Институт космических исследований РАН

М.И. Тельпиз

Принцип позиционности для счисления и исчисления функций

Том 1

Москва 2001

Тельпиз М.И.
Принцип позиционности для счисления и исчисления функций.
Том 1. М.: ИКИ РАН, 2001. — 457 с.

Принцип позиционности, используемый в записях и выкладках над числами, хорошо известен. Впервые этот принцип продолжен автором книги на функции. Цель такого продолжения — показать, что эффект от применения позиционности в записях и выкладках над функциями значительно больше, чем над числами.

В этом томе книги начато систематическое изложение разработанных автором понятий и приёмов для реализации позиционности: создано счисление и установлены правила исчисления для функций алгебры логики и показано, что в разработанной нотации класс NP–полных задач совпадает с классом задач P. Полученные результаты позволяют принципиально изменить не только взгляды и подходы к труднорешаемым задачам, но и соответствующим образом изменить технологические подходы к разработке как программного, так и аппаратурного обеспечения.

Книга адресована всем тем, кто интересуется теоретическими и прикладными задачами логики, кто изучает и применяет информационные технологии и думает над их совершенствованием.

В работе над этим томом автору оказывал активную помощь Андрей Анатольевич Фомин.

Оглавление

Предисловие

Основная цель работы сформулирована в названии книги и заключается в разработке системы счисления и исчисления функций, базирующихся на позиционном принципе.

Для начала выбраны функции алгебры логики и для их представления разработана такая система продукций (образующих правил), которая позволяет достаточно просто (с линейной сложностью) записывать классические формулы логики высказываний через позиционные операторы, построенные из продукций. Для выполнения преобразований над позиционными операторами введена система копродукций (это название принято для композиции продукций) и система комбинаторов (комбинаций продукций).

Копродукции и комбинаторы являются расширением системы продукций и позволяют достаточно просто выполнять преобразования над позиционными операторами.

В математических работах не принято говорить о мотивациях, хотя во многих случаях интересно узнать, что же явилось двигателем тех или иных идей. Здесь я не буду говорить о старте (о нём сказано во введении), а хочу привести более поздние рассуждения пятнадцатилетней давности. Эти рассуждения касались принципов работы ЭВМ при достижении физических ограничений. Вот начало этих рассуждений.

Все успехи вычислительной техники первых четырёх поколений достигнуты почти исключительно колоссальными усилиями, затраченными на создание электронных элементов при почти полном сохранении принципов архитектуры, которая почти всегда является последовательной. Физические ограничения не позволят и в дальнейшем добиваться такого же успеха, если не отказаться от последовательной фон Неймановской архитектуры. Здесь имеется почти полное единогласие исследователей. Разногласие лишь в том, что распараллеливать (процессоры, программы, языки, ...) и как. Следующий вопрос, который здесь же возникает, заключается в том, что поскольку имеется дуализм: аппаратура – программное обеспечение, то какую часть алгоритма решения задачи осуществить аппаратурно, а какую программно ? Имеется и ряд других вопросов. Для ответа на все эти вопросы, видимо, было бы хорошо умудриться “взглянуть на них из будущего”, то есть допустить, что ЭВМ-5 уже сделана и поставить вопрос, а что потом: если выйдем на предельные значения физических ограничений, то за счёт чего сможем наращивать производительность ЭВМ–n, когда $n > 5$? Какие принципы нам будут служить ?

В ответ на поставленные вопросы были сформулированы следующие семь принципов.

1. Принцип выбора предмета и уровня распараллеливания.

2. Принцип позиционности.

3. Принцип логической клетки.

4. Принцип однородной вычислительной среды.

5. Принцип программного распараллеливания.

6. Принцип "сжатия" или преобразования "динамической" части алгоритма.

7. Принцип отношения к языкам программирования.

Содержание этих принципов здесь не приводится, поскольку теперь они могут представлять, разве что, лишь исторический интерес, но о них мне хочется сказать, так как этих принципов я придерживался, а они определяли круг исследований.

Этот том книги может рассматриваться как начало систематического изучения предмета позиционности (отдельные его параграфы далеки от завершения и предполагается дальнейшее их развитие). Том состоит из двух частей: первая, охватывающая главы 1 – 6, — это теоретическая часть предмета, а главы 7 и 8 составляют его вторую, прикладную часть, посвящённую всего лишь проблеме выполнимости (с достаточно подробными иллюстрациями).

Разработанная в первой части теория, позволяющая не только записывать позиционные операторы, но и эффективно выполнять преобразования над ними, составляет основное содержание тома и является тем искомым открытием, о котором идёт речь в приведённой во введении (см. п. 2) цитате из [15]. Сказанное подтверждается второй частью тома, где приведено конструктивное доказательство того, что NP–полные задачи решаются полиномиальным алгоритмом. Такой конструктивный алгоритм приведён для задачи выполнимости (а по теореме Кука эта задача является NP–полной).

Обращаем ещё внимание на очень важное преобразование, называемое суперприведением.

Оценка последствий такого рода результатов в полной мере в настоящее время вряд ли возможна. Можно лишь сказать, что для осуществления многих грандиозных проектов снято главное препятствие. Например, японский проект реализуем в полной мере и даже реализуемы более смелые проекты, которые могут ожидаться.

Кажется одно бесспорным. Тематика научных исследований должна резко измениться. Должна измениться концепция, лежащая в основе проектирования как элементной базы компьютера, так и самих компьютеров. Должна измениться концепция языков программирования в том плане, что такие языки станут языками компьютеров и будут отчуждены от человека. Они в свой состав, я надеюсь, будут включать, как один из важнейших элементов, позиционный язык операторов, излагаемый в книге.

И, наконец, самое главное. Эта книга, содержащая позиционный язык счисления и исчисления операторов и позволяющая решать указанные выше задачи, не является последним словом в развитии позиционности, а скорее это лишь начало. А для того, чтобы это действительно было началом, надо полученные результаты усвоить и распространить, а книга должна этому способствовать.

Благодарности. Материал, составивший книгу, потребовал от автора больших усилий, в особенности в избавлении от "сил инерции", связанных с преодолением традиционных подходов. На протяжении всего этого периода (больше двадцати лет) чл.–корр. РАН О.Б.Лупанов всегда находил время внимательно выслушать и доброжелательно предупредить о всех неприятностях, которые мне предстоит преодолеть. Я за это ему бесконечно благодарен.

В восьмидесятых годах я был довольно частым гостем в Академгородке г.Новосибирска. Там я выступал на семинарах и конференциях в Институте математики, ВЦ Сибирского отделения АН и в университете. Хочется сказать большое спасибо всем тем, отзывы которых я слушал на этих выступлениях. Персонально благодарю акад. Ю.Л.Ершова, акад. А.П.Ершова, В.Е.Котова, Д.И.Свириденко, личные контакты и беседы с которыми имели для меня большое значение.

Примерно в этот же период я выступал и в Москве: в Институте электронного машиностроения (семинар акад. В.П.Маслова), в Институте точной механики и вычислительной техники (семинар чл. – корр. Б.А.Бабаяна), в Институте проблем кибернетики (семинар акад.

В.А.Мельникова). Всем участникам этих семинаров и руководителям большое спасибо за внимание и конструктивную критику.

Я благодарен С.П.Перелыгину за приглашение выступить в Институте космических исследований. Выступал я в 1987г. на семинаре тогдашнего директора акад. Р.З.Сагдеева. После нескольких выступлений был приглашён Роальдом Зиннуровичем на работу в ИКИ, за что ему сердечно благодарен. Приглашение я принял и стал сотрудником ИКИ. В семинаре тогдашнего зам. директора В.И.Шевченко сделал серию докладов с активным обсуждением, за что благодарю руководителя и участников, в особенности двух самых активных: В.А.Тарасова и И.В.Петрова.

Внимание со стороны ИКИ не угасает и ныне благодаря активной позиции зам. директора Р.Р.Назирова, что придаёт мне силу и я благодарен за это.

Я обязан и благодарен деловым людям, интерес и поддержка со стороны которых значит для меня очень много. Среди таковых хочу выделить С.Н.Максимова, основного учредителя и президента фирмы Greentech Computing Limited.

Большое спасибо моему основному помощнику А.А.Фомину, без усилий которого как в программировании, так и в наборе всего текста вряд ли могла состояться работа в том виде, который она приняла.

Введение

1 О принципе позиционности

Основной темой наших рассуждений и исследований является принцип позиционности. Он проявился с наибольшей силой в системе счисления (нумерации), основанной на принципе позиционного или поместного значения цифр.

Целью всякой нумерации является изображение любого натурального числа с помощью небольшой группы индивидуальных знаков. Наиболее известным способом записи чисел является тот, на котором основана наша десятичная система нумерации. В этой нумерации все числа от **1** до **9** обозначаются индивидуальными символами **1**, **2** ... **9**, к которым присоединяется знак **0** для **нуля**. Известный французский математик и физик **П.С.Лаплас** (1749 – 1827) так выразил своё восхищение этим принципом [**1**]:

“Мысль выражать все числа **9** *знаками, предавая им, кроме значения по форме, ещё значение по месту, настолько проста, что именно из–за этой простоты трудно понять насколько она удивительна. Как нелегко было притти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учёности Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталось скрытой”.*

Ещё большее восхищение выразил один из великих математиков России **М.В.Остроградский** (1801 – 1862) [**2**]:

“Нам кажется, что после изобретения письменности, самым большим открытием было использование человечеством так называемой десятичной системы счисления.

Мы хотим сказать, что соглашение, с помощью которого мы можем выразить все полезные числа двенадцатью словами и их окончаниями, является одним из самых замечательных созданий человеческого гения ...

Но сразу ли дало результаты это замечательное открытие, сделанное при зарождении общества ? Нет. На часах истории потребовалось пятьдесят веков, чтобы прийти к такому замечательному способу, которым мы обладаем для записи чисел.

Всего около девяти веков прошло с тех пор, как мы научились записывать числа с помощью цифр, каждая из которых имеет своё собственное значение и значение, зависящее от положения. Этот принцип *относительного значения цифр очень прост и, однако, только можно сказать, случайно он стал общепринятым, притом очень медленно, в Европе и в остальном мире.*

Нам кажется, что важность такого глубокого открытия подчёркивают недостаточно и внимания ему уделяют слишком мало.

Действительно, какие вычисления были возможны до этого открытия ?

Всё тормозилось из–за отсутствия такой простой записи чисел.

Все достижения математических наук, астрономии, механики, даже химии зависели от выполнения в уме чрезвычайно сложных действий.

Ныне десятилетний ребёнок может без труда выполнить вычисления, которые не могли даже себе представить великие Архимед, Пифагор или Гиппарх.

Таким образом, арифметика, скромная арифметика, является относительно недавним открытием. Теперь она удивительно проста, если её не усложняют для забавы педантичными ухищрениями".

В этих высказываниях двух великих творцов науки принцип позиционности не упоминается, но о нём говорится по существу, когда каждый из них говорит о значении цифры, зависящей от положения (**Остроградский**) или места (**Лаплас**). Весьма важным является и то, что каждый из них указывает на то, что, несмотря на кажущуюся простоту такой системы записи, она является продуктом длительного исторического развития, и в создании её принимали участие целые народы, можно сказать даже, что создание такой системы является делом всего человечества, хотя осознание самого факта изобретения наступило значительно позже (я бы добавил, что осознание — это частичное, а полного до сих пор нет, что будет пояснено ниже).

Хотя каждый из них говорит о десятичной системе, сама десятичная система на самом деле не обладает какими–либо особыми преимуществами, выделяющими её из позиционных систем с другим основанием. В самом деле, позиционное представление с основанием (или по основанию) **b** определяется правилом:

$$(\ldots a_k \ldots a_3 a_2 a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \ldots)_b = \ldots + a_k \cdot b^k + \ldots + \\ + a_3 \cdot b^3 + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 + a_{-2} \cdot b^{-2} + \ldots + a_{-m} \cdot b^{-m} + \ldots, \qquad (0.1)$$

где каждый символ a_i получает значение, определяемое: 1) его начертанием, 2) его положением в записи числа. Наша традиционная десятичная система счисления — это, разумеется, тот частный случай, когда **b** равно десяти, и когда значения a_i выбираются из *десятичных цифр* **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**; в этом случае индекс **b** в **(0.1)** можно опустить. В общем случае в качестве **b** берут любое целое число, большее единицы и числа a_i — это целые числа из интервала: $0 \le a_i < b$. Так получаются стандартные двоичная ($\mathbf{b = 2}$), троичная ($\mathbf{b = 3}$), четверичная ($\mathbf{b = 4}$), ... системы счисления. Выбор основания является принципиально произвольным. Понимание этого факта означает осознание принципа позиционности. Есть все основания считать, что эта заслуга принадлежит **Б.Паскалю** (1623 – 1662). Им в **1654** году была впервые разобрана сущность нумерации с произвольным основанием в сочинении *"О делимости чисел, выведенной с помощью одного сложения их цифр"*, опубликованной в **1665** году.

Усвоив с детства позиционный способ нумерации, мы склонны недооценивать это замечательное культурное достижение человечества. Однако история математики говорит **[1, 3]**, что такие высококультурные народы древности, как египтяне и даже греки с их изумительно тонкой и глубокой математической культурой, не создали позиционной нумерации. Трудности пути к этому великому открытию видны из истории развития систем обозначения чисел у разных народов **[4, 5]**. Эти системы (за совсем небольшим исключением) были непозиционными. В настоящее время сохранилась и используется (частично) лишь одна из них — римская, в которой узловыми числами являются: **I** — единица, **V** — пять, **X** — десять, **L** —пятьдесят, **C** — сто, **D** — пятьсот, **M** — тысяча. **Нуля** нет [1, 3, 5].

Нельзя согласиться с тем, что, скажем, *"ионийская"* система нумерации в пределах чисел, с которыми греческим математикам приходилось оперировать, вполне удовлетворяла требованиям практики, поэтому не возникала необходимость поиска другой системы, более совершенной. Для этого достаточно обратить внимание на необходимость введения *"октад"* (это 10^8) у Архимеда (287 — 212) и аналогичных им *"тетрад"* (это 10^4) у Аполлония (260 — 170). Основная цель сочинения **Архимеда** *"Псаммит"* (*"Исчисление песчинок"*), в котором использовались *"октады"* (см. **[6]**, заключалось именно в создании систематического приёма построения и словесного обозначения сколь угодно больших чисел (это, в современной терминологии — потенциальная осуществимость).

Внимательный анализ разработанной нумерации этими двумя гениями древности показывает, что они довольно близко подошли к мысли о позиционности, но всё же эта гениальная идея от них ускользнула, ускользнула и сопутствующая мысль о введении нуля, о котором **Ван дер Варден** (р. в 1903 г.) сказал [**3**]: *"самая важная цифра есть нуль. Это была гениальная идея — сделать* `нечто` *из ничего, дать этому* `нечто` *имя и изобрести для него символ".*

Я считаю, что не являются состоятельными доводы [**1**], трактующие в противовес [**2**], что это открытие не могло быть случайным, поскольку имелось разновременное и самостоятельное возникновение позиционной системы по крайней мере у трёх народов: 1) более чем за две тысячи лет до нашей эры в долине Тигра и Евфрата у вавилонян, 2) в начале нашей эры у племён майя, бывших обитателей полуострова Юкатан в Центральной Америке, и 3) в **VIII** – **IX** веках нашей эры в Индии.

Все эти три открытия были (поскольку в них принцип позиционности просматривается фактически) и всех этих трёх открытий не было (или, точнее, все они были случайными эмпирическими приёмами), поскольку понимания содеянного не было, иначе каждая из этих систем получила бы усовершенствование, базирующееся на принципе позиционности. Понимание (опять неполное, о более полном будет ещё ниже) содеянного зафиксировано было лишь **Б.Паскалем** в упомянутой выше работе, поскольку понимание принципа позиционности не означает иметь шестидесятиричную систему счисления (не имевшей, кстати говоря, абсолютного характера) как у вавилонян, *ни* двадцатиричную (с признаками пятиричной) как у майя, *ни* десятичную как у индийцев, а — произвольную.

