показали многочисленные эксперименты по обработке реальной информации в форме TLE, их учет положительного эффекта не дает. Этот парадоксальный факт объясняется, по-видимому, тем, что в самих TLE периодические возмущения от тессеральных гармоник отфильтрованы.
- Тексты программных модулей, которые выполняют численное интегрирование уравнений движения, ниже не приведены. Это объясняется их достаточно большим объемом. Если у читателя имеется собственный программный модуль интегрирования уравнений движения, он может обратиться к нему в рассматриваемой ниже программе. Читатель может обратиться также на сайт автора и переписать тексты программных модулей в виде файлов с расширением "...tpru".

Программа содержит 11 вспомогательных процедур, которые перечислены в таблице.

Вспомогательные процедуры

№ п/п	Название	Назначение	Выходные данные
1	PrognTime	Прогнозирование 6-мерного вектора состояния на заданный момент времени	RVN
2	REV_GAUSS6	Обращение матрицы (6×6)	C_6
3	Uij	Расчет переходной матрицы для поправок к вектору состояния в орбитальной системе координат при прогнозе на N_j витков	$u_{21}, u_{25}, u_{41}, u_{45}$
4	XtPX6	Расчет одного из слагаемых матрицы $X_j^T P_j X_j$, относящегося к одному измерению	$X_t P X$
5	XtPZ6	Расчет одного из слагаемых матрицы $X_j^T P_j Z_k$, относящегося к первому измерению	$X_t P Z_6$
6	Gcalculation	Вычисление матрицы размерностью (3×3) ортогонального преобразования поправок из геоцентрической инерциальной СК в подвижную орбитальную СК	G

7	Gtranspon	Транспонирование матрицы G	Gr
8	MatrUmnog	Умножение матрицы (3×3) на вектор (3×1)	$Vect3$
9	REV_GAUSS3	Обращение матрицы (3×3)	$C3$
10	Utotchnienie	Обработка исходных измерений с использованием МНК на заданном мерном интервале.	RVi
11	TimeCorrection	Аппроксимация остаточных временных невязок полиномом 2-й степени. Полученные коэффициенты используются для вычисления поправок при прогнозе	a_{t0}, a_{t1}, a_{t2}

Программа содержит основной цикл, который организует последовательный выбор необходимых измерений из файла исходных данных. Текущий массив состоит из $n_{max}+1+N_{pt1}$ строк. Такое количество данных достаточно для выполнения уточнения параметров орбиты на мерном интервале и выполнения прогнозов на «будущие» N_{pt1} витков. В приведенном ниже тексте программы начало и конец этого цикла выделены жирным шрифтом.

Наиболее сложным компонентом алгоритма и программы является процедура **Utotchnienie**. Она содержит два цикла. Внешний цикл организует итерационный процесс уточнения, а внутренний — выполняет прогноз параметров орбиты на все измерения, которые используются на мерном интервале. Число итераций и значения управляющих параметров выбраны в процессе отладки алгоритма. Они обеспечивают надежную сходимость итерационного процесса.

Особенностью алгоритма является то, что кроме уточнения шестимерного вектора состояния в процедуре **Utotchnienie** дополнительно, на основе использования остаточных временных невязок, с помощью процедуры **TimeCogestion** строится полином второй степени. Коэффициенты этого полинома используются для коррекции результатов прогнозирования в «будущие» N_{pt1} точек. Такое алгоритмическое решение является альтернативой расширения вектора состояния путем включения в него баллистического коэффициента.

Г.3. Результаты расчета

1. Ниже представлен пример файла “Kv_forms.dat”, куда записываются все отношения квадрата невязок к соответствующей дисперсии ($=1/p$). Примечания выделены курсивом.

Значения весов:

pr1 pr2 pr3 pV1 pV2 pV3 (для скорости коэффициенты умножены на 10^{-8})
 2320 150 1100 1,34 20,80 16,00

j i fji1 fji2 fji3 fji4 fji5 fji6 Sum (*j* — номер уточнения, *i* — номер измерения, *fjik* — отношение для одного из шести компонентов измерения, *Sum* — сумма шести отношений)

1 0	0.28	0.47	6.01	0.82	1.73	0.28	9.59
1 1	0.01	0.33	0.76	0.19	0.82	0.00	2.12
1 2	0.01	1.75	0.07	1.40	0.73	0.00	3.95
1 3	1.95	0.07	0.19	0.06	0.37	0.27	2.91
1 4	0.20	0.42	0.56	0.33	1.42	2.44	5.37
1 5	0.24	0.15	0.46	0.04	0.07	1.07	2.04
1 6	3.90	0.00	4.35	0.06	1.42	0.28	10.01
2 0	0.10	0.05	1.78	0.00	1.20	0.00	3.14
2 1	0.07	1.13	0.04	0.69	1.11	0.00	3.05
2 2	1.41	0.24	0.80	0.30	0.16	0.20	3.12
2 3	0.44	0.71	0.09	0.74	1.97	2.67	6.61
2 4	0.07	0.31	0.05	0.22	0.23	0.93	1.82
2 5	3.04	0.01	2.70	0.00	0.93	0.36	7.04
2 6	0.52	0.43	0.07	0.95	0.00	0.92	2.90
3 0	0.32	2.70	0.40	1.68	1.78	0.13	7.00

50 6	0.60	2.40	0.03	3.17	0.04	0.02	6.26
51 0	0.12	0.73	0.13	0.46	0.79	2.66	4.89
51 1	0.08	0.03	0.01	0.00	0.68	0.20	1.00
51 2	0.13	0.11	0.00	0.02	0.80	0.20	1.26
51 3	0.13	0.09	0.05	0.12	0.79	0.01	1.19
51 4	1.08	4.83	0.00	3.96	0.26	0.20	10.32
51 5	0.18	0.48	0.04	0.77	0.02	0.01	1.49
51 6	3.15	0.17	0.59	0.42	1.46	0.20	5.98

51 304.0 301.2 304.3 309.7 300.9 302.7 — суммы всех отношений в каждом из столбцов. Эти суммы состоят из $51 \times 7 = 357$ слагаемых. При корректном выборе весов суммы должны мало отличаться от величины $357 - 51 = 306$. В данном случае отличия не превышают 1,7%, что свидетельствует о приемлемом подборе значений весов.

2. Содержание файла “Res6_adp.dat”:

Результаты всех уточнений (в форме, как у исходных данных. *N* — номер витка)

<i>N</i>	<i>time</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	V_x	V_y	V_z
54	18632.4771102	843.9791496	7130.8737391	0.019241	-2.03352487765	0.23130267676	7.15934630992
58	18632.7567212	907.2993629	7123.0737769	0.053889	-2.03141615835	0.24921096206	7.15936569425
71	18633.6654570	1112.6243708	7093.8184675	0.075052	-2.02346650493	0.30736616505	7.15944525026
88	18634.8538035	1379.7185978	7046.6117855	0.013878	-2.01054655906	0.38312876392	7.15956974116
100	18635.6926364	1567.0651577	7007.2216257	-0.010559	-1.99972348614	0.43627441141	7.15967356198
103	18635.9023445	1613.7392347	6996.6047241	-0.060731	-1.99679446078	0.44956683764	7.15968494913

.....

490	18662.9546751	6347.9545925	3338.4693242	-0.035686	-0.97052826592	1.80487736385	7.16761727572
504	18663.9333120	6448.3368694	3139.2616839	0.123154	-0.91422927111	1.83416131771	7.16803038800
518	18664.9119484	6542.4994444	2936.9807642	0.038532	-0.85679563938	1.86180600519	7.16844067173

delS1 value = 35.8 — *среднее значение минимизируемого критерия*

New delS1 value 35.8 — *то же, по другому. Отличие от «идеального» значения (36) — 0,5%.*

Residuals: — *СКО остаточных временных невязок на мерном интервале, с*

0	0.0122
1	0.0072
2	0.0096
3	0.0114
4	0.0100
5	0.0074
6	0.0107

3. Содержание файла “Err6_adp.dat”:

<i>d</i>	<i>RMS_t</i>	<i>M_t</i>	<i>Sigt</i>	<i>RMS_r</i>	<i>M_r</i>	<i>Sigr</i>	<i>k</i>
0.0	0.014	0.000	0.014	0.0279	0.0216	0.0177	53
0.5	0.024	0.003	0.024	0.0274	0.0171	0.0214	26
1.0	0.026	0.002	0.026	0.0317	0.0241	0.0206	51
1.5	0.037	0.006	0.036	0.0308	0.0219	0.0217	35
2.0	0.046	0.003	0.046	0.0389	0.0328	0.0210	42

Здесь:

d — левая граница интервала прогноза (*d, d+0,5*) (сут);

RMS_t, M_t, Sigt — среднеквадратическое значение, среднее и СКО временных ошибок прогноза (с);

RMS_r, M_r, Sigr — то же для погрешностей по радиусу;

k — число реализаций.