Таким образом, возраст принципа позиционности (как частично осознанному открытию) не превышает **350** лет. Я понимаю, что мне могут указать на то [**1**], что первая точно датированная надпись, в которой встречается знак *нуля*, относится к **876** году (в ней число 270 записано с использованием *нуля*, или привести цитату из [**3**]: *" . . . в конце концов индийским цифрам была суждена победа. Как и во всех других областях культуры, здесь на первом месте стояла Италия. В* 1202 *году появилась прекрасная книга по арифметике — "Liber Abaci" Леонарда Пизанского, прозванного Фибоначчи".*

Я не буду говорить, что эти доводы не убедительны, поскольку новая система отторгалась: в **1299** году появился указ властей города Флоренции, запрещающий употреблять индийский цифры, а в **1494** году франкфуртский бургомистр увещевал конторщиков знать меру с этими цифрами, то есть не слишком часто использовать их. Я понимаю, что это не очень убедительно. Поэтому отвечаю на это так: появление нуля или книги с пропагандой индийских цифр ещё не означает, что пропагандисты понимали все достоинства того, что они пропагандировали. Я думаю, что они интуитивно чувствовали, что у этой системы имеются достоинства, но этого мало, когда не известно какие. А вот то, что до появления указанной выше работы, **Б.Паскаль** сконструировал суммирующую машину (**1642** год), говорит о глубоком понимании принципа позиционности: последовательно проведённый позиционный способ обозначения имеет огромные преимущества для техники счёта. Достаточно сравнить хотя бы умножение в современных цифрах с вычислением, например, в римских цифрах:

$$15 \cdot 133 = 1995, \qquad XV \cdot CXXXIII = MCMXCV.$$

Если для первого вычисления мы обращаемся с десятками, сотнями, ... совершенно так же, как если бы они были единицами и только передвигаем их на одно, два, ... места влево, то для вычисления в римских цифрах это будет совершенно другое. В самом деле, для римлянина нет ничего общего в произведениях: $CCC \cdot LXX$ и $III \cdot VII$.

Принципиальное различие между литерной (любой непозиционной) и позиционной системами счисления не только в технике счёта, но и в ускользающем от внимания исследователей факте: **если в позиционной системе при записи величин длина текста растёт линейно, то в литерной — с конечным алфавитом для записи тех же величин длина текста будет расти экспоненциально**.

Последнее означает, что если бы мы отказались от принципа позиционности в представлении чисел, то современная вычислительная математика не могла бы существовать, и наличие современных компьютеров (само их наличие проблематично) мало что бы изменило.

2 Об арифметизации функций

Анри Пуанкаре (**1854 – 1912**), рассуждая о будущем математики, указывает (см. [**7**] стр. 294): *“Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук”*.

Ретроспективный взгляд должен убедить нас в том, что последовательно проведённый позиционный способ обозначений, имеющий огромные преимущества перед литерным, не должен останавливаться на числах, а должен быть продолжен и на функции: ведь понятие функции — это следующие после числа фундаментальное понятие в математике. И если это не было сделано, то у нас есть все основания утверждать, что либо понятие позиционности не было осознано до конца, либо не извлекаются уроки из истории нашей математической науки. В самом деле, в современной математике в представлении функции $f(x)$ используется позиционность лишь для x, но для f мы продолжаем использовать непозиционные символы. Действительно, те задачи дискретной математики и искусственного интеллекта (логические преобразования, логический вывод, логическое и функциональное программирование и многое другое), которые рассматриваются в теории **NP** – полноты, используют текст в непозиционной записи. В самом деле, символы логических операций: & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\oplus$ (сложение по модулю два), $\downarrow$ (функция Вебба), / (штрих Шеффера) и другие не изменяют свой смысл от местоположения. Те же расширения системы операций, которые предпринимаются по линии увеличения арности, тоже сохраняют свой литерный характер, а потому не избавляют и избавить не могут от *“комбинационных взрывов”*.

Единственный путь — это необходимость расширения принципа позиционности с аргументов функции и на символы этих функций, то есть в осуществлении полной арифметизации функций.

Заметим, что арифметизация **К.Гёделя** (**1906** – **1978**), осуществлённая им в **1931** году при доказательстве теоремы о неполноте, так же далека от сформулированной выше цели, как системы **Архимеда** и **Аполлония**, изложенные в их *“Псаммите“* и *“Быстросчёте”* от позиционного представления чисел, но эти аналогии весьма полезны в том плане, что они указывают на новые возможности, которые ещё должны быть реализованы.

Необходимость полной арифметизации функций на базе принципа позиционности становится актуальной задачей не только в прикладной (вычислительной) математике, но и для информационных технологий и для разработчиков новых архитектур компьютеров, в особенности с приближением к предельным значениям физических ограничений (скорость, миниатюризация). Проиллюстрируем сказанное на следующих фактах недавней истории.

Как известно **[8]**, общая цель японского проекта — разработать компьютеры более производительные, более гибкие, более компетентные, более интеллектуальные. Решения задач и получение логических выводов — это главная цель системы пятого поколения, которая, кроме всего прочего, должна позволить достигнуть “дружелюбия” по отношению к пользователю.

Теперь мы знаем, что сформулированные цели не были достигнуты в полной мере (срок ввода в строй первого прототипа системы предполагался в **1991** году) и не могли быть достигнуты без соответствующего фундаментального открытия (о нём ниже).

После опубликования проекта (**1981** год), он был подвергнут критическому анализу **[9, 10]**. Например, автор знаменитого метода резолюций **Дж.Робинсон** в публичной лекции, прочитанной в институте **ICOT** в Токио в **1983** году, указал (см. **[10]**) в очень мягкой форме, что из намеченного может быть достигнуто, а что — проблематично.

Критика привела к тому, что характер проекта был уточнён и, самое главное, была изменена конечная цель, а именно, указывалось **[11]**, что проект вовсе не предполагает создания по завершении десятилетнего этапа какого–либо коммерческого продукта: его цель — выполнение основных исследований, связанных с разработкой новой технологии компьютеров.

Критика имела сильные доводы. Ко времени создания японского проекта математикам было известно, что на пути создания эффективных методов решения дискретных задач возникает центральная теоретико–методологическая проблема всей дискретной математики: Можно ли исключить перебор при решении дискретных задач ? Иначе говоря, речь идёт о принципиальной возможности найти нужное решение не перебирая всех или почти всех вариантов в задаче. Эта проблема имеет не только чисто математическое, но и глубокое познавательное значение. Прикладная сторона (заметим, что задача логического вывода — это задача дискретной математики) этой проблемы такова: в переборных задачах, как правило, имеется конечное множество вариантов, среди которых нужно найти решение. Например, двоичных векторов размерности n имеется 2^n и, перебрав это экспоненциальное множество векторов, мы можем найти те векторы, которые удовлетворяют заданному свойству. Но с ростом n число векторов быстро растёт, и задача становится “трудноразрешаемой”, то есть практически неразрешимой. Стало общепринятым считать переборную задачу решаемой эффективно, если имеется алгоритм, решающий её за время, ограниченное полиномом от размерности задачи.

Таким образом, в указанной выше проблеме главными объектами теории являются: класс **NP** всех переборных задач и класс **P** переборных задач, решаемых за полиномиальное время. Относительно классов **P** и **NP** имеется целый ряд исследователей, среди которых здесь отметим лишь результаты двух лауреатов премии **Тьюринга** [**12**]: **С.Кука** и **Р.Карпа**.

В **1971** году **С.Кук** показал в своей основополагающей работе [**13**], что проблема выполнимости полна в классе **NP** относительно полиномиальной редукции, или короче, **NP**–полна. Грубо говоря, **NP**–полные проблемы имеют максимальную трудность среди всех проблем перебора. Отсюда следует, что если проблема выполнимости легка, то любая проблема перебора легка (то есть принадлежит к классу **P**). Из более точной формулировки теоремы **Кука** вытекает даже более сильное утверждение, а именно такое: быстрый алгоритм для решения проблемы выполнимости вполне механическим способом приводил бы к быстрой разрешающей процедуре для любой эффективно заданной проблемы перебора. Такой алгоритм служил бы отмычкой к проблемам перебора из всех областей математики.

В **1972** году **Р.Карп** значительно расширил список **NP**–полных проблем (см. [**14**]). К настоящему моменту большинство естественно возникающих проблем перебора классифицированы либо как **P**, либо как **NP**–полные (см. [**15**]).

В [**15**] (на стр. **28**) читаем: *"Вопрос о том, действительно ли* **NP***–полные задачи труднорешаемы, в настоящее время считается одним из основных открытых вопросов современной математики и теоретической кибернетики. Вопреки готовности большинства специалистов считать, что все* **NP***–полные задачи труднорешаемы, прогресс как в доказательстве, так и в опровержении этого далеко идущего предположения весьма незначителен. Однако, несмотря на отсутствие доказательства того, что из* **NP***–полноты следует труднорешаемость,* **NP***–полнота задачи означает, что для её решения полиномиальным алгоритмом требуется по крайней мере крупное открытие"*.

И тем не менее, имеются все основания утверждать, что для того, чтобы **NP**–полные задачи имели решение полиномиальным алгоритмом, необходимо распространить принцип позиционности и на представления функций, с помощью которых записываются условия **NP**–полной задачи. В случае задачи выполнимости, к которой сводятся труднорешаемые задачи, это значит, что принцип позиционности должен быть распространён на представления функций алгебры логики.

Арифметизация функций алгебры логики на базе принципа позиционности, то есть разработка позиционного счисления функций и системы исчисления, то есть системы оперирования с функциями в позиционном их представлении, началось в первой половине **1978** года. Первые публикации на эту тему появились лишь в **1981** году. Список [**16 – 21**] не охватывает всего объёма работы: начало исследований отражено в краткой форме в статье [**17**]. В более развёрнутом виде это сделано в публикациях [**16, 18**]. Расширение принципа позиционности и его развитие отражено в [**19 – 21**]. Позднее было показано, что принцип позиционности аналогичным образом распространяется и на функции **k**–значной и **k·m**–значной логиках. Но всё же самое главное — осмысление и систематичность, имеющиеся к этому времени результатов, составляют излагаемый ниже материал.

Глава 1

Начальные понятия позиционности

1.1 Определения и некоторые понятия классической алгебры логики

Поскольку основные понятия позиционности будут развёрнуты для функций алгебры логики, то начнём с того, что приведём в краткой форме хорошо известные понятия из классики (здесь и в дальнейшем этим словом заменяется фраза *"из классического раздела функций алгебры логики"*), следуя источникам **[22]**, **[23]**, **[24]**, **[25]**, **[26]**, по которым можно, в случае необходимости, узнать и более глубокие результаты.

В классике рассматриваются двоичные **n** – мерные упорядоченные наборы (векторы размерности **n**)

$$X_n = (x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1.1}$$

которые составляют область определения для функций

$$y = f(X_n), \tag{1.2}$$

значения которой также двоичны, то есть $x_1, x_2, ..., x_n, y \in \{0, 1\}$.

Различных двоичных векторов размерности **n** имеется ровно $m = 2^n$, а функций, являющихся векторами **m** – ой размерности, ровно 2^m.

Значит, в случае $\mathbf{n = 1}$, имеются четыре функции: $y_0 = 0$, $y_1 = \bar{x}$, $y_2 = x$, $y_3 = 1$.

Функции y_0 и y_3 не изменяют своих значений при изменении значений аргумента, поэтому их называют функциями – константами. Функция y_1 принимает значение **1**, когда $\mathbf{x = 0}$, и значение **0**, когда $\mathbf{x = 1}$. Эту функцию называют отрицанием или инвертированием, которое читается "не **x**". Функция y_2 всегда имеет то же значение, что и аргумент **x**.

Таблица 1

x_1	x_2	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

В случае двух независимых переменных x_1 и x_2 общая таблица соответствия представлена *таблицей* **1**.

Из **16** различных функций *двух* независимых переменных, *шесть* встречаются среди функций *одной* независимой переменной. К ним относятся *две* функции – константы ($y_0 = 0$ и $y_{15} = 1$), *две* функции повторения ($y_{10} = x_1$ и $y_{12} = x_2$) и *две* функции отрицания ($y_3 = \bar{x}_2$ и $y_5 = \bar{x}_1$).

Из оставшихся *десяти* функций *две* (y_4 и y_{11}) не являются самостоятельными, так как они отличаются от соответствующих им функций y_2 и y_{13} лишь порядком расположения аргументов. Для оставшихся теперь *восьми* функций *двух* независимых переменных применяют специальные обозначения.

Функция $y_1 = x_1 \downarrow x_2$ называется функцией **Вебба (**или **Дагера)** или **стрелкой Пирса**.

Функцию $y_2 = x_1 \leftarrow x_2$ называют **запретом**.

Функция $y_6 = x_1 \oplus x_2$ называется **сложением по модулю 2**. Её иногда называют *исключённым* **или**.

Функция $y_7 = x_1 \,/\, x_2$ носит название функции **Шеффера (**или **штрих Шеффера)**.

Функция $y_8 = x_1 \,\&\, x_2$ называется **конъюнкцией** и читается "x_1 и x_2" (иногда используется и обозначение $y_8 = x_1 \cdot x_2$ и даже иногда точку опускают, когда контекстуально подразумевается).

Функцию $y_9 = x_1 \sim x_2$ называют **эквиваленцией** или **равнозначностью**. Её читают *"x_1 эквивалентно (равнозначно) x_2 "*.

Функцию $y_{13} = x_1 \to x_2$ называют **импликацией**. При её чтении применяют выражение *"если x_1, то x_2"* или же *"из x_1 следует x_2"*, или же *"x_1 имплицирует x_2"*.

Функция $y_{14} = x_1 \vee x_2$ называется **дизъюнкцией** и её читают "x_1 или x_2".

Функции алгебры логики *одного* и *двух* переменных (как и функции любого числа переменных) могут рассматриваться не как функции, а как операции на множестве всех функций алгебры логики. В частности, *отрицание* может рассматриваться как *унарная (одноместная) операция, а*

$$\{\downarrow,\ \oplus,\ /,\ \&,\ \sim,\ \vee,\ \to,\ \leftarrow\} \tag{1.3}$$

как *бинарные (двуместные) операции.* Значение унарной и бинарных операций в общей теории функций алгебры логики состоит в том, что из них может быть построена любая функция алгебры логики. В этих построениях важную роль играют следующие равенства:

$$x \,\&\, x = x, \quad x \vee x = x, \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \,\&\, x_2 = x_2 \,\&\, x_1, \quad (x_1 \,\&\, x_2) \,\&\, x_3 = x_1 \,\&\, (x_2 \,\&\, x_3), \\ x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, \quad (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3), \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (x_1 \,\&\, x_3), \\ x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3), \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

$$\overline{x_1 \,\&\, x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}, \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}, \tag{1.7}$$

$$\overline{\overline{x}} = x, \tag{1.8}$$

$$x_1 \,\&\, (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1, \quad x_1 \vee (x_2 \,\&\, \bar{x}_2) = x_1, \tag{1.9}$$

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2, \quad x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \,\&\, \bar{x}_2, \tag{1.10}$$

$$x_1 \sim x_2 = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2), \quad x_1 \oplus x_2 = (x_1 \,\&\, \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \,\&\, x_2). \tag{1.11}$$

Равенства **(1.5)** означают **ассоциативность** и **коммутативность** конъюнкции и дизъюнкции. Равенства **(1.6)** — это законы **дистрибутивности** конъюнкции и дизъюнкции. Равенства **(1.7)**, называемые **законами де Моргана**, позволяют выразить конъюнкцию через *дизъюнкцию и отрицание*, а дизъюнкцию — через *конъюнкцию и отрицание.*

Средством для построения функций алгебры логики является **суперпозиция**, или, что то же самое, *подстановка одних функций алгебры логики вместо аргументов в другие функции.* Возможность такой подстановки обуславливается тем, что, в силу определения, области значений и аргументов в функциях алгебры логики совпадают.

Отметим, что инвертирование может быть *"спущено"* до независимых переменных аргумента X_n, а бинарные операции не являются независимыми и из списка **(1.3)** можно составить множество подсписков, которыми можно обходиться.

С переходом уже к трём переменным некоторые функции, такие как

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1\&(x_2\&x_3 \vee \bar{x}_2\&\bar{x}_3) \vee \bar{x}_1\,\&\,(x_2\&\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\&x_3), \tag{1.12}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1\&(x_2 \vee x_3) \vee x_2\&x_3 \vee \bar{x}_1\,\&\,\bar{x}_2\&\bar{x}_3 \tag{1.13}$$

для своего представления требуют многократного вхождения переменных в подсписке операций $\{\,^-, \&, \vee\}$. С ростом числа переменных положение ещё больше усложняется. Некоторое снижение числа вхождений переменных может быть достигнуто расширением числа операций в подсписке. Например, в подсписке операций $\{\,^-, \&, \vee, \sim, \oplus\}$ функция **(1.12)** будет иметь представление

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1\&(x_2 \sim x_3) \vee \bar{x}_1\,\&\,(x_2 \oplus x_3).$$

Расширение списка операций за счет увеличения *арности* самих операций в классике сталкивается с теми же проблемами, какие возникают в числовых литерных системах. Поэтому, мы расширим число операций *почти бесплатно* увеличением *арности* на базе позиционности. Но это увеличение будет иметь вначале несколько частный характер и будет использовать понятие *симметрии*.

1.2 Простой и сложный позиционные s – операторы

Арифметизация функций алгебры логики будет осуществлена на базе двоичной системы счисления, однако для того, чтобы не писать слишком длинные слова, мы будем использовать наряду с двоичной **Zh** четверичную **Vh**, восьмеричную **Ah** и шестнадцатиричную **Sh** системы счисления. Чтобы не указывать каждый раз на систему счисления, в которой записаны цифры, примем θ для двоичного нуля и $\bar{\theta}$ для двоичной единицы и

$$Zh \rightleftharpoons \{\theta, \bar{\theta}\}, \quad Vh \rightleftharpoons \{\nu, \tau, \bar{\tau}, \bar{\nu}\} \rightleftharpoons \{\theta\theta, \bar{\theta}\theta, \theta\bar{\theta}, \bar{\theta}\bar{\theta}\},$$

$$Ah \rightleftharpoons \{\omega, \downarrow, \oplus, /, \overline{/}, \overline{\oplus}, \bar{\downarrow}, \bar{\omega}\} \rightleftharpoons \{\theta\nu, \bar{\theta}\nu, \theta\tau, \bar{\theta}\tau, \theta\bar{\tau}, \bar{\theta}\bar{\tau}, \theta\bar{\nu}, \bar{\theta}\bar{\nu}\},$$

$$Sh \rightleftharpoons \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \bar{7}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}\} \rightleftharpoons \{\theta\omega, \bar{\theta}\omega, \theta\downarrow, \bar{\theta}\downarrow,$$
$$\theta\oplus, \bar{\theta}\oplus, \theta/, \bar{\theta}/, \theta\overline{/}, \bar{\theta}\overline{/}, \theta\overline{\oplus}, \bar{\theta}\overline{\oplus}, \theta\bar{\downarrow}, \bar{\theta}\bar{\downarrow}, \theta\bar{\omega}, \bar{\theta}\bar{\omega}\},$$

полагая, что во второй фигурной скобке парой цифр определяется соответствующая цифра в первой скобке. А это значит, что имеются: **одно** –, **двух** –, **трёх** – и **четырёхбитовые** *нули*: θ, $\nu = \theta\,\theta$, $\omega = \theta\,\theta\,\theta$, $0 = \theta\,\theta\,\theta\,\theta$; — *единицы* : $\bar\theta$, $\tau = \bar\theta\,\theta$, $\downarrow = \bar\theta\,\theta\,\theta$, $1 = \bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta$; **двух** –, **трёх** – и **четырёхбитовые** *двойки*: $\bar\tau = \theta\,\bar\theta$, $\oplus = \theta\,\bar\theta\,\theta$, $2 = \theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta$; – *тройки*: $\bar\nu = \bar\theta\,\bar\theta$, $/ = \bar\theta\,\bar\theta\,\theta$, $3 = \bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta$; и так далее. Значит, цифры в наших системах несут на себе и литерные свойства, указывающие на число битов, занимаемые числом.

Чаще всего будем придерживаться нормализованной формы записи чисел (выбор такой формы станет ясным в следующем параграфе). **N** – битовое число (где $\mathbf{N = 8q + p}$ и $\mathbf{0 \le p \le 7}$) будет иметь в своей записи в начале и конце по **q** цифр, принадлежащих **Sh** (если $\mathbf{q = 0}$, то таких цифр не будет). В середине одну цифру, принадлежащую **Zh, Vh, Ah, Sh** для **p**, равного **1, 2, 3, 4** соответственно. В случае $\mathbf{p = 6}$ в середине будут **2** цифры, принадлежащие **Ah**, а если **p**, равно **5** или **7**, то в середине будут **3** цифры из принадлежащие **Vh, Zh, Vh** или **Ah, Zh, Ah** соответственно.

Например, **5-**и, **6-**и, **7-**и, **8-**и битовые числа:

$$\bar\theta\bar\theta\theta\theta\bar\theta,\ \ \theta\bar\theta\bar\theta\bar\theta\theta\theta,\ \ \bar\theta\theta\theta\theta\bar\theta\theta\bar\theta,\ \ \theta\bar\theta\theta\theta\bar\theta\bar\theta\theta\theta$$

в нормализованной форме будут иметь записи:

$$\bar\nu\,\theta\,\bar\tau,\quad \bar\downarrow\downarrow,\quad \downarrow\theta\,\overline{\oplus},\quad 2\;3$$

соответственно.

Замечание 1. В системе **Ah** мы использовали знаки логических операций $\downarrow, \oplus, /$ и их отрицания для записи трёхбитовых цифр. Может возникнуть вопрос. `Не приведёт ли это к недоразумению ?` Отвечаем. `Не приведёт`.

Утверждение в *замечании* **1** станет ясным из следующего ниже определения симметрического оператора (кратко: **s -** оператора).

Простым позиционным **s** – оператором называется вектор α_n размерности $\mathbf{n + 1}$ с двоичными координатами $\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, то есть

$$\langle\alpha_n\rangle \ \rightleftharpoons\ \langle\alpha^0,\, \alpha^1,\, \alpha^2,\, \ldots ,\alpha^n\rangle, \tag{1.14}$$

который в результате его применения к вектору — аргументу **(1.1)** даёт:

$$\langle \alpha^r \rangle \;\rightleftharpoons\; \langle \alpha_n \rangle \,(X_n)\,, \quad r = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1.15}$$

Применение оператора **(1.14)** к таблице определения X_n, то есть табуляграмма этого применения **(1.15)**, даёт координаты результирующего вектора размерности 2^n. Например, случаи $\mathbf{n = 2}$ и $\mathbf{n = 3}$ представлены *таблицами* **2** и **3** соответственно. В этих таблицах под векторами $\langle\omega\rangle$, $\langle\downarrow\rangle$, $\langle\oplus\rangle$, … и $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, … записаны результаты их применения к $X_2 = (x_1, x_2)$ и $X_3 = (x_1, x_2, x_3)$ соответственно. Сравнивая *таблицу* **2** с *таблицей* **1**, получаем подтверждение заявлению в *замечании* **1**.

Таблица 2

x_1	x_2	ω	$\downarrow$	$\oplus$	$/$	$\overline{/}$	$\overline{\oplus}$	$\overline{\downarrow}$	$\overline{\omega}$
θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	0	1	2	3	4	5	6	7	$\bar 7$	$\bar 6$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$	$\bar 0$
θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Замечание 2. Сравнение таблиц показывает ещё, что $\& = \overline{/}$, $\sim = \overline{\oplus}$, $\vee = \overline{\downarrow}$, а значит $\overline{\&} = /$, $\overline{\sim} = \oplus$, $\nabla = \downarrow$, и таким образом арифметизация распространена на все бинарные операции. То, что как будто бы не охвачены операции $\rightarrow$ и $\leftarrow$, не должно нас смущать, так как $x_1 \rightarrow x_2 = \langle\overline{\downarrow}\rangle\,(\bar{x}_1, x_2)$, $x_1 \leftarrow x_2 = \langle\overline{/}\rangle\,(x_1, \bar{x}_2)$ и для самой

унарной операции имеем:

$$\bar{x} \,=\, \langle \tau \rangle \,(x), \quad x \,=\, \langle \bar{\tau} \rangle \,(x),$$

но унарные **s -** операторы, как простые, использоваться не будут, а сами унарные операции будут использованы в преобразованиях таблиц определения, о чём пойдёт речь ниже.

Теперь, используя *таблицу* **3**, обратим внимание на то, что функции f_1 и f_2 из **(1.12)** и **(1.13)** с помощью позиционных **s -** операторов получают представление

$$f_1(X_3) \,=\, \langle \bar{5} \rangle (X_3), \quad f_2(X_3) \,=\, \langle \bar{2} \rangle (X_3).$$

Обобщением *простого* позиционного **s -** оператора является *сложный* позиционный **s -** оператор. Для его определения примем:

$$n \,=\, k + k_1 + k_2 + \ldots + k_j,$$

где в правой части равенства — все целые числа, и

$$r^1 \,=\, k \,+\, k_1,$$

$$r^2 \,=\, r^1 \,+\, k_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r^j \,=\, r^{j-1} \,+\, k_j; \quad r^j \,=\, n.$$

Сложным позиционным **s -** оператором называется вектор

$$\langle \alpha_k^{(0)} \,.\, \alpha_{r^1+1}^{(1)} \,.\, \alpha_{r^2+1}^{(2)} \,. \ldots .\, \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle,$$

где $\langle \alpha_k^{(0)} \rangle$, $\langle \alpha_{r^1+1}^{(1)} \rangle$, $\langle \alpha_{r^2+1}^{(2)} \rangle$, $\ldots$, $\langle \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle$ — *простые* позиционные **s -** операторы размерности $k+1$, r^1+2, r^2+2, r^j+2 соответственно, который в результате его применения к аргументу **(1)** даёт:

$$\langle z \rangle \,\rightleftharpoons\, \langle \alpha_k^{(0)} \,.\, \alpha_{r^1+1}^{(1)} \,.\, \alpha_{r^2+1}^{(2)} \,.\, \ldots\, \alpha_{r^j+1}^{(j)} \rangle \,(X_n),$$

где

$$\begin{aligned}
\langle y_1 \rangle &= \langle \alpha_k^{(0)} \rangle \,(X_k), & X_k &= (x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_k),\\
\langle y_2 \rangle &= \langle \alpha_{r^1+1}^{(1)} \rangle \,(X_{r^1}), & X_{r^1} &= (y_1,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots\,,\, x_{r^1})\\
\langle y_3 \rangle &= \langle \alpha_{r^2+1}^{(2)} \rangle \,(X_{r^2}), & X_{r^2} &= (y_2,\, x_{r^1+1},\, x_{r^1+2},\, \ldots\,,\, x_{r^2}),
\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . .

$$\begin{aligned} \langle y_j \rangle &= \langle \alpha^{(j-1)}_{r^{j-1}+1} \rangle \, (X_{r^{j-1}}), & X_{r^{j-1}} &= (y_{j-1},\, x_{r^{j-2}+1},\, x_{r^{j-2}+2},\, \ldots\, , x_{r^{j-1}}), \\ \langle z \rangle &= \langle \alpha^{(j)}_{r^{j}+1} \rangle \, (X_{r^{j}}), & X_{r^{j}} &= (y_{j},\, x_{r^{j-1}+1},\, x_{r^{j-1}+2},\, \ldots\, , x_{r^{j}}). \end{aligned}$$

Замечание 3. В сложном позиционном **s -** операторе симметричность имеется лишь в составляющих его простых **s -** операторах.

В *таблице* **4** приведены примеры сложных **s -** операторов для $k = 2,\ k_1 = 1$ (здесь приняты такие же сокращения, что и в *таблицах* **2** и **3**).

Таблица 4

x_1	x_2	$\downarrow$	$\oplus$	$/$	$\downarrow$	x_3	$\downarrow . \downarrow$	$\downarrow . \oplus$	$\downarrow . /$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Продолжение таблицы 4

$\oplus$	x_3	$\oplus . \downarrow$	$\oplus . \oplus$	$\oplus . /$	$/$	x_3	$/ . \downarrow$	$/ . \oplus$	$/ . /$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$
θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$

Если теперь записать то, что представлено в *таблицах* **2, 3** и **4**, то будем иметь *(координаты векторов не отделяются запятой, если для* *их записи используются литеры из алфавитов* **Zh, Vh, Ah** *и* **Sh** *)*:

$$\begin{array}{llll}\langle\omega\rangle(X_2) = \langle 0\rangle, & \langle\downarrow\rangle(X_2) = \langle 1\rangle, & \langle\oplus\rangle(X_2) = \langle 6\rangle, & \langle/\rangle(X_2) = \langle 7\rangle,\\ \langle\bar\omega\rangle(X_2) = \langle\bar 0\rangle, & \langle\overline{\downarrow}\rangle(X_2) = \langle\bar 1\rangle, & \langle\overline{\oplus}\rangle(X_2) = \langle\bar 6\rangle, & \langle\overline{/}\rangle(X_2) = \langle\bar 7\rangle.\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}\langle 0\rangle(X_3) = \langle 00\rangle, & \langle 1\rangle(X_3) = \langle 10\rangle, & \langle 2\rangle(X_3) = \langle 61\rangle, & \langle 3\rangle(X_3) = \langle 71\rangle,\\ \langle 4\rangle(X_3) = \langle\bar 76\rangle, & \langle 5\rangle(X_3) = \langle\bar 66\rangle, & \langle 6\rangle(X_3) = \langle\bar 17\rangle, & \langle 7\rangle(X_3) = \langle\bar 07\rangle,\\ \langle\bar 4\rangle(X_3) = \langle 7\bar 6\rangle, & \langle\bar 5\rangle(X_3) = \langle 6\bar 6\rangle, & \langle\bar 6\rangle(X_3) = \langle 1\bar 7\rangle, & \langle\bar 7\rangle(X_3) = \langle 0\bar 7\rangle,\\ \langle\bar 0\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 0\rangle, & \langle\bar 1\rangle(X_3) = \langle\bar 1\bar 0\rangle, & \langle\bar 2\rangle(X_3) = \langle\bar 6\bar 1\rangle, & \langle\bar 3\rangle(X_3) = \langle\bar 7\bar 1\rangle.\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}\langle\downarrow.\downarrow\rangle(X_3) = \langle\bar 10\rangle, & \langle\downarrow.\oplus\rangle(X_3) = \langle 1\bar 1\rangle, & \langle\downarrow./\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 1\rangle,\\ \langle\oplus.\downarrow\rangle(X_3) = \langle\bar 60\rangle, & \langle\oplus.\oplus\rangle(X_3) = \langle 6\bar 6\rangle, & \langle\oplus./\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 6\rangle,\\ \langle/.\downarrow\rangle(X_3) = \langle\bar 70\rangle, & \langle/.\oplus\rangle(X_3) = \langle 7\bar 7\rangle, & \langle/./\rangle(X_3) = \langle\bar 0\bar 7\rangle.\end{array}$$

Последние соотношения выписаны из *таблицы* **4**.

Замечание 4. *Таблица* **4** не охватывает все операторы для случая $k = 2$ и $k_1 = 1$, но позже мы увидим, что даже этот скромный список содержит гораздо больше, чем необходимо для порождения полного списка этого случая.