Г.4. Текст программы “LST6_TLE.pas”:

```
{ $M 65520, 0, 650360 }      { $N+ }
PROGRAM LST6_TLE;           { September 2009
                             On base of «OFM6_adp.pas»
                             New Utotchnenie (Time prediction)
                             KA 22675 }
uses PRG_UNI2, Cnst_UN, Crdn_UN, Clst_UN, Time_UN, CRT;
CONST
    n6=6;
    n3=3;
    nmax=6;
```

```

pr1=2730;
pr2=175;
pr3=1295;
pv1=1.5e+8 {0.154e+9};
pv2=2.45e+9;
pv3=1.89e+9;
jbegin=1;
eps=1/298.256;
dN=1;
Cgr=180/pi;
Nprmax=30;
Npr1=4;
deld=0.5; { Interval of RMS output }
jemax=nmax+Npr1+1;
Niter=9;
cort=10;
Sb=0.003;
F81=72; F=72; Kp=2.6;
El_Name='RV_22675.dat';

```

TYPE

```

real=single;
vEL=array[1..9] of double;
vmEL=array[1..jemax] of vEL;
vsun= array[1..4] of real;
vsig=array[0..Nprmax] of real;
vn6=array[1..n6] of double;
vnn6=array[1..n6] of vn6;
vn3=array[1..n3] of double;
vnn3=array[1..n3] of vn3;
vn=array[0..nmax] of double;
vrev=array[0..nmax] of integer;

```

VAR

```

SXtPX, XtPX, PQ, C6, Dxx:vn6;
SXtPZ, XtPZ:vn6;
modR, modV, u21, u25, u41, u45:double;
vect3, vecR, vecV, dRg0, dVg0, dRgt, dVgt,
dRt0, dVt0, dRt, dVt, delR3, delV3:vn3;
Gtr, G, Gt, G0, C3:vnn3;
timet, S11, S12, S13, S23, S33, S1t, S2t, S3t, at0, at1, at2, an0,
an1, dta:double;
SunData:vSun;
mEL:vmEL;
deltz, delxx, sigjt:vn;
masNz:vrev;
RMSdR, MdR, sigdR, xxt, RMSt, Mdel, sigt, sigN:vsig;
SS1, delS1, delS0, sig, SS, xx:real;
Sx, sigxx, pj, Sbrak, delNjt, mJD0, mJDE1, mJDSd:real;

```



```

Ndet, yy, jd, Nn:double;
nt, Pbrak, Nbrak, jdel, jiter:integer;
delN, jj, jmax, jsmax, Npr, ddpr, jt, jEl, Nma, jpr, j, je, kk:
integer;
js, jn:longint;
fa1, fa2, fa3, fa4:text;
SSf1, ssf2, ssf3, ssf4, ssf5, ssf6, sf1, sf2, sf3, sf4, sf5, sf6,
f1, f2, f3, f4, f5, f6:double;
Rt, delRt, dTds, dT00, dT0, dad:double;
Tdr0:double;
stroka:string;
Nq, N0 : double;
TmVal0 : time; { dy, mo, yr, hr, mn, sk; descr in Cnst_
UN }
rvIn : coord; { D+t, X, Y, Z, vX, vY, vZ; descr in
Cnst_UN }
{ O_U_T_P_U_T }
namb, LGr, {h, r,} e, w, Tom, incl : real;
TmValN, TmValE : time;
{elN : elem;} { N, D+t, Tom, i, Om, l, h, dT, a, U;
descr in Cnst_UN }
rvI : coord;
{ W O R K I N G D A T A }
tN, tN_1, tt, t, tpr : double;
RVt0, RVt, RV0, RVN : coord;
N1, N2, dadn, a0, a1, a2, sgnAtm, sgnGarm, sgnISK, sgnDN, iNt, t_
end: double; ni, nin, inamb, n_Sb, n_FkP : integer;
{-----}
Procedure PrognTime(tNt:double);
{ calculation according to given time }
BEGIN { Procedure PrognTime }
inamb :=TRUNC(Nq); iNt:= 1.0; nin:=1;
PrgT_UNI(RV0, sgnAtm, val_Sb, n_Sb, FkP, n_FkP,
sgnGarm, tNt, RVN, sgnAnsw, sgnSb, sgnFkP, t_end);
RV0:=RVN;
END; { Procedure PrognTime }
{-----}
Procedure REV_GAUSS6(Ad:vnn6);
VAR
nd, i, jg, ir : integer;
cd : double;
BEGIN { PROCEDURE MATR_REV_GAUSS }
nd:=n6;
for i:=1 to nd do
for jg:=1 to nd do
if i <> jg then C6[i, jg] := 0
else C6[i, jg] := 1;

```

```

for i:=1 to nd do
  begin for ir:=1 to nd do
    if ir <> i then
      begin
        cd := Ad[ir, i] / Ad[i, i];
        for jg :=i to nd do
          Ad[ir, jg] := Ad[ir, jg] - Ad[i, jg] * cd;
        for jg:=1 to nd do
          C6[ir, jg] := C6[ir, jg] - C6[i, jg] * cd;
        end; { if ir <> i }
        cd := Ad[i, i];
        for jg := i to nd do
          Ad[i, jg] := Ad[i, jg] / cd;
        for jg:=1 to nd do
          C6[i, jg] := C6[i, jg] / cd;
        end;      { for i:=1 to nd }
      end;
    end;
  }
END;
{-----}
Procedure XtPX6;
{ Output XtPX }
var
x1,y1:integer;
begin
for x1:=1 to n6 do
  for y1:=1 to n6 do XtPX[x1,y1]:=0;
XtPX[1,1]:=pr1+pr2*u21*u21+pv1*u41*u41;
XtPX[1,2]:=pr2*u21;
XtPX[1,4]:=pv1*u41;
XtPX[1,5]:=pr2*u21*u25+pv1*u41*u45;
XtPX[2,2]:=pr2;
XtPX[2,5]:=pr2*u25;
XtPX[3,3]:=pr3;
XtPX[4,4]:=pv1;
XtPX[4,5]:=pv1*u45;
XtPX[5,5]:=pr2*u25*u25+pv2+pv1*u45*u45;
XtPX[6,6]:=pv3;
for x1:=2 to n6 do
  for y1:=1 to x1-1 do XtPX[x1,y1]:=XtPx[y1,x1];
end;
{-----}
Procedure XtPZ6;
Begin
XtPZ[1]:=pr1*dRt[1]+pr2*u21*dRt[2]+pv1*u41*dVt[1];
XtPZ[2]:=pr2*dRt[2];
XtPZ[3]:=pr3*dRt[3];
XtPZ[4]:=pv1*dVt[1];
XtPZ[5]:=pr2*u25*dRt[2]+pv1*u45*dVt[1]+pv2*dVt[2];
XtPZ[6]:=pv3*dVt[3];