1.3 Инвертированно – сопряжённая четвёрка векторов

Построение **s -** операторов, их применение и свойства, а позже мы увидим, что это верно и для других операторов, использует свойства двоичных векторов размерности **n** (кратко: **n** – мерные векторы), базирующиеся на двух простейших преобразованиях вектора: инвертирование и сопряжение. А именно, если

$$\langle R_n\rangle = \langle r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n\rangle, \tag{1.16}$$

то **инвертированным**, **сопряжённым** и **двойственным** (`инвертированно – сопряжённым` или `сопряжённо – инвертированным`) к оператору **(1.16)** являются соответственно векторы:

$$\langle\bar R_n\rangle = \langle\bar r_1, \bar r_2, \bar r_3, \ldots, \bar r_n\rangle, \tag{1.17}$$

$$\langle R_n^*\rangle = \langle r_n, r_{n-1}, \ldots, r_2, r_1\rangle, \tag{1.18}$$

$$\langle\bar R_n^*\rangle = \langle\bar r_n, \bar r_{n-1}, \ldots, \bar r_2, \bar r_1\rangle. \tag{1.19}$$

Четвёрка векторов

$$\{\langle R_n\rangle,\ \langle R_n^*\rangle,\ \langle \bar{R}_n\rangle,\ \langle \bar{R}_n^*\rangle\} \tag{1.20}$$

и составляет **инвертированно – сопряжённую** четвёрку (**ИСЧ**) векторов, при этом достаточно знать один из векторов этой четвёрки, и тогда остальные **три** вектора являются его следствием. В самом деле:

$\langle R_n\rangle$	$\langle R_n^*\rangle$	$\langle \bar{R}_n\rangle$	$\langle \bar{R}_n^*\rangle$
$\langle R_n^*\rangle$	$\langle R_n\rangle$	$\langle \bar{R}_n^*\rangle$	$\langle \bar{R}_n\rangle$
$\langle \bar{R}_n\rangle$	$\langle \bar{R}_n^*\rangle$	$\langle R_n\rangle$	$\langle R_n^*\rangle$
$\langle \bar{R}_n^*\rangle$	$\langle \bar{R}_n\rangle$	$\langle R_n^*\rangle$	$\langle R_n\rangle$

(1.21)

Если вектор $\langle R_n\rangle = \langle R_n^*\rangle$, то $\langle \bar{R}_n\rangle = \langle \bar{R}_n^*\rangle$, и тогда **ИСЧ** превращается в самосопряжённую пару (**ССП**):

$$\{\langle R_n\rangle\,,\ \langle \bar{R}_n\rangle\}, \tag{1.22}$$

так как каждый из этих векторов — **самосопряжённый**.

Если вектор $\langle R_n\rangle = \langle \bar{R}_n^*\rangle$, то $\langle \bar{R}_n\rangle = \langle R_n^*\rangle$, и тогда **ИСЧ** превращается в самодвойственную пару (**СДП**):

$$\{\langle R_n\rangle\,,\ \langle R_n^*\rangle\}, \tag{1.23}$$

так как каждый из этих векторов — **самодвойственный**.

Замечание 5. Обратим теперь внимание на то, что молчаливо предполагалось уже в предыдущем параграфе, а именно, запись без запятой $\langle \alpha_n\,\beta_m\rangle$ есть вектор–результат конкатенации векторов $\langle\alpha_n\rangle$ и $\langle\beta_m\rangle$, означающий, что за координатами вектора $\langle\alpha_n\rangle$ следуют координаты вектора $\langle\beta_m\rangle$.

Установим теперь структуру самосопряжённого и самодвойственного векторов.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием самосопряжённости вектора *чётной* размерности ($\mathbf{n = 2\ k}$) является вид вектора $\langle\alpha_k\ \alpha_k^*\rangle$, а *нечётной* размерности ($\mathbf{n = 2\ k + 1}$) — вид $\langle\alpha_k\ \theta\ \alpha_k^*\rangle$ или $\langle\alpha_k\ \bar\theta\ \alpha_k^*\rangle$, где $\langle\alpha_k\rangle$ — произвольный вектор.

Доказательство. В самом деле, согласно определению для самосопряжённости вектора $\langle R_{2k}\rangle$ необходимо и достаточно, чтобы $r_1 = r_{2k}$, $r_2 = r_{2k-1}$, $r_3 = r_{2k-2}$, ... , $r_k = r_{k+1}$, а это значит, что

$$\langle R_{2k}\rangle = \langle r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,\ r_k,\ r_k,\ \ldots\ ,\ r_3,\ r_2,\ r_1\rangle.$$

Если же вектор нечётной размерности, то есть $\langle R_{2k+1}\rangle$, то для его самосопряжённости необходимо и достаточно, чтобы $r_1 = r_{2k+1}$, $r_2 = r_{2k}$, $r_3 = r_{2k-1}$, ..., $r_k = r_{k+2}$, $r_{k+1} = r_{k+1}$, а это значит, что

$$\langle R_{2k+1}\rangle = \langle r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,\ r_k,\ r_{k+1},\ r_k,\ \ldots\ ,\ r_3,\ r_2,\ r_1\rangle.$$

и, следовательно, r_{k+1} может равняться как θ, так и $\bar{\theta}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием самодвойственности вектора чётной размерности ($\mathbf{n = 2\ k}$) является вид вектора $\langle \alpha_k\ \bar{\alpha}_k^*\rangle$. Нечётной размерности самодвойственных векторов быть не может.

Доказательство. Согласно определению для самодвойственности вектора $\langle R_{2k}\rangle$ необходимо и достаточно, чтобы $r_1 = \bar{r}_{2k}$, $r_2 = \bar{r}_{2k-1}$, $r_3 = \bar{r}_{2k-2}$, ..., $r_k = \bar{r}_{k+1}$, а это значит, что

$$\langle R_{2k}\rangle = \langle r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ ,\ r_k,\ \bar{r}_k,\ \ldots\ ,\ \bar{r}_3,\ \bar{r}_2,\ \bar{r}_1\rangle.$$

А поскольку не может быть, чтобы r_{k+1} равнялось $\bar{r}_{k+1}$, то самодвойственных векторов нечётной размерности быть не может.

Бинарный **нетривиальный** оператор $\odot$, то есть

$$\odot \in \{\downarrow,\ \oplus,\ /,\ \overline{/},\ \overline{\oplus},\ \overline{\downarrow}\}, \tag{1.24}$$

над двумя векторами одинаковой размерности является вектор той же размерности, координаты которого являются результатом покоординатного применения оператора $\odot$ над заданными векторами.

Если наряду с вектором **(1.16)** рассматривать векторы

$$\langle \theta_n\rangle\ ,\ \langle \bar{\theta}_n\rangle, \tag{1.25}$$

все координаты которых суть θ_n и $\bar{\theta}_n$ соответственно, то можем записать результаты применения оператора $\odot$ к паре векторов из **(1.20)**, при этом будем записывать результат лишь в случае $\odot \in \{\downarrow, \oplus, /\}$, так как инвертированием последнего находится значение и в случае $\overline{\odot}$.

Лемма 3. Верны равенства

$$\langle\oplus\rangle\left(\langle R_n\rangle\ ,\ \langle R_n\rangle\right) = \langle\downarrow\rangle\left(\langle R_n\rangle\ ,\ \langle \bar{R}_n\rangle\right) = \langle \theta_n\rangle, \tag{1.26}$$

$$\langle\odot\rangle\left(\langle R_n\rangle\ ,\ \langle R_n\rangle\right) = \langle \bar{R}_n\rangle, \quad \odot \in \{\downarrow,\ /\}, \tag{1.27}$$

$$\langle\odot\rangle\left(\langle R_n\rangle\ ,\ \langle \bar{R}_n\rangle\right) = \langle \bar{\theta}_n\rangle, \quad \odot \in \{\oplus,\ /\}. \tag{1.28}$$

В верности этой леммы легко убедиться самостоятельно, используя лишь определения операторов **(1.24)**.

Лемма 4. Бинарный оператор **(1.24)** над заданным вектором $\langle R_n \rangle$ и сопряжённым с ним вектором $\langle R_n^* \rangle$ даёт в результате самосопряжённый вектор, то есть

$$\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle, \langle R_n^* \rangle \right) = \langle S_n \rangle, \quad \langle S_n^* \rangle = \langle S_n \rangle. \tag{1.29}$$

Доказательство. Действительно, координаты вектора $\langle S_n \rangle$ суть $s_i = \langle \odot \rangle (r_i,\, r_{n-i+1})$, где $i = 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, n$, но тогда

$$s_{n-i+1} = \langle \odot \rangle \left(r_{n-i+1},\, r_i \right) = s_i.$$

Последнее равенство верно в силу симметричности оператора $\odot$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\langle P_k \rangle$ и $\langle Q_k \rangle$ — два вектора размерности $\mathbf{k}$. Положим:

$$\langle R_n \rangle \rightleftharpoons \langle P_k\, Q_k \rangle, \tag{1.30}$$

когда $\mathbf{n = 2k}$, а для $\mathbf{n = 2k + 1}$ примем

$$\langle R_n \rangle \rightleftharpoons \langle P_k\, \varepsilon\, Q_k \rangle, \tag{1.31}$$

где $\varepsilon \in Zh$. Ещё примем

$$\langle S_k \rangle \rightleftharpoons \langle \odot \rangle \left(\langle P_k \rangle\, ,\, \langle \bar{Q}_k^* \rangle \right). \tag{1.32}$$

В связи с тем, что понятие самодвойственности для векторов нечётной размерности лишено смысла, введём понятие **почти самодвойственности**, назвав вектор $\langle \alpha_k\, \varepsilon\, \bar{\alpha}_k^* \rangle$ **почти самодвойственным**, поскольку двойственный к нему вектор $\langle \alpha_k\, \bar{\varepsilon}\, \bar{\alpha}_k^* \rangle$ не совпадает с исходным лишь в одной $\mathbf{(k + 1)}$–ой координате.

Лемма 5. Бинарный оператор **(1.24)** над заданным вектором $\langle R_n \rangle$ и двойственным с ним вектором $\langle \bar{R}_n^* \rangle$ даёт в результате самодвойственный вектор, если $\mathbf{n = 2k}$, а в случае $\mathbf{n = 2k + 1}$, то — почти самодвойственный вектор, а именно, если $\langle R_n \rangle$ имеет вид **(1.30)**, то

$$\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle\, ,\, \langle \bar{R}_n^* \rangle \right) = \langle S_k\, \bar{S}_k^* \rangle, \tag{1.33}$$

а если $\langle R_n \rangle$ имеет вид **(1.31)**, то

$$\langle \odot \rangle \left(\langle R_n \rangle\, ,\, \langle \bar{R}_n^* \rangle \right) = \langle S_k\, \lambda\, \bar{S}_k^* \rangle, \tag{1.34}$$

где $\langle S_k \rangle$ определено равенством **(1.32)**, а

$$\lambda = \langle\odot\rangle\,(\langle\varepsilon\,,\,\bar{\varepsilon}\rangle = \begin{cases} \bar{\theta}, & \text{если} \quad \odot \in \{\oplus, /\}, \\ \theta, & \text{если} \quad \odot = \downarrow. \end{cases} \tag{1.35}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{n = 2k}$. Тогда $\langle\bar{R}_n^*\rangle = \langle\bar{Q}_k^*\,\bar{P}_k^*\rangle$ и $\langle\odot\rangle\,(\langle R_n\rangle\,,\,\langle\bar{R}_n^*\rangle) = \langle\odot\rangle\,(\langle P_k\,Q_k\rangle\,,\,\langle\bar{Q}_k^*\,\bar{P}_k^*\rangle\,) = \langle S_k\,\bar{S}_k^*\rangle$, так как из **(1.32)** следует, что $\langle\bar{S}_k^*\rangle = \langle\odot\rangle\,(\langle Q_k\rangle\,,\,\langle\bar{P}_k^*\rangle)$. Верность **(1.33)** доказана.

Если же $\mathbf{n = 2k{+}1}$, то $\langle\bar{R}_n^*\rangle = \langle\bar{Q}_k^*\,\bar{\varepsilon}\,\bar{P}_k^*\rangle$ и $\langle\odot\rangle\,(\langle R_n\rangle\,,\,\langle\bar{R}_n^*\rangle\,) = \langle\odot\rangle\,(\langle P_k\,\varepsilon\,Q_k\rangle\,,\,\langle\bar{Q}_k^*\,\bar{\epsilon}\,\bar{P}_k^*\rangle) = \langle S_k\,\lambda\,\bar{S}_k^*\rangle$, где λ определена в **(1.35)**. Значит, верно и равенство **(1.34)**.

Замечание 6. Теперь обратим внимание на введённое в предыдущем параграфе определение нормализованной формы записи. Вектор в такой записи при выполнении над ним преобразований инвертирования и сопряжения сохраняет свою нормализованную форму (*вот та причина, по которой именно так введено это определение)*. Но, чтобы легко было выполнять эти преобразования, следует помнить *таблицу* **5**, в которой приведены четвёрки вида **(1.20)** для цифр из **Vh ,** **Ah ,** и **Sh** с указанием типа, при этом следует иметь ввиду **(1.21)**.

Таблица 5

a	a^*	$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	Тип	a	a^*	$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	Тип
ν	ν	$\bar{\nu}$	$\bar{\nu}$	ССП	0	0	$\bar{0}$	$\bar{0}$	ССП
τ	$\bar{\tau}$	$\bar{\tau}$	τ	СДП	6	6	$\bar{6}$	$\bar{6}$	ССП
					3	$\bar{3}$	$\bar{3}$	3	СДП
ω	ω	$\bar{\omega}$	$\bar{\omega}$	ССП	5	$\bar{5}$	$\bar{5}$	5	СДП
$\oplus$	$\oplus$	$\overline{\oplus}$	$\overline{\oplus}$	ССП	1	$\bar{7}$	$\bar{1}$	7	ИСЧ
$\downarrow$	$\overline{/}$	$\overline{\downarrow}$	$/$	ИСЧ	2	4	$\bar{2}$	$\bar{4}$	ИСЧ

Например. Для каждого из векторов $\bar{\nu}\ \theta\ \bar{\tau}$, $\overline{\downarrow}\ \downarrow$, $\downarrow\ \bar{\theta}\ /$, $1\ 6\ /\ \downarrow\ 4\ 5$ сопряжёнными являются: $\tau\ \theta\ \bar{\nu}$, $\overline{/}\ /$, $\overline{\downarrow}\ \bar{\theta}\ \overline{/}$, $\bar{5}\ 2\ \overline{/}\ \overline{\downarrow}\ 6\ \bar{7}$ соответственно.

1.4 Схемы сопряжения и двойственности

Сопряжение и двойственность, рассмотренные в предыдущем параграфе, относились к **n** - мерным векторам. Ниже мы будем рассматривать векторы **n**–го порядка, то есть размерности 2^n. При этом сохраним запись $\langle\alpha_n\rangle$, но уже по умолчанию она будет означать вектор **n**–го порядка, а когда будет не так, то это будет оговариваться. Для векторов **n**–го порядка наряду с сопряжением и двойственностью будем рассматривать сопряжение и двойственность **k**–го порядка, обозначая их соответственно $\langle\alpha_n^{*k}\rangle$, $\langle\bar{\alpha}_n^{*k}\rangle$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (когда $k = 0$, то оно будет опускаться и тогда будем иметь просто сопряжение и двойственность).

Сопряжение и двойственность **k**–го порядка над вектором

$$\langle\gamma_{n+1}\rangle = \langle\alpha_n\,\beta_n\rangle \tag{1.36}$$

определяется рекурсивно так:

$$\langle\gamma_{n+1}^{*k}\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_n^{*(k-1)}\,\beta_n^{*(k-1)}\rangle,\ \langle\bar{\gamma}_{n+1}^{*k}\rangle \rightleftharpoons \langle\bar{\alpha}_n^{*(k-1)}\,\bar{\beta}_n^{*(k-1)}\rangle, \tag{1.37}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

А если теперь осуществить сопряжение и двойственность **k - 1**–го порядка над каждым из векторов правой части **(1.37)** и это продолжать до тех пор, пока не спустимся до сопряжения и двойственности (нулевого порядка), то получим нужное истолкование сопряжению (а следовательно, аналогичную и для двойственности). Иными словами, чтобы осуществить сопряжение **k**–го порядка над вектором **n**–го порядка, следует вектор **n**–го порядка представить в виде конкатенации 2^k векторов **n - k**–го порядка, а затем осуществить сопряжение над каждым из векторов этой конкатенации.

Можно представить сказанное схемами, указывающими на характер преобразований, обозначив через φ инвертирование, а через ψ_k — сопряжение **k**–го порядка, то есть $\langle\alpha_n\rangle \xleftrightarrow{\varphi} \langle\bar{\alpha}_n\rangle$, $\langle\alpha_n\rangle \xleftrightarrow{\psi_k} \langle\alpha_n^{*k}\rangle$.