```

```

End;
{-----}
-----}
Procedure Gcalculation (Rc, Vc:vn3);
var
    av,bv,cv,a,b,c,a1,b1,c1,a2,b2,c2:double;
Begin
modR:=sqrt (Rc [1]*Rc [1]+Rc [2]*Rc [2]+Rc [3]*Rc [3]);
modV:=sqrt (Vc [1]*Vc [1]+Vc [2]*Vc [2]+Vc [3]*Vc [3]);
a:=Rc [1]/modR;      G [1,1]:=a;
b:=Rc [2]/modR;      G [1,2]:=b;
c:=Rc [3]/modR;      G [1,3]:=c;
av:=Vc [1]/modV;
bv:=Vc [2]/modV;
cv:=Vc [3]/modV;
a2:=b*cv-c*bv;      G [3,1]:=a2;
b2:=c*av-a*cv;      G [3,2]:=b2;
c2:=a*bv-b*av;      G [3,3]:=c2;

a1:=b2*c-c2*b;      G [2,1]:=a1;
b1:=c2*a-a2*c;      G [2,2]:=b1;
c1:=a2*b-b2*a;      G [2,3]:=c1;
End;
{-----}
Procedure Gtranspon (Gc:vnn3);
var ks,kc:integer;
Begin
for ks:=1 to n3 do
    for kc:=1 to n3 do Gtr[ks,kc]:=Gc[kc,ks];
End;
{-----}
Procedure MatrUmnog (Gc:vnn3;vec3:vn3);
var kc:integer;
Begin
for kc:=1 to n3 do vect3[kc]:=0;
for kc:=1 to n3 do begin
    vect3 [1]:=vect3 [1]+Gc [1, kc]*vec3 [kc];
    vect3 [2]:=vect3 [2]+Gc [2, kc]*vec3 [kc];
    vect3 [3]:=vect3 [3]+Gc [3, kc]*vec3 [kc];
end;
End;
{-----}
Procedure Uij (Nj:double);    { Output u21,u25,u41,u45 }
Begin
u21:=-6*pi*Nj;
u25:=-3*Nj*Tdr0*86400;      { sec }
u45:=6*pi*Nj;

```

```

u41:=2*pi*u45/(Tdr0*86400);           { sec-1 }
End;
{-----}
Procedure REV_GAUSS3(Ad:vn3);
VAR
  nd,i, j, ir : integer;
  cd           : double;
BEGIN                                     { PROCEDURE REV_GAUSS3 }
  nd:=n3;
  for i :=1 to nd do
    for j := 1 to nd do   if i <> j then C3[i, j] := 0
                          else C3[i, j] := 1;
  for i := 1 to nd do
    begin for ir := 1 to nd do
          if ir <> i then
            begin
              cd := Ad[ir, i] / Ad[i, i];
              for j :=i to nd do
                Ad[ir, j] := Ad[ir, j] - Ad[i, j] * cd;
              for j :=1 to nd do
                C3[ir, j] := C3[ir, j] - C3[i, j] * cd;
            end; { if ir <> i }
            cd := Ad[i, i];
            for j := i to nd do
              Ad[i, j] := Ad[i, j] / cd;
            for j := 1 to nd do
              C3[i, j] := C3[i, j] / cd;
          end;          { for i := 1 to nd }
END;                                     { PROCEDURE REV_GAUSS3 }
{-----}
Procedure TimeCorrection(Stc:vn3);
Var XtX3:vn3;
    x1:integer;
Begin
  for x1:=1 to n3 do begin
    at0:=0; at1:=0; at2:=0;
    end;

  XtX3[1,1]:=S11;
  XtX3[1,2]:=S12;
  XtX3[1,3]:=S13;
  XtX3[2,1]:=S12;
  XtX3[2,2]:=S13;
  XtX3[2,3]:=S23;
  XtX3[3,1]:=S13;
  XtX3[3,2]:=S23;
  XtX3[3,3]:=S33;
  Rev_Gauss3(XtX3);

```

```

for x1:=1 to n3 do begin
  at0:=at0+C3[1,x1]*Stc[x1];
  at1:=at1+C3[2,x1]*Stc[x1];
  at2:=at2+C3[3,x1]*Stc[x1];
  end;
End;
{-----}
Procedure Utotchnenie;
var fji,kit,xx:double;
    x1,y1:integer;
    St:vn3;
Begin
  kit:=0.3;
  tn:=mEL[j+Npr,2];
  Ndet:=mEL[j+Npr,1]-mEl[j,1];
  jiter:=0;
  delS1:=2000;
  Repeat Begin
    { Iteration }
    jiter:=jiter+1;
    if jiter>2 then kit:=0.5;
    if jiter>5 then kit:=0.9;
    if jiter>8 then kit:=0.8;
    Sx:=0;
    sigxx:=0;
    delS0:=delS1;
    S11:=0; S12:=0; S13:=0; S23:=0; S33:=0;
    S1t:=0; S2t:=0; S3t:=0;
    delS1:=0;
    val_Sb[1,3]:=Sb;
    sgnAtm:=1;
    Nn:=round(mEL[j,1]);
    namb:=0;
    for kk:=1 to n6 do
      for je:=1 to n6 do SXtPX[kk,je]:=0;
      for je:=1 to n6 do SXtPZ[je]:=0;
  RV0:=RVt;
  sf1:=0;sf2:=0;sf3:=0;sf4:=0;sf5:=0;sf6:=0;
  For jt:=0 to Npr do begin { Predictions on Npr points }
  if jt>0 then Nq:=round(mEL[j+jt,1]-mEl[j+jt-1,1])
    else Nq:=0;
  delN:=round(mEL[j+jt,1]-mEl[j,1]);
  timet:=mEl[j+jt,2];
  if jt>0 then PrognTime(timet)
    else RVN:=RV0;
  xx:=-RVN[3]/RVN[6];
  {*****}
  S11:=S11+1;
    S1t:=S1t+xx;

```

```

yy:=delN; S12:=S12+yy;      S2t:=S2t+yy*xx;
yy:=yy*delN; S13:=S13+yy; S3t:=S3t+yy*xx;
yy:=yy*delN; S23:=S23+yy;
yy:=yy*delN; S33:=S33+yy;
{*****}
    for kk:=1 to n3 do VecR[kk]:=RVN[kk];
    for kk:=1 to n3 do VecV[kk]:=RVN[kk+3];
    Gcalculation(VecR,VecV);
    Gt:=G;
    Uij(delN); { OutPut: u21,u25,u41,u45 }
        dRgt[1]:=mEL[j+jt,3]-RVN[1];
        dRgt[2]:=mEL[j+jt,4]-RVN[2];
        dRgt[3]:=mEL[j+jt,5]-RVN[3];
        dVgt[1]:=mEL[j+jt,6]-RVN[4];
        dVgt[2]:=mEL[j+jt,7]-RVN[5];
        dVgt[3]:=mEL[j+jt,8]-RVN[6];
        MatrUmnog(Gt,dRgt); dRt:=vect3; { Moving System }
        delxx[jt]:=xx;
        MatrUmnog(Gt,dVgt); dVt:=vect3;
    f1:=dRt[1]*pr1*dRt[1];
    f2:=dRt[2]*pr2*dRt[2];
    f3:=dRt[3]*pr3*dRt[3];
    f4:=dVt[1]*pv1*dVt[1];
    f5:=dVt[2]*pv2*dVt[2];
    f6:=dVt[3]*pv3*dVt[3];
    fji:=f1+f2+f3+f4+f5+f6; { x-kvadr n=6, 51*7 values }
    delS1:=delS1+fji; { x-kvadr n=6*7, 51 values }
if jiter=Niter then begin
    sf1:=sf1+f1; { summ of 7 values }
    sf2:=sf2+f2;
    sf3:=sf3+f3;
    sf4:=sf4+f4;
    sf5:=sf5+f5;
    sf6:=sf6+f6;
if jt=Npr then
writeln(fa2,jj:2,jt:2,f1:6:2,f2:6:2,f3:6:2,f4:6:2,
f5:6:2,f6:6:2,fji:7:2,delS1:7:1)
    else
writeln(fa2,jj:2,jt:2,f1:6:2,f2:6:2,f3:6:2,f4:6:2,
f5:6:2,f6:6:2,fji:7:2);
    end;
    XtPX6; { XtPX }
    for x1:=1 to n6 do
        for y1:=1 to n6 do SXtPX[x1,y1]:=SXtPX[x1,
y1]+XtPX[x1,y1];
    XtPZ6; { XtPZ }
    for x1:=1 to n6 do