Если теперь примем обозначения:

$$\left.\begin{array}{lll} \langle A_0\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_r\,\beta_r\rangle, & & \langle B_0\rangle \rightleftharpoons \langle\alpha_r^*\,\beta_r^*\rangle, \\ \langle A_1\rangle \rightleftharpoons \langle\beta_r\,\alpha_r\rangle, & & \langle B_1\rangle \rightleftharpoons \langle\beta_r^*\,\alpha_r^*\rangle, \end{array}\right\} \tag{1.38}$$

то получим:

$$\left.\begin{array}{ll} \langle A_0^*\rangle = \langle\beta_r^*\,\alpha_r^*\rangle = \langle B_1\rangle, & \langle A_0^{*1}\rangle = \langle\alpha_r^*\,\beta_r^*\rangle = \langle B_0\rangle, \\ \langle A_1^*\rangle = \langle\alpha_r^*\,\beta_r^*\rangle = \langle B_0\rangle, & \langle A_1^{*1}\rangle = \langle\beta_r^*\,\alpha_r^*\rangle = \langle B_1\rangle. \end{array}\right\} \tag{1.39}$$

Эти результаты могут быть сведены в схему диаграммы (см. левую часть **(1.40)**).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & \langle\bar A_0\rangle & & & & & & & & \langle\bar A_2\rangle & & & \\
 & & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & & & & & & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & & \\
 & \psi & & \varphi & & \psi_1 & & & & \psi & & \varphi & & \psi_1 & \\
 \swarrow & & & \downarrow & & & \searrow & & \swarrow & & & \downarrow & & & \searrow \\
 & \psi & \hookrightarrow & \langle A_0\rangle & \hookleftarrow & \psi_1 & & & & \psi & \hookrightarrow & \langle A_2\rangle & \hookleftarrow & \psi_1 & \\
\langle\bar B_1\rangle \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \langle B_1\rangle & & & & & & \langle B_0\rangle \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \langle\bar B_0\rangle & & \langle\bar B_3\rangle \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \langle B_3\rangle & & & & & & \langle B_2\rangle \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} \langle\bar B_2\rangle \\
 & \psi_1 & \hookrightarrow & \langle A_1\rangle & \hookleftarrow & \psi & & & & \psi_1 & \hookrightarrow & \langle A_3\rangle & \hookleftarrow & \psi & \\
 \nwarrow & & & \uparrow & & & \nearrow & & \nwarrow & & & \uparrow & & & \nearrow \\
 & \psi_1 & & \varphi & & \psi & & & & \psi_1 & & \varphi & & \psi & \\
 & & \searrow & \downarrow & \swarrow & & & & & & \searrow & \downarrow & \swarrow & & \\
 & & & \langle\bar A_1\rangle & & & & & & & & \langle\bar A_3\rangle & & &
\end{array}
\tag{1.40}
$$

Аналогичная диаграмма получается (см. правую часть **(1.40)**), если принять:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\langle A_2\rangle \rightleftharpoons \langle\delta_r\,\mu_r\rangle, & & \langle B_2\rangle \rightleftharpoons \langle\delta_r^*\,\mu_r^*\rangle \\
\langle A_3\rangle \rightleftharpoons \langle\mu_r\,\delta_r\rangle, & & \langle B_3\rangle \rightleftharpoons \langle\mu_r^*\,\delta_r^*\rangle
\end{array}
\right\}
\tag{1.41}
$$

Внутренность каждой из диаграмм **(1.40)** — это схемы преобразований, связанных с сопряжением нулевого и первого порядков, а внешность — это схемы преобразований, связанных с двойственностью нулевого и первого порядков. Переход от внутренней схемы к внешней суть преобразований инвертирования.

Итак, по сути дела достаточно установить лишь сопряжение, что и делается ниже.

Если воспользоваться **(1.38)** и **(1.41)** и принять:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\langle C_0\rangle \rightleftharpoons \langle A_0\,A_2\rangle, & & \langle D_0\rangle \rightleftharpoons \langle B_0\,B_2\rangle, \\
\langle C_1\rangle \rightleftharpoons \langle A_1\,A_3\rangle, & & \langle D_1\rangle \rightleftharpoons \langle B_1\,B_3\rangle, \\
\langle C_2\rangle \rightleftharpoons \langle A_2\,A_0\rangle, & & \langle D_2\rangle \rightleftharpoons \langle B_2\,B_0\rangle, \\
\langle C_3\rangle \rightleftharpoons \langle A_3\,A_1\rangle, & & \langle D_3\rangle \rightleftharpoons \langle B_3\,B_1\rangle,
\end{array}
\right\}
\tag{1.42}
$$

то используя равенства **(1.39)** и аналогичные им равенства, которые следуют из **(1.41)**, получим:

$$
\begin{array}{rclclcl}
\langle C_0^*\rangle &=& \langle A_2^*\,A_0^*\rangle &=& \langle B_3\,B_1\rangle &=& \langle D_3\rangle,\\
\langle C_1^*\rangle &=& \langle A_3^*\,A_1^*\rangle &=& \langle B_2\,B_0\rangle &=& \langle D_2\rangle,\\
\langle C_2^*\rangle &=& \langle A_0^*\,A_2^*\rangle &=& \langle B_1\,B_3\rangle &=& \langle D_1\rangle,\\
\langle C_3^*\rangle &=& \langle A_1^*\,A_3^*\rangle &=& \langle B_0\,B_2\rangle &=& \langle D_0\rangle,\\
\\
\langle C_0^{*1}\rangle &=& \langle A_0^*\,A_2^*\rangle &=& \langle B_1\,B_3\rangle &=& \langle D_1\rangle,\\
\langle C_1^{*1}\rangle &=& \langle A_1^*\,A_3^*\rangle &=& \langle B_0\,B_2\rangle &=& \langle D_0\rangle,\\
\langle C_2^{*1}\rangle &=& \langle A_2^*\,A_0^*\rangle &=& \langle B_3\,B_1\rangle &=& \langle D_3\rangle,\\
\langle C_3^{*1}\rangle &=& \langle A_3^*\,A_1^*\rangle &=& \langle B_2\,B_0\rangle &=& \langle D_2\rangle,\\
\\
\langle C_0^{*2}\rangle &=& \langle A_0^{*1}\,A_2^{*1}\rangle &=& \langle B_0\,B_2\rangle &=& \langle D_0\rangle,\\
\langle C_1^{*2}\rangle &=& \langle A_1^{*1}\,A_3^{*1}\rangle &=& \langle B_1\,B_3\rangle &=& \langle D_1\rangle,\\
\langle C_2^{*2}\rangle &=& \langle A_2^{*1}\,A_0^{*1}\rangle &=& \langle B_2\,B_0\rangle &=& \langle D_2\rangle,\\
\langle C_3^{*2}\rangle &=& \langle A_3^{*1}\,A_1^{*1}\rangle &=& \langle B_3\,B_1\rangle &=& \langle D_3\rangle.
\end{array}
\tag{1.43}
$$

А это приводит к схеме диаграммы **(1.44)**.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \langle C_0\rangle & & \\
 & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 & \psi_2 & \psi & \psi_1 & \\
 \swarrow & & \downarrow & & \searrow \\
 & \psi_2\hookrightarrow & \langle D_3\rangle & \hookleftarrow\psi_1 & \\
 \\
 \langle D_0\rangle \xleftrightarrow{\psi} \langle C_3\rangle & & & & \langle C_2\rangle \xleftrightarrow{\psi} \langle D_1\rangle \\
 \\
 & \psi_1\hookrightarrow & \langle D_2\rangle & \hookleftarrow\psi_2 & \\
 \nwarrow & & \uparrow & & \nearrow \\
 & \psi_1 & \psi & \psi_2 & \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \langle C_1\rangle & &
\end{array}
\tag{1.44}
$$

Уже можно сделать общее заключение, однако мы проделаем ещё один шаг, а именно примем:

$$
\begin{array}{llllll}
\langle E_0\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_0\,C_4\rangle, & \langle F_0\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_0\,D_4\rangle,\\
\langle E_1\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_1\,C_5\rangle, & \langle F_1\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_1\,D_5\rangle,\\
\langle E_2\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_2\,C_6\rangle, & \langle F_2\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_2\,D_6\rangle,\\
\langle E_3\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_3\,C_7\rangle, & \langle F_3\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_3\,D_7\rangle,\\
\langle E_4\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_4\,C_0\rangle, & \langle F_4\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_4\,D_0\rangle,\\
\langle E_5\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_5\,C_1\rangle, & \langle F_5\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_5\,D_1\rangle,\\
\langle E_6\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_6\,C_2\rangle, & \langle F_6\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_6\,D_2\rangle,\\
\langle E_7\rangle & \rightleftharpoons & \langle C_7\,C_3\rangle, & \langle F_7\rangle & \rightleftharpoons & \langle D_7\,D_3\rangle.
\end{array}
\tag{1.45}
$$

Выкладки, аналогичные выкладкам **(1.43)**, позволяют записать для **(1.45)** следующие равенства:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\langle E_0^*\rangle & = & \langle F_7\rangle, & \langle E_0^{*1}\rangle & = & \langle F_3\rangle, & \langle E_0^{*2}\rangle & = & \langle F_1\rangle, & \langle E_0^{*3}\rangle & = & \langle F_0\rangle,\\
\langle E_1^*\rangle & = & \langle F_6\rangle, & \langle E_1^{*1}\rangle & = & \langle F_2\rangle, & \langle E_1^{*2}\rangle & = & \langle F_0\rangle, & \langle E_1^{*3}\rangle & = & \langle F_1\rangle,\\
\langle E_2^*\rangle & = & \langle F_5\rangle, & \langle E_2^{*1}\rangle & = & \langle F_1\rangle, & \langle E_2^{*2}\rangle & = & \langle F_3\rangle, & \langle E_2^{*3}\rangle & = & \langle F_2\rangle,\\
\langle E_3^*\rangle & = & \langle F_4\rangle, & \langle E_3^{*1}\rangle & = & \langle F_0\rangle, & \langle E_3^{*2}\rangle & = & \langle F_2\rangle, & \langle E_3^{*3}\rangle & = & \langle F_3\rangle,\\
\langle E_4^*\rangle & = & \langle F_3\rangle, & \langle E_4^{*1}\rangle & = & \langle F_7\rangle, & \langle E_4^{*2}\rangle & = & \langle F_5\rangle, & \langle E_4^{*3}\rangle & = & \langle F_4\rangle,\\
\langle E_5^*\rangle & = & \langle F_2\rangle, & \langle E_5^{*1}\rangle & = & \langle F_6\rangle, & \langle E_5^{*2}\rangle & = & \langle F_4\rangle, & \langle E_5^{*3}\rangle & = & \langle F_5\rangle,\\
\langle E_6^*\rangle & = & \langle F_1\rangle, & \langle E_6^{*1}\rangle & = & \langle F_5\rangle, & \langle E_6^{*2}\rangle & = & \langle F_7\rangle, & \langle E_6^{*3}\rangle & = & \langle F_6\rangle,\\
\langle E_7^*\rangle & = & \langle F_0\rangle, & \langle E_7^{*1}\rangle & = & \langle F_4\rangle, & \langle E_7^{*2}\rangle & = & \langle F_6\rangle, & \langle E_7^{*3}\rangle & = & \langle F_7\rangle.
\end{array}
\tag{1.46}
$$

Равенства **(1.46)** представляются схемой диаграммы **(1.47)**.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\langle E_5\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle F_2\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle E_3\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle F_4\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle E_5\rangle\\
\updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3\\
\langle F_5\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle E_2\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle F_3\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle E_4\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle F_5\rangle\\
\updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1\\
\langle E_6\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle F_1\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle E_0\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle F_7\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle E_6\rangle\\
\updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3 & & \updownarrow\psi_3\\
\langle F_6\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle E_1\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle F_0\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle E_7\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle F_6\rangle\\
\updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1 & & \updownarrow\psi_1\\
\langle E_5\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle F_2\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle E_3\rangle & \overset{\psi}{\longleftrightarrow} & \langle F_4\rangle & \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} & \langle E_5\rangle
\end{array}
\tag{1.47}
$$

Диаграммы **(1.40)**, **(1.44)**, **(1.47)** и их преобразования, а также (первых четыре и последних четыре) строки из **(1.43)** и (первый и последний) столбцы из **(1.46)** показывают, что на самом деле верна следующая ниже *теорема*, в которой отражены все полученные выше результаты.

Теорема 1. Если верно неравенство

$$0 \le k < s \le n - 1, \tag{1.48}$$

то для заданного вектора **n**–го порядка $\langle A \rangle$, верна диаграмма **(1.49)**.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \langle A \rangle & & & \\
 & & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & & \\
 & & \psi_k & \varphi & \psi_s & & \\
 & \swarrow & & \downarrow & & \searrow & \\
 & & \psi_k \hookrightarrow & \langle \bar{A} \rangle & \hookleftarrow \psi_s & & \\
\langle B \rangle & \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} & \langle \bar{B} \rangle & & \langle \bar{D} \rangle & \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} & \langle D \rangle \\
 & & \psi_s \hookrightarrow & \langle \bar{C} \rangle & \hookleftarrow \psi_k & & \\
 & \nwarrow & & \uparrow & & \nearrow & \\
 & & \psi_s & \varphi & \psi_k & & \\
 & & \searrow & \downarrow & \swarrow & & \\
 & & & \langle C \rangle & & &
\end{array} \tag{1.49}$$

Использование этой *теоремы* оказывается более эффективным, когда операторы записываются с помощью системы счисления Sh. Но учитывая то, что нас интересуют операторы **n**–го порядка, оказывается очень полезным помнить *таблицу* **6**, которая вместе с таблицей **5** позволяют заключить, что для операторов **2**–го порядка, составляющих невырожденную **ИСЧ** (то есть не из **ССП** или **СДП**) имеет место диаграмма **(1.49)**.

Таблица 6

a	a^{*1}	$\bar{a}$	$\bar{a}^{*1}$	Тип
0	0	$\bar{0}$	$\bar{0}$	ССП
3	3	$\bar{3}$	$\bar{3}$	ССП
5	$\bar{5}$	$\bar{5}$	5	СДП
6	$\bar{6}$	$\bar{6}$	6	СДП
1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	ИСЧ
4	$\bar{7}$	$\bar{4}$	7	ИСЧ

В самом деле: $k = 0,\ s = 1,\quad \langle A\rangle = \langle 1\rangle,\quad \langle B\rangle = \langle \bar{7}\rangle,\quad \langle C\rangle = \langle 4\rangle,$ $\langle D\rangle = \langle 2\rangle$.

1.5 Полная система векторов, порождаемая бинарными операторами

Если использовать лишь приёмы сопряжения и инвертирования, то как известно (см. **п. 3**), из заданного вектора можно породить лишь **ИСЧ** векторов, которая может вырождаться в **ССП** или в **СДП**.