```

```

SxtPZ[x1]:=SxtPZ[x1]+XtPZ[x1];
RV0:=RVN;
end; { Predictions on Npr points }
St[1]:=S1t; St[2]:=S2t; St[3]:=S3t;

Rev_Gauss6(SXtPX);
for x1:=1 to n3 do begin
  dRt0[x1]:=0;
  dVt0[x1]:=0;
end;

for x1:=1 to n3 do
  for y1:=1 to n6 do dRt0[x1]:=dRt0[x1]+C6[x1,y1]*SxtPZ
[y1];
for x1:=1 to n3 do
  for y1:=1 to n6 do dVt0[x1]:=dVt0[x1]+C6[x1+n3,y1]*Sxt
PZ[y1];
Gtranspon(G0); { 27.09.2009 } { OutPut Gtr }
MatrUmnog(Gtr,dRt0); dRg0:=vect3; {dRg0 Inertial System}
MatrUmnog(Gtr,dVt0); dVg0:=vect3; {dVg0 Inertial System}
for x1:=1 to n3 do RVt[x1]:=RVt[x1]+kit*dRg0[x1];
for x1:=1 to n3 do RVt[n3+x1]:=RVt[n3+x1]+kit*dVg0[x1];
{ Average delS1 shold be Npr*n6 }
delS1:=(delS1/Npr); { ... should be equal n6 }
writeln(jj:3,jiter:3,kit:5:2,' delS1=',sqrt(delS1/n6):8:
3,delxx[Npr]:8:3);
End { !!! Iteration }

Until (jiter>=Niter;
TimeCorrection(St); { Output at0, at1, at2 }
an0:=at0+at1*Ndet+at2*Ndet*Ndet;
an1:=at1*2*at2*Ndet;
writeln('Correction',at0:7:3,at1:9:5,at2:11:7,an0:7:3,
an1:9:5); { Correction t0 }
{-----}
if delS1>Sbrak then begin { !!! Brak }
  Pbrak:=1;
  Nbrak:=Nbrak+1;
  writeln(jj:3,delS1:6:2,'Brak');
  writeln(Fa4,jj:3,delS1:6:2,' Brak');
end { !!! Brak }
{-----}
else begin
  Pbrak:=0;
  SS1:=SS1+delS1;
  SS:=SS+Sx;
  sig:=sig+sigxx;
  for jt:=0 to nmax do sigjt[jt]:=sigjt[jt]+delxx[jt]*
delxx[jt];

```

```

        end;
End;
{-----}
BEGIN
assign (fa2, 'kv_forms.dat');
assign (fa3, 'Err6_adp.dat');
assign (fa4, 'Res6_adp.dat');
rewrite (fa2);
rewrite (fa3);
rewrite (fa4);
Npr:=nmax;
Sbrak:=25;
assign (fal, El_name);
reset (fal);
writeln (fa2, pr1:5, pr2:5, pr3:5, pv1*1.0e-8:6:2, pv2*
1.0e-8:6:2, pv3*1.0e-8:6:2);
for jj:=1 to jbegin-1 do
    readln (fal, stroka);
jj:=0;
Repeat begin
jj:=jj+1;
if jj=1 then readln (fal, xx, mJD0, stroka)
    else readln (fal, yy, mJDE1, stroka);
    end
Until EOF (fal);
Tdr0:= (mJDE1-mJD0) / (yy-xx);           { Tdr0 }
jmax:=jj-jemax;                          { jmax }
close (fal);
    FkP [1, 5] := F81;
    FkP [1, 3] := F;
    FkP [1, 4] := Kp;
reset (fal);
SS:=0; sig:=0;
for jpr:=0 to nmax do begin
    sigjt [jpr] := 0;
                                end;
for jpr:=0 to Nprmax do begin
    sigN [jpr] := 0;
    Mdel [jpr] := 0;
    RMSt [jpr] := 0;
    sigt [jpr] := 0;
    RMSdR [jpr] := 0;
    MdR [jpr] := 0;
    sigdR [jpr] := 0;
                                end;
SS1:=0;
for jj:=1 to jbegin-1 do

```



```

readln(fa1, stroka);
val_Sb[1,1]:=0;   val_Sb[1,2]:=0;   n_Sb:= 1;
FkP[1,1]:= 0;   FkP[1,2]:= 0;   n_FkP:=1;
namb   := 0;   Nn:=N0;
sgnGarm:=1111111000;
signGarm:=1111111000;
sgnAnsw:=0;
sgnSb:=0;
sgnFkP:=0;
for j:=1 to Npr+Npr1+1 do
    readln(fa1,mEL[j,1],mEL[j,2],mEL[j,3],mEL[j,4],
mEL[j,5],mEL[j,6],mEL[j,7],mEL[j,8]);
JD00:=2436205+mEL[1,2];
{*****}
ssf1:=0;ssf2:=0;ssf3:=0;ssf4:=0;ssf5:=0;ssf6:=0;
For jj:=1 to jmax do begin           { beginning cycle }
j:=1;
writeln(jj:3);
    for kk:=0 to Npr do masNz[kk]:=round(mEL[kk+1,1]
-mEL[1,1]);
    for kk:=0 to 6 do RV0[kk]:=mEL[j,kk+2];
    RVt0:=RV0;
    RVt:=RV0;
    for kk:=1 to n3 do VecR[kk]:=RVt[kk];
    for kk:=1 to n3 do VecV[kk]:=RVt[kk+3];
    Gcalculation(VecR,VecV);
    G0:=G;
    Utotchnienie;
    ssf1:=ssf1+sf1;
    ssf2:=ssf2+sf2;
    ssf3:=ssf3+sf3;
    ssf4:=ssf4+sf4;
    ssf5:=ssf5+sf5;
    ssf6:=ssf6+sf6;
writeln(jj:4,mEL[Npr+1,1]:4:0,RVN[0]:13:6,RVN[1]:14:6,
RVN[2]:14:6,RVN[3]:10:6,RVN[4]:14:10,RVN[5]:14:10,
RVN[6]:14:10);
writeln(Fa4,mEL[Npr+1,1]:4:0,RVN[0]:14:7,RVN[1]:15:7,
RVN[2]:15:7,RVN[3]:10:6,RVN[4]:15:11,RVN[5]:15:11,
RVN[6]:15:11);
if Pbrak=0 then begin { no BRAK }
if abs(RVN[0]-mEL[Npr+1,2])*86400>0.15 then RVN[0]:=
mEL[Npr+1,2];
RV0:=RVN;
RVt:=RVN;
j:=1+Npr;
for jt:=0 to Npr1 do xxt[jt]:=0;

```

```

For jt:=0 to Npr1 do begin { Predictions on Npr1 points }
  Nm:=round(mEL[j,1]);
  namb:=0;
  if jt>0 then Nq:=round(mEL[j+jt,1]-mEL[j+jt-1,1])
    else Nq:=0;
  delN:=round(mEL[j+jt,1]-mEL[j,1]);
  timet:=mEL[j+jt,2];
  if jt>0 then PrognTime(timet)
    else RVN:=RV0;
  xx:=-RVN[3]/RVN[6];
  write(jj:2,jt:2,' PrognTime xx=',xx:7:3);
  dta:=at0+at1*(Ndet+delN)+at2*(Ndet*Ndet+
2*Ndet*delN); { 12.09.2009 }
  if delN<cort then dta:=dta+at2*delN*delN*
(1-0.333*delN/cort)
    else dta:=dta+at2*cort*cort*(delN/cort-0.333);
  xx:=xx-dta;
  delR3[1]:=mEL[j+jt,3]-RVN[1];
  delR3[2]:=mEL[j+jt,4]-RVN[2];
  delR3[3]:=mEL[j+jt,5]-RVN[3];
  Rt:=sqrt(RVN[1]*RVN[1]+RVN[2]*RVN[2]+RVN[3]*RVN[3]);
  delRt:=(delR3[1]*RVN[1]+delR3[2]*RVN[2]+delR3[3]*
RVN[3])/Rt;
  for kk:=1 to n3 do VecR[kk]:=RVN[kk];
  for kk:=1 to n3 do VecV[kk]:=RVN[kk+3];
  Gcalculation(VecR,VecV);
  Gt:=G;
  MatrUmnog(Gt,delR3); dRt:=vect3; { Moving System }
writeln(delN:4,' delR=',dRt[1]:9:5,dRt[2]:9:5,dRt[3]:9:
5,dta:7:3);
  xxt[jt]:=xx;
  ddpr:=round((RVN[0]-mEL[j,2])/deld);
  if (ddpr<1) and (ddpr>0) then ddpr:=1;
  sign[ddpr]:=sign[ddpr]+1;
  RMSt[ddpr]:=RMSt[ddpr]+xx*xx;
  Mdel[ddpr]:=Mdel[ddpr]+xx;
  MdR[ddpr]:=MdR[ddpr]+dRt[1];
  RMSdR[ddpr]:=RMSdR[ddpr]+dRt[1]*dRt[1];
RV0:=RVN;
                                end; { Predictions on Npr1 points }
                                end; { No brak }
for j:=1 to Npr+Npr1 do
  for je:=1 to 9 do mEL[j,je]:=mEL[j+1,je];
  j:=Npr+Npr1+1;
  readln(fal,mEL[j,1],mEL[j,2],mEL[j,3],mEL[j,4],mEL[j,5],
mEL[j,6],mEL[j,7],mEL[j,8]);
  JD00:=2436205+mEL[1,2];