Если же над **ИСЧ** векторов применять бинарные операторы из **(1.24)** (операторы применяются поразрядно), то получим систему векторов (все векторы одинаковой размерности):

$$\{a,\ a^*,\ \bar{a}, \bar{a}^*,\ b,\ b^*,\ \bar{b}, \bar{b}^*,\ c,\ \bar{c},\ q,\ \bar{q}, h,\ \bar{h},\ \theta,\ \bar{\theta}\}. \tag{1.50}$$

Для краткости векторы системы **(1.50)** записаны без использования треугольных скобок, заменяющих слово *“вектор”*, что и в дальнейшем иногда будет применяться. Сама система **(1.50)** порождена так. Считается, что задан произвольный $\langle a\rangle$. По заданному вектору строится **ИСЧ** векторов $\{a,\ a^*,\ \bar{a}, \bar{a}^*\}$, по которой вычисляем:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\langle b\rangle & \rightleftharpoons & \langle \bar{a}\rangle \downarrow \langle a^*\rangle & = & \langle a\rangle & \overline{/} & \langle \bar{a}^*\rangle,\\
\langle b^*\rangle & = & \langle a\rangle \downarrow \langle \bar{a}^*\rangle & = & \langle a^*\rangle & \overline{/} & \langle \bar{a}\rangle,\\
\langle \bar{b}\rangle & = & \langle \bar{a}\rangle \overline{\downarrow} \langle a^*\rangle & = & \langle a\rangle & / & \langle \bar{a}^*\rangle,\\
\langle \bar{b}^*\rangle & = & \langle a\rangle \overline{\downarrow} \langle \bar{a}^*\rangle & = & \langle a^*\rangle & / & \langle \bar{a}\rangle;
\end{array}\right\} \tag{1.51}$$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\langle c\rangle & \rightleftharpoons & \langle a\rangle \downarrow \langle a^*\rangle & = & \langle \bar{a}\rangle & \overline{/} & \langle \bar{a}^*\rangle,\\
\langle \bar{c}\rangle & = & \langle a\rangle \overline{\downarrow} \langle a^*\rangle & = & \langle \bar{a}\rangle & / & \langle \bar{a}^*\rangle;
\end{array}\right\} \tag{1.52}$$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\langle q\rangle & \rightleftharpoons & \langle \bar{a}\rangle \downarrow \langle \bar{a}^*\rangle & = & \langle a\rangle & \overline{/} & \langle a^*\rangle,\\
\langle \bar{q}\rangle & = & \langle \bar{a}\rangle \overline{\downarrow} \langle \bar{a}^*\rangle & = & \langle a\rangle & / & \langle a^*\rangle;
\end{array}\right\} \tag{1.53}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\langle h\rangle \rightleftharpoons \langle a\rangle \oplus \langle \bar{a}^*\rangle = \langle \bar{a}\rangle \oplus \langle a^*\rangle = \langle a\rangle \overline{\oplus} \langle a^*\rangle = \langle \bar{a}\rangle \overline{\oplus} \langle \bar{a}^*\rangle,\\
\langle \bar{h}\rangle = \langle a\rangle \overline{\oplus} \langle \bar{a}^*\rangle = \langle \bar{a}\rangle \overline{\oplus} \langle a^*\rangle = \langle a\rangle \oplus \langle a^*\rangle = \langle \bar{a}\rangle \oplus \langle \bar{a}^*\rangle.
\end{array}\right\} \tag{1.54}$$

Замечание 7. Любые два из равенств

$$x \oplus y = z,\quad y \oplus z = x,\quad x \oplus z = y \tag{1.55}$$

являются следствием одного, то есть эти три равенства **(1.55)** обратимы, а поэтому в дальнейшем будем их заменять краткой записью

$$\{[x,\, y,\, z]\}, \tag{1.56}$$

где x, y, z — двоичные векторы одинаковой размерности.

Поскольку знак инвертирования может быть указан над любой парой векторов в любом из равенств **(1.55)**, то это верно и для любой пары векторов из **(1.56)**. Используя *замечание* **7**, из равенств **(1.51)** — **(1.54)** легко выводятся соотношения

$$\left.\begin{array}{c}\{[a,\, a^*,\, \bar{h}]\},\;\; \{[b,\, b^*,\, \bar{h}]\},\;\; \{[a,\, b,\, q]\},\\ \{[c,\, q,\, h]\},\;\; \{[a,\, b^*,\, \bar{c}]\}.\end{array}\right\} \tag{1.57}$$

Применяя сопряжение над каждым из векторов **(1.57)** и учитывая самосопряжённость h, q, c, получим дополнительно:

$$\{[a^*,\, b^*,\, q]\}, \quad \{[a^*,\, b,\, \bar{c}]\}, \tag{1.58}$$

которые следуют из *третьего* и *пятого* соотношений в перечне **(1.57)**.

Список будет полным для оператора $\langle\oplus\rangle$, если применить инвертирование к любой паре векторов из любого соотношения **(1.57)** и **(1.58)**.

Теперь убедимся в том, что *теорема*, следующая ниже, верна.

Теорема 2. Система бинарных операторов **(1.24)** над векторами системы **(1.50)** не порождает новых векторов, то есть эта система векторов логически замкнута.

Доказательство этой *теоремы* может быть получено различными способами, но поскольку система операторов **(1.24)** состоит из двух подмножеств операторов: из **ИСЧ** $\{\downarrow, /, \bar{\downarrow}, \bar{/}\}$ и **ССП** $\{\oplus, \bar{\oplus}\}$, то достаточно убедиться в верности заключения *теоремы* на двух операторах, взятых по одному из указанных подсистем, и каждой парой векторов из системы **(1.50)**. Но требуемое для каждого из операторов **ИСЧ** представлено в *таблицах* **7** и **8**, хотя достаточно было бы иметь лишь одну половину из этих таблиц (такие выкладки над векторами системы **(1.50)** приведены для удобства применения указанных операторов в дальнейшем).

Что касается оператора $\langle\oplus\rangle$, то в соотношениях **(1.57)** и **(1.58)** и *замечании* **7** полностью подтверждено заключение *теоремы* **2**.

Теперь обратимся к **(1.50)** и изучим более подробно векторы системы. Эти векторы фактически порождены одним вектором $\langle a\rangle$, хотя с таким же успехом можно было бы назвать любой из векторов **ИСЧ**.

Но вектор $\langle b \rangle$ и векторы **ИСЧ**, порождаемые вектором $\langle b \rangle$, уже не порождают систему **(1.50)**, не говоря уже о **ССП** векторов.

Истинную картину можно увидеть в *таблице* **9**, к которой следует добавить, что если $\langle a \rangle$ — самодвойственный, то есть имеет вид:

$$\langle a \rangle = \langle \bar{a}^* \rangle = \langle \alpha\, \bar{\alpha}^* \rangle, \tag{1.59}$$

то, имея ввиду **(1.51)** — **(1.54)**, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \langle \bar{a} \rangle = \langle a^* \rangle = \langle \bar{\alpha}\, \alpha^* \rangle, \\ \langle b \rangle = \langle \bar{b}^* \rangle = \langle a \rangle, \qquad\qquad \langle \bar{b} \rangle = \langle b^* \rangle = \langle \bar{a} \rangle, \\ \langle c \rangle = \langle q \rangle = \langle h \rangle = \langle \theta \rangle, \;\; \langle \bar{c} \rangle = \langle \bar{q} \rangle = \langle \bar{h} \rangle = \langle \bar{\theta} \rangle. \end{array}\right\} \tag{1.60}$$

Таблица 7

$\downarrow$	$\bar{h}$	h	$\bar{q}$	q	$\bar{c}$	c	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	b^*	b	$\bar{a}^*$	$\bar{a}$	a^*	a		
a	c	b^*	θ	$\bar{a}$	c	b^*	b^*	θ	c	$\bar{a}$	b^*	θ	c	$\bar{a}$	$\bar{h}$	h
a^*	c	b	θ	$\bar{a}^*$	c	b	θ	b	$\bar{a}^*$	c	θ	b	$\bar{a}^*$	h	$\bar{\theta}$	$\bar{h}$
$\bar{a}$	q	b	q	b	θ	a	θ	b	a	q	q	a	$\bar{q}$	$\bar{\theta}$	$\bar{q}$	q
$\bar{a}^*$	q	b^*	q	b^*	θ	a^*	b^*	θ	q	a^*	a^*	q	$\bar{\theta}$	h	$\bar{c}$	$\bar{q}$
b	h	b^*	q	$\bar{a}$	c	a^*	b^*	θ	h	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{c}$	c
b^*	h	b	q	$\bar{a}^*$	c	a	θ	b	$\bar{b}^*$	c	$\bar{\theta}$	h	$\bar{q}$	h	$\bar{q}$	$\bar{c}$
$\bar{b}$	θ	b	θ	b	θ	b	θ	b	$\bar{b}^*$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	b^*
$\bar{b}^*$	θ	b^*	θ	b^*	θ	b^*	b^*	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	b
c	q	$\bar{h}$	q	$\bar{h}$	θ	$\bar{c}$	b^*	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{a}$	$\bar{c}$	a^*	$\bar{q}$	$\bar{b}$	$\bar{h}$	$\bar{b}^*$
$\bar{c}$	c	θ	θ	c	c	b	$\bar{h}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{a}^*$	$\bar{c}$	a	$\bar{q}$	$\bar{b}^*$	$\bar{h}$	$\bar{b}$
q	c	$\bar{h}$	θ	$\bar{q}$	$\bar{a}^*$	$\bar{a}^*$	$\bar{q}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{a}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{q}$	$\bar{b}^*$	$\bar{q}$	a^*
$\bar{q}$	q	θ	q	$\bar{a}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{a}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{q}$	$\bar{b}$	$\bar{q}$	a
h	θ	$\bar{h}$	a^*	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{c}$	a^*	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	a^*	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a}^*$
$\bar{h}$	h	a	$\bar{c}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	a	$\bar{c}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{b}^*$	$\bar{c}$	a	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{c}$	$\bar{a}$
		$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	a	a^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	b	b^*	$\bar{c}$	c	$\bar{q}$	q	$\bar{h}$	h	$/$

Замечание 8. Обращаем внимание на то, что в **ИСЧ** любой из векторов и сопряжённый с ним, строго говоря, неразличимы. Это следует иметь ввиду в дальнейшем изложении.

Теперь выделим из системы векторов **(1.50)** важную для дальнейшего подсистему.

Вектор d_j называется исходным каноническим вектором **(ИКВ)**, если он *несамосопряжённый*, *несамодвойственный* и в конъюнкции поглощает свой двойственный вектор:

$$\langle\, d_j \,\rangle \neq \langle\, d_j^* \,\rangle, \quad \langle\, d_j \,\rangle \neq \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle, \quad \langle\, d_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle = \langle\, d_j \,\rangle. \tag{1.61}$$

Обращаем внимание, что из равенства **(1.61)** следует:

$$\langle\, d_j^* \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{d}_j \,\rangle = \langle\, d_j^* \,\rangle, \tag{1.62}$$

означающее, что вектор, сопряжённый исходному каноническому вектору, сам является **ИКВ** (см. *замечание* **8**).

Таблица 8

$\bar{\downarrow}$	$\bar{h}$	h	$\bar{q}$	q	$\bar{c}$	c	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	b^*	b	$\bar{a}^*$	$\bar{a}$	a^*	a		
a	$\bar{c}$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	a	$\bar{c}$	$\bar{b}^*$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{c}$	a	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{c}$	a	h	h
a^*	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	a^*	$\bar{c}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	a^*	$\bar{c}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	a^*	$\bar{h}$	θ	$\bar{h}$
$\bar{a}$	$\bar{q}$	$\bar{b}$	$\bar{q}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{a}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{a}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$	$\bar{a}$	q	θ	q	q
$\bar{a}^*$	$\bar{q}$	$\bar{b}^*$	$\bar{q}$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{a}^*$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{q}$	$\bar{a}^*$	$\bar{a}^*$	$\bar{q}$	θ	$\bar{h}$	c	$\bar{q}$
b	$\bar{h}$	$\bar{b}^*$	$\bar{q}$	a	$\bar{c}$	$\bar{a}^*$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{h}$	b	c	c	θ	θ	c	c
b^*	$\bar{h}$	$\bar{b}$	$\bar{q}$	a^*	$\bar{c}$	$\bar{a}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	b^*	$\bar{c}$	θ	$\bar{h}$	q	$\bar{h}$	q	$\bar{c}$
$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}$	b^*	b^*	θ	b^*	θ	b^*	θ	b^*
$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{\theta}$	$\bar{b}^*$	$\bar{b}^*$	b	θ	b	θ	b	θ	b	θ	b
c	$\bar{q}$	h	$\bar{q}$	h	$\bar{\theta}$	c	$\bar{b}^*$	b	θ	a	c	$\bar{a}^*$	q	b	h	$\bar{b}^*$
$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{c}$	$\bar{c}$	$\bar{b}$	h	θ	b^*	a^*	c	$\bar{a}$	q	b^*	h	$\bar{b}$
q	$\bar{c}$	h	$\bar{\theta}$	q	a^*	a^*	q	θ	b^*	a^*	θ	b^*	q	b^*	q	a^*
$\bar{q}$	$\bar{q}$	$\bar{\theta}$	$\bar{q}$	a	q	q	a	b	θ	a	θ	b	q	b	q	a
h	$\bar{\theta}$	h	$\bar{a}^*$	b	θ	c	$\bar{a}^*$	b	θ	b	c	$\bar{a}^*$	θ	b	c	$\bar{a}^*$
$\bar{h}$	$\bar{h}$	$\bar{a}$	c	θ	b^*	$\bar{a}$	c	θ	b^*	b^*	c	$\bar{a}$	θ	b^*	c	$\bar{a}$
		$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	a	a^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	b	b^*	$\bar{c}$	c	$\bar{q}$	q	$\bar{h}$	h	$\bar{/}$

Система векторов на базе заданного **ИКВ** приводит к:

$$\{\, d_j,\, d_j^*,\, \bar{d}_j,\, \bar{d}_j^*,\, g_j,\, \bar{g}_j,\, \theta_j,\, \bar{\theta}_j \,\}, \tag{1.63}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \langle\, g_j \,\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\, d_j \,\rangle \;\downarrow\; \langle\, d_j^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \;\;\bar{/}\;\; \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle, \\ \langle\, \bar{g}_j \,\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\, d_j \,\rangle \;\bar{\downarrow}\; \langle\, d_j^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \;\;/\;\; \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

Равенства **(1.64)** говорят, что векторы g и $\bar{g}$ — самосопряжены, то есть $\langle\, g^* \,\rangle = \langle\, g \,\rangle$, $\langle\, \bar{g}^* \,\rangle = \langle\, \bar{g} \,\rangle$.

Из равенства **(1.61)** имеем как следствие:

$$\begin{aligned}
\langle\, d_j \,\rangle &= \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \downarrow \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, d_j \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle,\\
\langle\, d_j^* \,\rangle &= \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle \downarrow \langle\, d_j \,\rangle = \langle\, d_j^* \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \bar{d}_j \,\rangle,\\
\langle\, \bar{d}_j \,\rangle &= \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \;\bar{\downarrow}\; \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, d_j \,\rangle \;/\; \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle,\\
\langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle &= \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle \;\bar{\downarrow}\; \langle\, d_j \,\rangle = \langle\, d_j^* \,\rangle \;/\; \langle\, \bar{d}_j \,\rangle.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Легко убедиться и в том, что

$$\begin{aligned}
\langle\, \bar{d}_j \,\rangle \downarrow \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle &= \langle\, d_j \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, \theta_j \,\rangle,\\
\langle\, \bar{d}_j \,\rangle \;\bar{\downarrow}\; \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle &= \langle\, d_j \,\rangle \;/\; \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{\theta}_j \,\rangle;
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}
\langle\, d_j \,\rangle \oplus \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \oplus \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, d_j \,\rangle \bar{\oplus} \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \bar{\oplus} \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle = \langle\, g_j \,\rangle,\\
\langle\, d_j \,\rangle \bar{\oplus} \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \bar{\oplus} \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, d_j \,\rangle \oplus \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{d}_j \,\rangle \oplus \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{g}_j \,\rangle.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Используя соглашение, принятое в *замечании* **7**, равенства **(1.67)** могут быть записаны так:

$$\{\, [\, d_j,\, d_j^*,\, \bar{g}_j \,]\, \}. \tag{1.68}$$

Таблица 9

a	a^*	$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	b	b^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	c	$\bar{c}$	q	$\bar{q}$	h	$\bar{h}$
a^*	a	$\bar{a}^*$	$\bar{a}$	b^*	b	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	c	$\bar{c}$	q	$\bar{q}$	h	$\bar{h}$
$\bar{a}$	$\bar{a}^*$	a	a^*	b^*	b	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	q	$\bar{q}$	c	$\bar{c}$	h	$\bar{h}$
$\bar{a}^*$	$\bar{a}$	a^*	a	b	b^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	q	$\bar{q}$	c	$\bar{c}$	h	$\bar{h}$
b	b^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	b	b^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	h	$\bar{h}$	θ	$\bar{\theta}$	h	$\bar{h}$
b^*	b	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	b^*	b	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	h	$\bar{h}$	θ	$\bar{\theta}$	h	$\bar{h}$
$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	b	b^*	b^*	b	$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	θ	$\bar{\theta}$	h	$\bar{h}$	h	$\bar{h}$
$\bar{b}^*$	$\bar{b}$	b^*	b	b	b^*	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$	θ	$\bar{\theta}$	h	$\bar{h}$	h	$\bar{h}$
c	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$	θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{c}$	c	c	$\bar{c}$	$\bar{\theta}$	θ
$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	c	θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	c	$\bar{c}$	$\bar{c}$	c	$\bar{\theta}$	θ
q	q	$\bar{q}$	$\bar{q}$	θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{q}$	q	q	$\bar{q}$	$\bar{\theta}$	θ
$\bar{q}$	$\bar{q}$	q	q	θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	q	$\bar{q}$	$\bar{q}$	q	$\bar{\theta}$	θ
h	h	$\bar{h}$	$\bar{h}$	θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{h}$	h	h	$\bar{h}$	$\bar{\theta}$	θ
$\bar{h}$	$\bar{h}$	h	h	θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	h	$\bar{h}$	$\bar{h}$	h	$\bar{\theta}$	θ

Равенства **(1.65)** показывают, что инвертированный и двойственный векторы к **ИКВ** являются каноническими поглощающими векторами в дизъюнкции для сопряжённого и исходного канонических векторов соответственно.