```

```

                                end;      { ending cycle jj }
writeln(Fa2,jj:3,ssf1:6:1,ssf2:6:1,ssf3:
6:1,ssf4:6:1,ssf5:6:1,ssf6:6:1);
writeln(jj:3,ssf1:6:1,ssf2:6:1,ssf3:6:1,-
ssf4:6:1,ssf5:6:1,ssf6:6:1);
for jt:=0 to Npr do begin
    sigjt[jt]:=sqrt(sigjt[jt]/jmax);
    end;
RMSt[0]:=sigjt[Npr];
Mdel[0]:=0;
sigt[0]:=RMSt[0];
sigN[0]:=jmax;
writeln(' 0',RMSt[0]:8:3,Mdel[0]:8:3,sigt[0]:8:3,sigN
[0]:5:0);
for jpr:=0 to Npr1 do begin      { begin jpr }
    if sigN[jpr]>1 then begin
        Mdel[jpr]:=Mdel[jpr]/sigN[jpr];
        RMSt[jpr]:=RMSt[jpr]/sigN[jpr];
        sigt[jpr]:=sqrt(RMSt[jpr]-Mdel[jpr]*Mdel[jpr]);
        RMSt[jpr]:=sqrt(RMSt[jpr]);
        MdR[jpr]:=MdR[jpr]/sigN[jpr];
        RMSdR[jpr]:=RMSdR[jpr]/sigN[jpr];
        xx:=RMSdR[jpr]-MdR[jpr]*MdR[jpr];
        if xx>0 then sigdR[jpr]:=sqrt(xx)
            else sigdR[jpr]:=0;
        RMSdR[jpr]:=sqrt(RMSdR[jpr]);
        end;
writeln(jpr*deld:3:1,RMSt[jpr]:8:3,Mdel[jpr]:8:3,
sigt[jpr]:8:3,RMSdR[jpr]:8:4,MdR[jpr]:8:4,
sigdR[jpr]:8:4,sigN[jpr]:5:0);
writeln(fa3,jpr*deld:3:1,RMSt[jpr]:8:3,Mdel[jpr]:8:3,
sigt[jpr]:8:3,RMSdR[jpr]:8:4,MdR[jpr]:8:4,
sigdR[jpr]:8:4,sigN[jpr]:5:0);
                                end;      { end jpr }
SS1:=SS1/jmax;
writeln(fa4,' ');
writeln(Fa4,' аГ«ГГ $ зГ«Г=' ,SS1:6:3);
SS1:=(ssf1+ssf2+ssf3+ssf4+ssf5+ssf6)/(jmax*Npr);
writeln(Fa4,'New delS1 value ',SS1:6:3);
writeln(fa4,'Residuals:');
for jt:=0 to Npr do begin
    writeln(fa4,jt:2,sigt[jt]:8:4);
    end;
close(Fa2);
close(Fa3);
close(Fa4);
END.

```

Приложение Д

Программа для определения СКО погрешностей измерений и шума системы на имитационной модели

Эта программа предназначена для исследования возможностей адаптивной настройки значений СКО (σ_z) погрешностей измерений (4.28) и СКО (σ_q) шума системы (4.29) на основе анализа значений минимизируемого критерия (4.21).

Д.1. Исходные данные и константы алгоритма

Исходными данными для моделирования являются:

$\text{sigmaz}=0.0001$; — номинальное значение СКО ошибок измерений, мин;
 $\text{sigmaq}=0.000002$; — номинальное значение СКО шума, мин/виток;
 $\text{nz}=\{5\} \ 20$; — число измерений на мерном интервале

Эти значения пользователь может менять в процессе исследований.

Ниже приведены основные константы алгоритма и пояснения к ним.

$\text{n2}=2$; — размерность вектора состояния;
 $\text{dNz}=2$; — интервал между измерениями, витки;
 $\text{delpr}=2$; — интервал между прогнозными точками, витки;
 $\text{npr}=0 \ \{30\}$; — число прогнозных точек (в данном случае =0);
 $\text{nk}=\text{delpr}*\text{npr}$; $\text{t0}=0$; — начальное значение времени;
 $\text{td0}=100$; — среднее значение периода (мин);
 $\text{Cz}=(\text{sigmaq}/\text{sigmaz})$;
 $\text{nc}=10000$; — число реализаций при моделировании;
 $\text{nq}=30$; — интервал корреляции шума, витки;
 $\text{nvar}=5$; — число вариантов при изменении исходных СКО;
 $\text{kvar}:\text{array}[1..\text{nvar}] \ \text{of} \ \text{real}=(0.1, 0.33, 1, 3, 10)$; — коэффициенты при изменении СКО;
 $\{\text{kvar}:\text{array}[1..\text{nvar}] \ \text{of} \ \text{real}=(0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2)\}$;

Д.2. Структура программы

Программа выполняет расчеты для всех 25 комбинаций параметров σ_z и σ_q , соответствующих значениям коэффициентов k_{var} .

В основу вычислений положено моделирование движения объекта на основе уравнений (4.27) на достаточно большом интервале в соответствии со значением параметра nc . При этом значения шума моделируются датчиком случайных чисел (метод Монте-Карло). Аналогично формируются и погрешности измерений (4.28). Измерения обрабатываются в соответствии со схемой, представленной на рис. 4.19. ММП-оценки вектора состояния определяются по формуле (4.18). Для каждого из уточнений определяется значение минимизируемого критерия (4.22). Определяются также погрешности оценок вектора состояния. Эти оценки затем усредняются.

Уточнения параметров орбиты выполняются последовательно, с использованием всех исходных измерений. Результаты каждого уточнения записываются в файл "Values2.dat". Значения критерия, временных погрешностей, а также всех случайных величин усредняются.

Результаты усреднения значений критерия, СКО реальных временных погрешностей и их отношения к априорным СКО, рассчитанные для каждого из 25 вариантов варьируемых параметров, записываются в файл "Matrixes.dat" (в виде таблицы).

Программа содержит обращение к внешней функции X_normal (файл "normal.tpu") для расчета случайной величины, распределенной по нормальному закону, и 6 внутренних вспомогательных процедур, которые перечислены в таблице.

Вспомогательные процедуры (функции)

№ п/п	Название	Назначение	Выходные данные
1	x_Kq	Моделирование случайной величины с корреляционной функцией (4.29)	xn
2	REV_GAUS	Обращение матрицы ($n_z \times n_z$)	C
3	Kqjinew	Расчет значений корреляционной функции (4.29)	$Kqjinew$
4	WightMatrix	Расчет весовой матрицы (4.22)	PQ
5	xMatrix2	Расчет матрицы U_j	$X2z$
6	MNK2PQ	Применение ММП для расчета минимизируемого критерия, оценок вектора состояния и погрешностей (файл "Values2.dat")	$SSp, valt, valtd, delt, sigma$

Программа содержит два внешних цикла, реализующих рассмотрение всех 25 комбинаций параметров σ_z и σ_q , соответствующих значениям коэффициентов k_{var} . В соответствии с заданным числом реализаций nc основной внутренний цикл организует последовательный переход от одного мерного

интервала к другому. На каждом из мерных интервалов выполняется обращение к процедуре **МНК2PQ** для расчета минимизируемого критерия, оценок вектора состояния и погрешностей.