Первая четвёрка векторов из **(1.63)** — это каноническая четвёрка, а самосопряжённые векторы g_j и $\bar{g}_j$ — стартовые канонические векторы и само обозначение их через d и g по умолчанию будет предполагать, что речь идёт о канонических векторах в описанном выше смысле. Канонические векторы будут использованы в *главе* **IV** и из той же главы станет ясным и происхождение этого названия.

В системе канонических векторов будем использовать как стартовые **СДП** векторов, используя для них стандартное обозначение через p, а свойства устанавливаются через нижеследующую *теорему*.

Теорема 3. Если $\langle\, p_j \,\rangle$, $\langle\, \bar{p}_j \,\rangle$ составляют **СДП** векторов, то

$$\langle\, p_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, p_j\, p_j \,\rangle, \qquad \langle\, \bar{p}_{j+1} \,\rangle = \langle\, \bar{p}_j\, \bar{p}_j \,\rangle \tag{1.69}$$

также составляют **СДП** векторов, а векторы

$$\langle\, g_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, p_j\, \bar{p}_j \,\rangle, \qquad \langle\, \bar{g}_{j+1} \,\rangle = \langle\, \bar{p}_j\, p_j \,\rangle \tag{1.70}$$

составляют **ССП** векторов.

Доказательство. Поскольку $\langle\, p_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{p}_j \,\rangle$ составляют **СДП** векторов, то $\langle\, \bar{p}^*_j \,\rangle = \langle\, p_j \,\rangle$ и $\langle\, p^*_j \,\rangle = \langle\, \bar{p}_j \,\rangle$, а из *определения* **(1.69)** имеем:

$$\langle\, p^*_{j+1} \,\rangle = \langle\, p^*_j\, p^*_j \,\rangle = \langle\, \bar{p}_j\, \bar{p}_j \,\rangle = \langle\, \bar{p}_{j+1} \,\rangle, \quad \langle\, \bar{p}^*_{j+1} \,\rangle = \langle\, p_{j+1} \,\rangle.$$

Из *определения* **(1.70)** имеем:

$$\langle\, g^*_{j+1} \,\rangle = \langle\, \bar{p}^*_j\, p^*_j \,\rangle = \langle\, p_j\, \bar{p}_j \,\rangle = \langle\, g_{j+1} \,\rangle, \quad \langle\, \bar{g}^*_{j+1} \,\rangle = \langle\, \bar{g}_{j+1} \,\rangle.$$

Замечание 9. Смысл рекурсии в *теореме* **3** становится ясным, когда мы замечаем, что $\langle\, \tau_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle$ суть **СДП** векторов. При этом приобретает важное значение и следующая

Теорема 4. Если $\langle\, g_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{g}_j \,\rangle$ составляют **ССП** векторов, то

$$\langle\, g_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, g_j\, g_j \,\rangle, \qquad \langle\, \bar{g}_{j+1} \,\rangle = \langle\, \bar{g}_j\, \bar{g}_j \,\rangle \tag{1.71}$$

также составляют **ССП** векторов, а векторы

$$\langle\, p_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, g_j\, \bar{g}_j \,\rangle, \qquad \langle\, \bar{p}_{j+1} \,\rangle = \langle\, \bar{g}_j\, g_j \,\rangle \tag{1.72}$$

составляют **СДП** векторов.

Доказательство. Так как $\langle\, g_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{g}_j \,\rangle$ составляют **ССП** векторов, то это значит: $\langle\, g_j^* \,\rangle = \langle\, g_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{g}_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{g}_j \,\rangle$, а из *определения* **(1.71)** имеем:

$$\langle\, g_{j+1}^* \,\rangle = \langle\, g_j^*\, g_j^* \,\rangle = \langle\, g_j\, g_j \,\rangle = \langle\, g_{j+1} \,\rangle, \quad \langle\, \bar{g}_{j+1}^* \,\rangle = \langle\, \bar{g}_{j+1} \,\rangle.$$

Из *определения* **(1.72)** имеем:

$$\langle\, p_{j+1}^* \,\rangle = \langle\, \bar{g}_j^*\, g_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{g}_j\, g_j \,\rangle = \langle\, \bar{p}_{j+1} \,\rangle, \quad \langle\, \bar{p}_{j+1}^* \,\rangle = \langle\, p_{j+1} \,\rangle.$$

Перед тем, как перейти к способу порождения канонических векторов большего порядка из системы **(1.63)**, заметим, что верна

Теорема 5. Если задан произвольный несамосопряжённый, несамодвойственный вектор a_j и по формулам **(1.51)** вычислены векторы $b_j,\, b_j^*,\, \bar{b}_j,\, \bar{b}_j^*,$ то построим каноническую четвёрку векторов, приняв:

$$\langle\, d_j \,\rangle = \langle\, b_j \,\rangle, \quad \langle\, d_j^* \,\rangle = \langle\, b_j^* \,\rangle, \quad \langle\, \bar{d}_j \,\rangle = \langle\, \bar{b}_j \,\rangle, \quad \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle = \langle\, \bar{b}_j^* \,\rangle, \tag{1.73}$$

тогда стартовые канонические векторы совпадут с h_j и $\bar{h}_j$, то есть $\langle\, g_j \,\rangle = \langle\, h_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{g}_j \,\rangle = \langle\, \bar{h}_j \,\rangle$.

Доказательство. В том, что это действительно так, легко убедиться, поскольку по *таблице* **8** имеем:

$$\langle\, b_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{b}_j^* \,\rangle = \langle\, b_j \,\rangle,$$

а, выполнив замену **(1.73)**, получим **(1.61)**, кроме того, по *таблице* **7** находим $\langle\, b_j \,\rangle \downarrow \langle\, b_j^* \,\rangle = \langle\, h \,\rangle$.

Из *теоремы* **5** следует, что *таблицами* **7** и **8** можно пользоваться, читая в них $d_j, d_j^*,\, \bar{d}_j,\, \bar{d}_j^*,\, g_j,\, \bar{g}_j$ вместо $b_j, b_j^*,\, \bar{b}_j,\, \bar{b}_j^*,\, h_j,\, \bar{h}_j$ соответственно и выпуская все остальные векторы.

Что касается *таблицы* **9**, то для канонических векторов она принимает вырожденный вид *таблицы* **10**, поскольку всё остальное теряет смысл в связи с определениями, принятыми выше.

Таблица 10

b_j	b_j^*	$\bar{b}_j$	$\bar{b}_j^*$	h_j	$\bar{h}_j$
d_j	d_j^*	$\bar{d}_j$	$\bar{d}_j^*$	g_j	$\bar{g}_j$
d_j^*	d_j	$\bar{d}_j^*$	$\bar{d}_j$	g_j	$\bar{g}_j$
g_j	g_j	$\bar{g}_j$	$\bar{g}_j$	$\bar{g}_j$	g_j
p_j	$\bar{p}_j$	$\bar{p}_j$	p_j	θ_j	$\bar{\theta}_j$

Теперь рассмотрим способ порождения канонических четвёрок векторов по векторам из **СДП** и **ССП** векторов, при этом будем записывать по одному из начальных канонических векторов каждой четвёрки, так как остальные вектора этой четвёрки строятся достаточно легко.

Теорема 6. Если $\langle\, p_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{p}_j \,\rangle$ суть **СДП**, а $\langle\, g_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{g}_j \,\rangle$ — **ССП** векторов, то

$$\left.\begin{aligned} &\langle\, d^1_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, p_j \,\rangle, \qquad &&\langle\, d^2_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, \bar{p}_j \,\rangle, \\ &\langle\, d^3_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, g_j \,\rangle, \qquad &&\langle\, d^4_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, \bar{g}_j \,\rangle \end{aligned}\right\} \tag{1.74}$$

являются начальными **ИКВ**.

Доказательство. В верности этой *теоремы* можно убедиться по *таблице* **11**, в которой представлены выкладки, из которых видно, что в **(1.74)** действительно определены начальные векторы.

Таблица 11

d_{j+1}	d^*_{j+1}	$\bar{d}_{j+1}$	$\bar{d}^*_{j+1}$	g_{j+1}	$\bar{g}_{j+1}$
$\theta_j\, p_j$	$\bar{p}_j\, \theta_j$	$\bar{\theta}_j\, \bar{p}_j$	$p_j\, \bar{\theta}_j$	$p_j\, \bar{p}_j$	$\bar{p}_j\, p_j$
$\theta_j\, \bar{p}_j$	$p_j\, \theta_j$	$\bar{\theta}_j\, p_j$	$\bar{p}_j\, \bar{\theta}_j$	$\bar{p}_j\, p_j$	$p_j\, \bar{p}_j$
$\theta_j\, g_j$	$g_j\, \theta_j$	$\bar{\theta}_j\, \bar{g}_j$	$\bar{g}_j\, \bar{\theta}_j$	$\bar{g}_j\, \bar{g}_j$	$g_j\, g_j$
$\theta_j\, \bar{g}_j$	$\bar{g}_j\, \theta_j$	$\bar{\theta}_j\, g_j$	$g_j\, \bar{\theta}_j$	$g_j\, g_j$	$\bar{g}_j\, \bar{g}_j$

Замечание 10. Обращаем внимание, что полезно сравнить два столбца *таблицы* **11** с **(1.70)** из *теоремы* **3** и **(1.71)** из *теоремы* **4**.

Теорема 7. Если $\langle\, d^i_j \,\rangle$, $\langle\, d^{i\,*}_j \,\rangle$, $\langle\, \bar{d}^i_j \,\rangle$, $\langle\, \bar{d}^{i\,*}_j \,\rangle$ — i–я каноническая четвёрка векторов, то

$$\left.\begin{aligned} &\langle\, d^{i\,1}_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, d^i_j \,\rangle, \qquad &&\langle\, d^{i\,2}_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, d^{i\,*}_j \,\rangle, \\ &\langle\, d^{i\,3}_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, \bar{d}^i_j \,\rangle, \qquad &&\langle\, d^{i\,4}_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \theta_j\, \bar{d}^{i\,*}_j \,\rangle \end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

являются начальными **ИКВ**.

Доказательство. И здесь проще всего убедиться в верности *теоремы* по выкладкам, представленным в *таблице* **12**, в которой по начальным векторам **(1.75)** воспроизведены векторы канонической четвёрки и самосопряжённые пары для каждой четвёрки.

Таблица 12

d_{j+1}	d^*_{j+1}	$\bar d_{j+1}$	$\bar d^*_{j+1}$	g_{j+1}	$\bar g_{j+1}$
$\theta_j\, d^i_j$	$d^{i\,*}_j\, \theta_j$	$\bar\theta_j\, \bar d^i_j$	$\bar d^{i\,*}_j\, \bar\theta_j$	$\bar d^{i\,*}_j\, \bar d^i_j$	$d^{i\,*}_j\, d^i_j$
$\theta_j\, d^{i\,*}_j$	$d^i_j\, \theta_j$	$\bar\theta_j\, \bar d^{i\,*}_j$	$\bar d^i_j\, \bar\theta_j$	$\bar d^i_j\, \bar d^{i\,*}_j$	$d^i_j\, d^{i\,*}_j$
$\theta_j\, \bar d^i_j$	$\bar d^{i\,*}_j\, \theta_j$	$\bar\theta_j\, d^i_j$	$d^{i\,*}_j\, \bar\theta_j$	$d^{i\,*}_j\, d^i_j$	$\bar d^{i\,*}_j\, \bar d^i_j$
$\theta_j\, \bar d^{i\,*}_j$	$\bar d^i_j\, \theta_j$	$\bar\theta_j\, d^{i\,*}_j$	$d^i_j\, \bar\theta_j$	$d^i_j\, d^{i\,*}_j$	$\bar d^i_j\, \bar d^{i\,*}_j$

Вектор $t_{j,r}$ называется составным каноническим вектором r–го порядка $(r \geq 1)$, если он имеет конкатенационную запись:

$$\langle\, t_{j,r} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, t_{j,r-1}\; \bar t_{j,r-1} \,\rangle, \qquad \langle\, t_{j,1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, d_j\; \bar d_j \,\rangle. \tag{1.76}$$

Для вектора $t_{j,r}$ будем использовать название: **СКВ**–r, являющееся краткой формой для приведённой выше.

Аналогично принятому выше для **СКВ**–r будем рассматривать четвёрку векторов:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, t_{j,r} \,\rangle &= \langle\, t_{j,r-1}\; \bar t_{j,r-1} \,\rangle, & \langle\, t^*_{j,r} \,\rangle &= \langle\, \bar t^*_{j,r-1}\; t^*_{j,r-1} \,\rangle, \\ \langle\, \bar t_{j,r} \,\rangle &= \langle\, \bar t_{j,r-1}\; t_{j,r-1} \,\rangle, & \langle\, \bar t^*_{j,r} \,\rangle &= \langle\, t^*_{j,r-1}\; \bar t^*_{j,r-1} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{1.77}$$

которая в случае $r = 1$ (эта четвёрка векторов) выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, t_{j,1} \,\rangle &= \langle\, d_j\; \bar d_j \,\rangle, & \langle\, t^*_{j,1} \,\rangle &= \langle\, \bar d^*_j\; d^*_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar t_{j,1} \,\rangle &= \langle\, \bar d_j\; d_j \,\rangle, & \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle &= \langle\, d^*_j\; \bar d^*_j \,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{1.78}$$

Используя равенства **(1.64)** — **(1.67)** и **(1.78)**, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, t_{j,1} \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle &= \langle\, \theta_j\; g_j \,\rangle, & \langle\, t_{j,1} \,\rangle \,/\, \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle &= \langle\, \bar\theta_j\; \bar g_j \,\rangle, \\ \langle\, t^*_{j,1} \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar t_{j,1} \,\rangle &= \langle\, g_j\, \theta_j \,\rangle, & \langle\, t^*_{j,1} \,\rangle \,/\, \langle\, \bar t_{j,1} \,\rangle &= \langle\, \bar g_j\; \bar\theta_j \,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{1.79}$$

$$\langle\, t_{j,1} \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, t^*_{j,1} \,\rangle = \langle\, d_j\; d^*_j \,\rangle, \qquad \langle\, t_{j,1} \,\rangle \,/\, \langle\, t^*_{j,1} \,\rangle = \langle\, \bar d_j\; \bar d^*_j \,\rangle. \tag{1.80}$$

$$\langle\, \bar t_{j,1} \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle = \langle\, d^*_j\; d_j \,\rangle, \qquad \langle\, \bar t_{j,1} \,\rangle \,/\, \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle = \langle\, \bar d^*_j\; \bar d_j \,\rangle. \tag{1.81}$$

$$\langle\, t_{j,1} \,\rangle \oplus \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle = \langle\, \bar g_j\; \bar g_j \,\rangle, \qquad \langle\, \bar t_{j,1} \,\rangle \oplus \langle\, \bar t^*_{j,1} \,\rangle = \langle\, g_j\; g_j \,\rangle. \tag{1.82}$$

Теперь, воспользовавшись равенствами **(1.79)** — **(1.82)** и **(1.77)** для случая $r = 2$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, t_{j,2} \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar t^*_{j,2} \,\rangle &= \langle\, d_j\, d^*_j\, d^*_j\, d_j \,\rangle, & \langle\, t_{j,2} \,\rangle \,/\, \langle\, \bar t^*_{j,2} \,\rangle &= \langle\, \bar d_j\, \bar d^*_j\, \bar d^*_j\, \bar d_j \,\rangle, \\ \langle\, t^*_{j,2} \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar t_{j,2} \,\rangle &= \langle\, d^*_j\, d_j\, d_j\, d^*_j \,\rangle, & \langle\, t^*_{j,2} \,\rangle \,/\, \langle\, \bar t_{j,2} \,\rangle &= \langle\, \bar d^*_j\, \bar d_j\, \bar d_j\, \bar d^*_j \,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$

$$\langle\, t_{j,2}\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, t^{*}_{j,2}\,\rangle \;=\; \langle\, \theta_j\, g_j\, g_j\, \theta_j\,\rangle, \qquad \langle\, t_{j,2}\,\rangle\, /\, \langle\, t^{*}_{j,2}\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\theta}_j\, \bar{g}_j\, \bar{g}_j\, \bar{\theta}_j\,\rangle. \tag{1.84}$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,2}\,\rangle \;=\; \langle\, g_j\, \theta_j\, \theta_j\, g_j\,\rangle, \qquad \langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle\, /\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,2}\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{g}_j\, \bar{\theta}_j\, \bar{\theta}_j\, \bar{g}_j\,\rangle. \tag{1.85}$$

$$\langle\, t_{j,2}\,\rangle\, \oplus\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,2}\,\rangle \;=\; \langle\, g_j\, g_j\, g_j\, g_j\,\rangle, \qquad \langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle\, \oplus\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,2}\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{g}_j\, \bar{g}_j\, \bar{g}_j\, \bar{g}_j\,\rangle. \tag{1.86}$$

Продолжение построения векторов с рекурсивным увеличением их порядка будет продолжено в *главе* **IV**, но с использованием дополнительных идей.