После окончания цикла по числу реализаций рассчитываются все выходные усредненные характеристики, которые записываются в файл "Matrixes.dat".

Д.3. Результаты расчета

1. Ниже представлен пример файла "Matrixes.dat", куда записываются все значения минимизируемого критерия, СКО фактических временных погрешностей и их отношения к априорным СКО. Каждая из клеток матриц соответствует определенным значениям параметров σ_z и σ_q . Примечания выделены курсивом.

sigz= 0.000100 sigq= 0.000006 nz=20 dNz= 2 — исходные данные
 MatrSS — матрица значений критерия:

	$(\sigma_q)_1$	$(\sigma_q)_2$	$(\sigma_q)_3$	$(\sigma_q)_4$	$(\sigma_q)_5$
$(\sigma_z)_1$	1754.028	1462.988	1208.447	1006.493	162.035
$(\sigma_z)_2$	288.918	167.029	134.805	109.740	92.576
$(\sigma_z)_3$	86.738	29.768	18.114	14.421	12.268
$(\sigma_z)_4$	20.251	8.436	3.379	1.957	1.636
$(\sigma_z)_5$	2.222	1.778	0.883	0.321	0.177

MatrSig — матрица значений СКО временных погрешностей (с):

	$(\sigma_q)_1$	$(\sigma_q)_2$	$(\sigma_q)_3$	$(\sigma_q)_4$	$(\sigma_q)_5$
$(\sigma_z)_1$	0.004480	0.004895	0.005367	0.005733	0.005930
$(\sigma_z)_2$	0.005979	0.004590	0.004911	0.005275	0.005685
$(\sigma_z)_3$	0.013704	0.005654	0.004554	0.004878	0.005385
$(\sigma_z)_4$	0.029592	0.012265	0.005752	0.004435	0.004955
$(\sigma_z)_5$	0.035682	0.029171	0.014002	0.006083	0.004518

MatrK — матрица отношений реальных и априорных СКО:

	$(\sigma_q)_1$	$(\sigma_q)_2$	$(\sigma_q)_3$	$(\sigma_q)_4$	$(\sigma_q)_5$
$(\sigma_z)_1$	9.89453	9.62031	9.73642	9.90681	9.95972
$(\sigma_z)_2$	4.60754	3.07145	2.94625	2.91583	2.97573
$(\sigma_z)_3$	4.09307	1.42131	1.00579	0.96678	0.97676
$(\sigma_z)_4$	3.53354	1.20200	0.48131	0.32648	0.32433
$(\sigma_z)_5$	1.36811	1.04623	0.41822	0.15491	0.09977

2. Содержание файла "Valuesv2.dat"

Результаты всех уточнений при номинальных исходных данных:

№	Витка	Время (мин)	Период	delt (с)	Критерий
1	39	3799.99641	99.99979	0.0030	SSp=10.2
2	41	3999.99605	99.99979	0.0028	SSp=10.2
3	43	4199.99574	99.99981	-0.0004	SSp=10.9
4	45	4399.99536	99.99981	0.0002	SSp= 9.4
5	47	4599.99495	99.99980	0.0042	SSp= 9.5

6	49	4799.99465	99.99982	0.0016	SSp=10.7
7	51	4999.99432	99.99983	0.0014	SSp=10.2
8	53	5199.99412	99.99987	-0.0053	SSp=11.5
.					
.					
9996	20029	2002813.11547	100.00078	0.0034	SSp=12.0
9997	20031	2003013.11717	100.00081	-0.0010	SSp=14.2
9998	20033	2003213.11878	100.00081	-0.0005	SSp=14.2
9999	20035	2003413.12052	100.00083	-0.0078	SSp=15.3
10000	20037	2003613.12210	100.00082	-0.0062	SSp=16.4

Усредненные результаты моделирования:

<i>СКО датчика</i>	<i>СКО измерений</i>	<i>СКО шума</i>	<i>Критерий</i>
0.9822	sigz= 0.00010088	sigq= 0.0000059	MSS= 18.11

Д.4. Текст программы "OFM2_adp.pas"

```
{ $A+, B+, D+, E+, F+, G+, I+, L+, N+, O+, R+, S+, V+, X- }
{ $M 65520, 0, 655360 }
PROGRAM OFM2_adp; { Kq= (1-t/nq) }
                    { State vector - two-dimensional }
                    { 26.01.2009
                    Optimal technique for initial data
                    Prediction by PQ matrix }

uses dos,crt,normal;
const
  n2=2;
  dNz=2; { measurement step }
  delpr=2; { delta prediction }
  npr=0 {30}; { Prediction number }
  nk=delpr*npr;
  t0=0;
  td0=100;
  sigmaz=0.0001;
  sigmaq=0.000002;
  Cz=(sigmaq/sigmaz);
  nz={5} 20; { Number of measurements }
  nc=10000;
  nq=30;
  nvar=5;
{ kvar:array[1..nvar] of real=(0.1,0.33,1,3,10); }
{ kvar:array[1..nvar] of real=(0.8,0.9,1,1.1,1.2); }
type
  real=single;
  vt=array[1..nz*dNz+nk] of double;
  vq=array[1..nq] of real;
  vz=array[1..nz] of double;
  vxz=array[1..2] of vz;
  vnn=array[1..nz] of vz{vn};
  vvar=array[1..nvar] of array[1..nvar] of real;
var
  t,td,dt:vt;
  Ez,RMSz,sigz,Sz,zt,del:vz {vn};
```

```

PQ, C, Kxpred, PQpred:vnn;
X2z:vxz;
                Ssigz, Sigran, Ssigq, Czcal, sigmz, sigmq, xx,
nkq, mq, NNq, dm, q, SS, xn, S, ran:real;
e11, e12, e21, e22:double;
SSdt, Sdt, Sq1, Sq2, Sq3, Sq4:real;
                sigta, sigtda, ds1, ds2, d1, d2, S1, S2, Md1, Md2, sig1, sig2:
real;
mSSp, SSp, ktq, nSS, delta, dz, valt, valtd:double;
iz, iq, jz, jn, mz, jr, np, ndz, i, j, m, jc, n4:integer;
f0, f3:text;
qt, norm:vq;
Matrk, MatrSS, MatrSig:vvar;
{-----}
Procedure x_Kq(Pr:integer);
var
a:real;
begin
a:=sqrt(1/nq);
if Pr=1 then begin
for i:=1 to nq do begin
repeat begin
ran:=X_normal;
if abs(ran)>4 then n4:=n4+1;
end
until abs(ran)<4;
norm[i]:=ran;
end;

SS:=0;
for i:=1 to nq do SS:=SS+a*norm[i];
xn:=SS;
end
else begin
for i:=1 to nq-1 do norm[i]:=norm[i+1];
repeat begin
ran:=X_normal;
if abs(ran)>4 then n4:=n4+1;
end
until abs(ran)<4;
norm[nq]:=ran;
SS:=0;
for i:=1 to nq do begin
SS:=SS+a*norm[i];
end;

xn:=SS
end;
end;
{-----}
PROCEDURE REV_GAUSS(Ad:vnn);
VAR
nd,i, j, ir : integer;
cd : double;
BEGIN { PROCEDURE MATR_REV_GAUSS }

```



```

nd:=nz;
for i :=1 to nd do
  for j := 1 to nd do
    if i <> j then C[i, j] := 0
    else C[i, j] := 1;

for i := 1 to nd do
  begin for ir := 1 to nd do
    if ir <> i then
      begin
        cd := Ad[ir, i] / Ad[i, i];
        for j :=i to nd do
          Ad[ir, j] := Ad[ir, j] - Ad[i, j] * cd;
        for j :=1 to nd do
          C[ir, j] := C[ir, j] - C[i, j] * cd;
        end; { if ir <> i }
        cd := Ad[i, i];
        for j := i to nd do
          Ad[i, j] := Ad[i, j] / cd;
        for j := 1 to nd do
          C[i, j] := C[i, j] / cd;
        end;
      } { for i := 1 to nd }
END;
{ PROCEDURE MATR_REV_GAUSS }
{-----}
Function Kqjnew(ji,ii:integer):real;      { output kqji }
var dji:integer;
    kkq:real;
begin
  dji:=(ji-ii);
  if dji<0 then dji:=-dji;
  if dji<nq then
    kkq:=1-dji/nq
  else
    kkq:=0;
Kqjnew:=kkq;
end;
{-----}
Procedure WightMatrix(Nprogn:integer);
var
j1,il,x1,y1:integer;
Nx,Ny,nkq,Sq:real;
begin
for j1:=1 to nz do begin   { 1 }
  for il:=1 to j1 do begin { 2 }
    Sq:=0;
    for x1:=(j1-1)*dNz+1 to (nz-1)*dNz+1+Nprogn do begin
{ 3 }
      for y1:=(il-1)*dNz+1 to (nz-1)*dNz+1+Nprogn do
begin { 4 }
        nkq:=kqjnew(x1,y1);
        Nx:=(x1-(j1-1)*dNz-1);
        Ny:=(y1-(il-1)*dNz-1);
        Sq:=Sq+Nx*Ny*nkq;

```

```

                end;      { 4 }
            end;      { 3 }

            PQ[j1,i1]:=Czcal*Czcal*Sq;
                end;      { 2 }
            end;      { 1 }

for j1:=1 to nz do
    for i1:=j1+1 to nz do PQ[j1,i1]:=PQ[i1,j1];
for j1:=1 to nz do PQ[j1,j1]:=PQ[j1,j1]+1;
end;
{-----}
Procedure XMatrix2(Nprogn:integer);
var
j1:integer;
Nx,Ny,nkq:real;
begin
for j1:=1 to nz do begin      { 1 }
    X2z[1,j1]:=1;
    Nx:=(j1-nz)*dNz-Nprogn;
    X2z[2,j1]:=Nx;
                end;
end;
{-----}
Procedure MNK2PQ(Nprogn:integer;PQj:vnn);
var
    jm,ji:integer;
    Sum11,Sum12,Sum22,Sumt1,Sumt2,SumTdr1:DOUBLE;
    SSt,C11,C12,C22,D11,D12,D22,det,G1,G2:double;
    dN,dN2,dN3,dN4:real;
    zv:vz;
begin
    Sum11:=0;Sum12:=0;Sum22:=0;
    Sumt1:=0;Sumt2:=0;
    XMatrix2(Nprogn);                { OutPut X2z }
    for jm:=1 to nz do begin
        ji:=(nz-jm)*dNz;
        zv[jm]:=zt[jm]-mq*ji*(ji-1)/2;
                end;
    for jm:=1 to nz do begin
        for ji:=1 to nz do begin
            Sum11:=Sum11+X2z[1,jm]*PQj[jm,ji]*X2z[1,ji];
            Sum12:=Sum12+X2z[1,jm]*PQj[jm,ji]*X2z[2,ji];
            Sum22:=Sum22+X2z[2,jm]*PQj[jm,ji]*X2z[2,ji];
            Sumt1:=Sumt1+X2z[1,jm]*PQj[jm,ji]*zv[ji];
            Sumt2:=Sumt2+X2z[2,jm]*PQj[jm,ji]*zv[ji];
                end;
        end;
    C11:=Sum11;
    C12:=Sum12;
    C22:=Sum22;
    det:=C11*C22-C12*C12;
    D11:=C22/det;
    D12:=-C12/det;

```

```

D22:=C11/det;
G1:=Sumt1;
G2:=Sumt2;
valt:=D11*G1+D12*G2;
valtd:=D12*G1+D22*G2;
sigta:=sqrt(D11)*sigmz*60;
sigtda:=sqrt(D22)*sigmz*60;
for mz:=1 to nz do begin           { Residuals sigz[] }
  i:=(mz-nz)*dNz-Nprogn;
  del[mz]:=(valt+valtd*i)-zv[mz];
  Ez[mz]:=Ez[mz]+del[mz];
  Sz[mz]:=Sz[mz]+del[mz]*del[mz];
  end;
SSt:=0;
for jm:=1 to nz do begin
  for ji:=1 to nz do SSt:=SSt+del[jm]*PQj[jm,ji]*del[ji];
  end;
SSt:=SSt/(sigmz*sigmz);
if SSt<0 then begin
  writeln(jc:5,SSt:7:1);
  SSt:=0;
  end;
  SSp:=SSt;                               { 05.10.2009 }
end;
{-----}
BEGIN                                     { Начало программы }
randomize;
assign(f3,'Valuesv2.d2c'); rewrite(f3);
assign(f0,'Matrixes.d2c'); rewrite(f0);
  writeln(f0,'sigz=',sigmaz:9:6,' sigq=',sigmaq:9:6,'
nz=',nz:2,' dNz=',dNz:2);
For iz:=1 to nvar do begin { Начало внешнего цикла iz }
  sigmz=kvar[iz]*sigmaz;
For iq:=1 to nvar do begin { Начало внешнего цикла iq }
  sigmq=kvar[iq]*sigmaq;
  Czcal:=sigmq/sigmz;
  writeln('iz=',iz:1,' iq=',iq:1);
WightMatrix(nk);           { Output: Kxpred }
  for m:=1 to nz do begin
    for jr:=1 to nz do
      Kxpred[m,jr]:=PQ[m,jr];
    end;
REV_GAUSS(Kxpred);
  for m:=1 to nz do begin
    for jr:=1 to nz do
      PQpred[m,jr]:=C[m,jr];
    end;

  mq:=0;
  dsl:=0; ds2:=0;
  ssigz:=0;
  ssigq:=0;
  Sigran:=0;
  NNq:=0;

```

```

SSdt:=0;
S:=0;
n4:=0;
t[1]:=t0;
td[1]:=td0;
x Kq(1);
d $\bar{t}$ [1]:=0;
mz:=1;
zt[mz]:=t[mz]+sigmaz*ran;          { первое измерение }
Ssigz:=Ssigz+(sigmaz*ran)*(sigmaz*ran);
S1:=0; Md1:=0;
S2:=0; Md2:=0;
dm:=0;
for i:=1 to nz do Sz[i]:=0;
for i:=1 to nz do Ez[i]:=0;
                        {****}
for m:=2 to nz*dNz+nk do begin      { другие измерения,
начало }
  x Kq(0);
  d $\bar{t}$ [m]:=mq+sigmaq*xn;
  td[m]:=td[m-1]+dt[m];
  t[m]:=t[m-1]+td[m];
  SSdt:=SSdt+dt[m];
  Ssigq:=Ssigq+(sigmaq*xn)*(sigmaq*xn);
  Sigran:=Sigran+xn*xn;
  if (m<=(nz-1)*dNz+1) then begin   { Output }
  if ((m-1) mod dNz =0) then begin   { Measurements }
    mz:=mz+1;
    repeat begin
      ran:=X normal;
      if abs(ran)>4 then n4:=n4+1;
        end
    until abs(ran)<4;
    zt[mz]:=t[mz]+sigmaz*ran;
    Ssigz:=Ssigz+(sigmaz*ran)*(sigmaz*ran);
    { writeln(F2,m:4,t[m]:14:5,td[m]:10:5,dt[m]:11:7,'  ',
zt[mz]:15:7); }
    end;          { Measurements }
  end;          { Output }
  end;          { другие измерения, конец }
}-----}
mSSp:=0;
For jc:=1 to nc do BEGIN { !!! jc Cycle по реализациям}

MNK2PQ(nk,PQpred);
  d1:=t[nz*dNz-1+nk]-valt;
if abs(d1)>dm then dm:=abs(d1);
  d2:=td[nz*dNz-1+nk]-valtd;
  Md1:=Md1+d1;
  S1:=S1+d1*d1;
  Md2:=Md2+d2;
  S2:=S2+d2*d2;
  mSSp:=mSSp+Ssp;

```

```

if (iz=3) and (iq=3) then begin
  writeln(jc:5, (jc-1+nz)*dNz+nk-1:6, valt:14:5, valtd:10:5,
d1*60:8:4,
  \ SSp=',SSp:4:1);
  writeln(f3,jc:5, (jc-1+nz)*dNz+nk-1:6, valt:14:5, valtd:
10:5,d1*60:8:4,
  \ SSp=',SSp:4:1);
                                end;
Sdt:=0;
for m:=1 to nz*dNz do Sdt:=Sdt+dt[m];   { Sdt: on nz*dNz
revolutions }

NNq:=NNq+1;

for m:=1 to (nz-1)*dNz+nk do begin
  t[m]:=t[m+dNz];
  td[m]:=td[m+dNz];
  dt[m]:=dt[m+dNz];
                                end;

                                { !!! Preparation to Step dNz }
for mz:=1 to nz-1 do
  zt[mz]:=zt[mz+1];

for m:=(nz-1)*dNz+nk+1 to nz*dNz+nk do begin { новый
вектор состояния }
  x Kq(0);
  dt[m]:=mq+sigmaq*xn;
  td[m]:=td[m-1]+dt[m];
  t[m]:=t[m-1]+td[m];
  SSdt:=SSdt+dt[m];
  Ssigq:=Ssigq+(sigmaq*xn)*(sigmaq*xn);
  Sigran:=Sigran+xn*xn;
                                end; { новый вектор состояния }

  repeat begin                    { New measurement }
    ran:=X normal;
    if abs(ran)>4 then n4:=n4+1;
      end
  until abs(ran)<4;
  m:=(nz-1)*dNz+1;
  zt[nz]:=t[m]+sigmaz*ran;
  Ssigz:=Ssigz+(sigmaz*ran)*(sigmaz*ran);
  { writeln((jc+nz-1)*dNz+1:4,t[m]:14:5,td[m]:10:5,dt[m]:
11:7,' \, zt[nz]:13:5);
  writeln(F2,jc*dNz+m:4,t[m]:14:5,td[m]:10:5,dt[m]:11:7,'
\, zt[nz]:15:7); }
                                { New measurement }
END;                                { !!! jc Cycle по реализациям }
{-----}
Mdl:=(Mdl/nc)*60;
dsl:=sqrt(S1/(nc))*60;
sigl:=sqrt(dsl*dsl-Mdl*Mdl);

```

```

        MatrSig[iz,iq]:=sigl;          { MatrSig }
        MatrK[iz,iq]:=sigl/sigta;     { MatrSig }
Md2:=(Md2/nc)*60;
ds2:=sqrt(S2/(nc))*60;
sig2:=sqrt(ds2*ds2-Md2*Md2);
        writeln('iz=',iz:1,' iq=',iq:1);
        writeln(Md1:7:3,sig1:8:4,ds1:8:4,Md2:10:
6,sig2:10:6,ds2:10:6);
        writeln(sigta:8:4,sigtda:10:6);
mSSp:=mSSp/nc;
        MatrSS[iz,iq]:=mSSp;          { MatrSS }

if (iz=3) and (iq=3) then begin
Ssigz:=sqrt(Ssigz/(nc+nk/dNz));
Ssigq:=sqrt(Ssigq/(dNz*nc+nk));
Sigran:=sqrt(Sigran/(dNz*nc+nk));
SSdt:=SSdt/(dNz*NNq+nk);
        writeln('mq=',mq:9:6,' E(dt)=' ,SSdt:9:6);
writeln('Residues:');
for jz:=1 to nz do begin
        Ez[jz]:=60*Ez[jz]/nc;
        RMSz[jz]:=sqrt(Sz[jz]/nc)*60;
        xx:=RMSz[jz]*RMSz[jz]-Ez[jz]*Ez[jz];
        if xx>0 then sigz[jz]:=sqrt(xx)
            else sigz[jz]:=0;
        writeln(jz:2,Ez[jz]:8:4,sigz[jz]:8:4,RMSz[jz]:8:4);
        end;
writeln(Sigran:7:4,' sigz=' ,Ssigz:10:7,' sigq=' ,Ssigq:10:
7,' MSS=' ,mSSp:6:2);
writeln(f3,Sigran:7:4,' sigz=' ,Ssigz:11:8,' sigq=' ,Ssigq:
10:7,' MSS=' ,mSSp:6:2);
        end;
        end; { Конец внешнего цикла iq }
        end; { Конец внешнего цикла iz }

writeln('MatrSS');
writeln(f0,'MatrSS');
for iz:=1 to nvar do begin
        writeln(MatrSS[iz,1]:9:3,MatrSS[iz,2]:9:3,MatrSS[iz,3]
:9:3,MatrSS[iz,4]:9:3,MatrSS[iz,5]:9:3);
        writeln(f0,MatrSS[iz,1]:9:3,MatrSS[iz,2]:9:3,MatrSS
[iz,3]:9:3,MatrSS[iz,4]:9:3,MatrSS[iz,5]:9:3);
        end;

writeln('MatrSig');
writeln(f0,'MatrSig');
for iz:=1 to nvar do begin
        writeln(MatrSig[iz,1]:9:6,MatrSig[iz,2]:9:6,MatrSig
[iz,3]:9:6,MatrSig[iz,4]:9:6,MatrSig[iz,5]:9:6);
        writeln(f0,MatrSig[iz,1]:9:6,MatrSig[iz,2]:9:6,MatrSig
[iz,3]:9:6,MatrSig[iz,4]:9:6,MatrSig[iz,5]:9:6);
        end;

writeln('MatrK');
writeln(f0,'MatrK');
for iz:=1 to nvar do begin

```

```
        writeln(Matrk[iz,1]:8:5,Matrk[iz,2]:8:5,  
Matrk[iz,3]:8:5,Matrk[iz,4]:8:5,Matrk[iz,5]:8:5);  
        writeln(f0,Matrk[iz,1]:8:5,Matrk[iz,2]:8  
:5,Matrk[iz,3]:8:5,Matrk[iz,4]:8:5,Matrk[iz,5]:8:5);  
        end;  
  
{-----}  
close(f0);  
close(f3);  
END.
```

Приложение Е
Фрагменты из истории подготовки монографии

Е.1. Автор и годы работы по тематике монографии



1963



1965



1971



1990



1991



1995



1997



2002

Е.2. Эпизоды

Сцена 1. Руководитель института и руководитель проекта.

Руководитель проекта: «Наши сотрудники И. И. Иванов, П. П. Петров и С. С. Сидоров разработали новую модель движения спутников. Ее название — Стандартный Блок Прогноза (СБП). Алгоритм и программа отлажены, испытаны и успешно работают в автоматизированной системе обработки информации. Характеристики по точности и быстродействию удовлетворяют соответствующим требованиям».

Руководитель института: «Очень хорошо. Подготовьте предложения по поощрению сотрудников».

Сцена 2. Руководитель института и руководитель проекта.

Руководитель проекта: «Наши сотрудники И. И. Иванов, П. П. Петров и С. С. Сидоров разработали алгоритм и программу для оценки погрешностей прогнозирования движения спутников. Ее название — Стандартный Блок ОШибок (СБОШ). Алгоритм и программа отлажены, испытаны и успешно работают в автоматизированной системе обработки информации. Результаты работы алгоритма и программы удовлетворяют необходимым требованиям, а именно, достигнуто соответствие реальных и расчетных статистических характеристик погрешностей прогнозирования движения».

Руководитель института: «Очень хорошо. Подготовьте предложения по поощрению сотрудников. Но хочу заметить, что название программы является не совсем удачным. Предлагаю более подходящее название: Универсальный Единый Блок ОШибок».

055(02)2

Ротап rint ИКИ РАН
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32
Подписано к печати 28.04.10

Заказ 2209

Формат $70 \times 108^1/_{32}$

Тираж 100

9,4 уч.-изд. л.