1.6 Основные идеи и объекты позиционности в алгебре логики

На том материале, который уже рассмотрен нами, можно обрисовать некоторые идеи и объекты в позиционном подходе к функциям алгебры логики. Уже в **[16]** и **[17]** рассматривается такой подход к функции **(1.2)**, при котором символ f рассматривается как отображение, состоящее из двух независимых отображений q и p, то есть $f \,=\, p\,q$, где

$$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{q} Y_n \;=\; (y_1,\, y_2,\, \ldots\,,\, y_n), \\ Y_n \xrightarrow{p} y; \quad y_1,\, y_2,\, \ldots\,,\, y_n,\;\; y \,\in\, \{\theta,\, \bar{\theta}\} \end{array}\right\} \tag{1.87}$$

По отношению к преобразованиям q накладываются требования:

1) преобразования должны осуществляться без потерь информации, то есть иметь обратные преобразования:

$$q^{-1} \,:\, Y_n \,\longrightarrow\, X_n; \tag{1.88}$$

2) преобразования должны содержать множество всех преобразований $X_n \longrightarrow Y_n$, что означает: каковы бы ни были двоичные наборы X'_n и Y'_n, в множестве q содержится преобразование $q' \,:\, X'_n \longrightarrow Y'_n$.

Преобразование q в самом общем виде будет представляться как:

$$q \;=\; [q_1,\, q_2,\, \ldots\,,\, q_{r-1},\, q_r] \tag{1.89}$$

и первая запись из **(1.87)** будет означать, что преобразования из **(1.89)** выполняются в последовательности их записи, то есть

$$q_1(X_n),\; q_2(q_1(X_n)),\; \ldots\;,\;\; Y_n \;=\; q_r(\ldots(q_2(q_1(X_n)))\;\ldots).$$

Каждое из преобразований $q_j \in q$ будет называться элементарным, если $q_j q_j = 1$, то есть $q_j\left(q_j(X_n)\right) = X_n$ для любого двоичного набора X_n. Это значит

$$q^{-1} = [q_r,\, q_{r-1},\, \ldots\, ,\, q_2,\, q_1], \tag{1.90}$$

где q_j — те же, что и в **(1.89)**, но в **(1.90)** они записаны в обратном порядке.

В самом общем виде можно утверждать, что первое требование на преобразование означает, что мы рассматриваем только эквивалентные преобразования, то есть преобразования, являющиеся биекциями конечного множества номеров

$$M_N = \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, N\},$$

где $N = 2^n - 1$, наборов X_n на себя. Это означает, что такие преобразования будут перестановками на элементах множества M_N.

Второе требование означает полноту множества эквивалентных преобразований q, то есть это множество всех перестановок степени $N+1$, являющееся симметрической группой перестановок S_{N+1} на множестве M_N. Порядок этой группы, как известно, равен $(N + 1)\,!$.

Такие преобразования как инвертирование и перестановка аргументов набора удовлетворяют первому требованию к преобразованиям q, но не удовлетворяют второму требованию, так как не дают всех преобразований q, если даже применять их многократно. В самом деле, инвертирование не может дать больше 2^n, а перестановки аргументов больше $n\,!$ различных преобразований, то есть общее число различных преобразований не может превышать $2^n \cdot n\,!$, что значительно меньше необходимого $(N + 1)\,! = (2^n)\,!$.

В **[16]** — **[19]** определены и исследованы различные элементарные преобразования q_j. Однако нельзя сказать, чтобы рассмотренные там преобразования удовлетворяли общим требованиям позиционности. А эти общие требования будут постепенно сформулированы, а сейчас укажем лишь на одно требование: преобразования должны задаваться двоичными векторами.

Изучение преобразований таблиц определения X_n начнётся со следующей главы.

Вторым объектом исследования являются преобразования p. Любое такое преобразование ставит в соответствие таблице Y_n столбец y, что видно из второй строки **(1.87)**. Роль преобразований p играют позиционные операторы. Мы уже определили простой и сложный позиционные s – операторы. Позиционные операторы будут в дальнейшем очень подробно изучаться, и это изучение будет направлено как на расширение и обобщение понятия позиционного оператора, так и на установление его свойств. Однако и здесь выступает общее требование: позиционный оператор — это двоичный вектор.

Поскольку двоичными векторами являются строки таблицы определения X_n и сами значения функции, рассматриваемые как результаты табулирования функции y на наборах X_n в виде $(y^0, y^1, y^2, \ldots, y^N)$, то различные способы образования и преобразования двоичных векторов представляет для нас немалый интерес.

Изучение инвертирования, сопряжения, двойственности, а также конкатенации двоичных векторов, начатое в этой главе, будет продолжено и в последующих главах, но все эти исследования будут направлены на разработку структурных принципов представления двоичных векторов для нужд позиционности.

Эту главу завершим очень важными объектами позиционности, специальными простыми позиционными s–операторами: σ–операторами, впервые введёнными в работе [18].

1.6.1 σ–операторы.

σ–оператором k–го класса:

$$\sigma_k, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.91}$$

называется оператор, который, будучи применённым к двоичному набору **(1.1)**, даёт *двоичные* значения θ или $\bar\theta$, причём значение $\bar\theta$ принимает тогда и только тогда, когда число

$$N = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.92}$$

совпадает с одним из чисел множества:

$$\{ M, M + 1, M + 2, \ldots, M + 2^k - 1 \}, \tag{1.93}$$

где $M = 2^k (2m + 1)$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Отметим, что в соответствии с данным определением, σ–операторы — это бесконечные векторы, *первые* 2^k координаты которых суть θ, а следующие 2^k координаты равны $\bar\theta$ и далее всё периодически повторяется:

$$\sigma_0 \rightleftharpoons \langle \theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta \ldots \rangle,$$

$$\sigma_1 \rightleftharpoons \langle\, \theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\ldots \rangle,$$

$$\sigma_2 \rightleftharpoons \langle\, \theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\ldots \rangle, \ldots .$$

Одно из замечательных свойств σ–оператора **(1.91)** заключается в том, что для него верна следующая очевидная

Теорема 8. Если число N, определённое в **(1.92)**, записать в двоичном представлении так:

$$N = y_0 + 2y_1 + 2^2 y_2 + \ldots + 2^j y_j + \ldots , \tag{1.94}$$

то

$$y_0 = \sigma_0\,(X_n),\ y_1 = \sigma_1\,(X_n),\ y_2 = \sigma_2\,(X_n),\ \ldots ,\ y_j = \sigma_j\,(X_n),\ \ldots . \tag{1.95}$$

В том, что это действительно так, легко убедиться, взглянув на *таблицу истинности*, которую пишем, когда таблично определяем функцию алгебры логики, перечисляя все возможные наборы для аргументов функций.

Разумеется, что вместо бесконечных σ–операторов можно рассматривать конечные σ–операторы порядка r (предполагая $r > k$): σ_k^r — это операторы, *первые* 2^r координаты которых совпадают с координатами бесконечного оператора σ_k (обращаем внимание, что в σ–операторе счёт координат начинается с *нуля*).

Замечание 11. *Теорема* **8** остаётся верной и для конечных σ_k^j–операторов (где $k = 0, 1, 2, \ldots , j-1$), если

$$j \rightleftharpoons [\, log_2 N\,] + 1 \tag{1.96}$$

(здесь квадратные скобки указывают на то, что мы берём целую часть действительного числа $log_2 N$). Это значит, что *теорема* **8** в этом случае слегка изменит свою форму, точнее, верна

Теорема 9. Если число N, определённое в **(1.92)**, запишется в двоичном представлении так:

$$N = y_0 + 2y_1 + 2^2 y_2 + \ldots + 2^{j-1} y_{j-1}, \tag{1.97}$$

то

$$y_0 = \sigma_0^j(X_n),\ y_1 = \sigma_1^j(X_n),\ y_2 = \sigma_2^j(X_n),\ \ldots ,\ y_{j-1} = \sigma_{j-1}^j(X_n). \tag{1.98}$$

Определение **(1.96)** показывает, как следует вводить порядок, чтобы от *бесконечных* σ–операторов переходить к *конечным.* А это значит, что свойства операторов можно формулировать, учитывая лишь класс оператора и не обращая особого внимания на их порядок. С учётом сказанного, обратим внимание на то, что верны следующие теоремы.

Теорема 10. Если

$$\sigma_0(x_1,\, x_2,\, \dots\,,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots\,,\, x_n) \;=\; \theta, \tag{1.99}$$

то

$$x_i \;=\; \sigma_0(x_1,\, x_2,\, \dots\,,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots\,,\, x_n). \tag{1.100}$$

Верно и обратное, то есть из справедливости **(1.100)** следует справедливость **(1.99)**.

Теорема 11. Пусть

$$z \;=\; \sigma_0(x_1,\, x_2,\, \dots\,,\, x_{i-1},\, x_i,\, x_{i+1},\, \dots\,,\, x_n). \tag{1.101}$$

Тогда

$$x_i \;=\; \sigma_0(x_1,\, x_2,\, \dots\,,\, x_{i-1},\, z,\, x_{i+1},\, \dots\,,\, x_n). \tag{1.102}$$

Верно, что из справедливости **(1.102)** следует справедливость равенства **(1.101)**.

Теорема 12. Если

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_0(x_1,\, \dots\,,\, x_{i-1},\, z,\, x_{i+1},\, \dots\,,\, x_n) \;=\; \theta,\\ &\sigma_0(x_{n+1},\, \dots\,,\, x_{j-1},\, z,\, x_{j+1},\, \dots\,,\, x_{n+m}) \;=\; \theta \end{aligned}\right\} \tag{1.103}$$

то переменная z, входящая в каждое из уравнений системы **(1.103)**, может быть исключена, то есть

$$\sigma_0\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+m}\right) \;=\; \theta. \tag{1.104}$$

Соотношение **(1.104)** верно и в том случае, если вместо z иметь $z_1,\, z_2,\, \dots\,,\, z_s$ в каждое из уравнений системы **(1.103)**.

Теоремы **10 — 12** достаточно просты и не могут вызвать никаких затруднений, поэтому их обоснование опущено. Разумеется, что здесь не ставилась цель установить все свойства σ–операторов, неоднократный возврат к которым предполагается в последующих главах.

А так как над конечными σ–операторами предполагается выполнять логические операции, то ниже рассмотрим способ их записи, который удобен, поскольку в нём хорошо выражен позиционный принцип.

1.6.2 Метод записи конечных σ–операторов.

Как мы знаем, для записи конечных σ–операторов используются векторы размерности 2^n, то есть порядка n, координаты которых суть θ (*нули*) и (или) $\bar{\theta}$ (*единицы*), при этом (в силу определения) для конечного σ–оператора удобнее всего использовать литеры из алфавита Vh, хотя использование алфавита Sh не исключается и в некоторых случаях может оказаться предпочтительным.

При этом мы будем придерживаться таких способов записи: если α — какой–то вектор порядка k (размерности 2^k), то запись α_j означает, что каждая координата вектора α имеет повтор порядка j (то есть 2^j повторов) и, таким образом, вектор α_j имеет порядок $j + k$. А запись α^i означает, что

$$\alpha^i = \underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\,\ldots\,\alpha}_{2^i\,\text{раз}} \tag{1.105}$$

то есть вновь имеем ввиду экспоненциальное вхождение α.

Таким образом, запись α^i_j — это вектор порядка $k + j + i$, если только α — вектор порядка k.

Поскольку векторы из алфавита Vh имеют *порядок* **1**, то векторы $\nu^i_j, \tau^i_j, \bar{\tau}^i_j, \bar{\nu}^i_j$ имеют порядок $j + i + 1$. Вектор $a \in Sh$ имеет *порядок* **2**, значит, вектор a^i_j имеет порядок $j + i + 2$.

Чтобы оттенить экспоненциальное вхождение координат и то, что как *верхний* так и *нижний* индексы у вектора указывают на экспоненциальный характер вхождения, будем использовать двойные ломаные скобки: $\langle\langle\quad\rangle\rangle$. Например:

$$\langle\langle\tau^1_1\rangle\rangle = \langle\langle\tau_1\,\tau_1\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\theta\,\theta\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\tau_2\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta\rangle\rangle, \quad \langle\langle\bar{\tau}_2\rangle\rangle = \langle\langle\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\tau^2\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\rangle\rangle, \quad \langle\langle\bar{\tau}^2\rangle\rangle = \langle\langle\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\tau_3\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\theta}_3\theta_3\rangle\rangle, \ \langle\langle\bar{\tau}_3\rangle\rangle = \langle\langle\theta_3\bar{\theta}_3\rangle\rangle, \ \langle\langle\tau^3\rangle\rangle = \langle\langle\tau^2\tau^2\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\bar{\tau}^2_1\rangle\rangle = \langle\langle\bar{\tau}^1_1\,\bar{\tau}^1_1\rangle\rangle, \quad \langle\langle\tau^1_2\rangle\rangle = \langle\langle\tau_2\,\tau_2\rangle\rangle.$$

Совершенно ясно, что для конечных σ–операторов класса k и порядка j, то есть для σ^j_k и $\bar{\sigma}^j_k$, указанный способ приводит к равенствам:

$$\sigma^j_k = \langle\langle\bar{\tau}^{\,j-k-1}_k\rangle\rangle, \quad \bar{\sigma}^j_k = \langle\langle\tau^{\,j-k-1}_k\rangle\rangle. \tag{1.106}$$

Обращаем внимание, что записи *правых* и *левых* частей **(1.106)** обладают различными возможностями. Точнее, всякий конечный σ–оператор с верхними и нижними индексами может быть записан с использованием двойных ломаных скобок, но не всякий оператор, записанный по указанному выше способу с использованием *двойных ломаных скобок*, может быть записан через σ с верхними и нижними индексами.

В соответствии со сказанным, в дальнейшем мы расширяем понятие σ–оператора, называя конечным σ–оператором всякий оператор, записанный по указанному выше способу с использованием *двойных ломаных скобок*, а из множества таких σ–операторов будем выделять операторы, которые допускают записи через σ с верхними и нижними индексами, называя их *базовыми* σ–операторами.

Операторы

$$\langle\langle(\tau\,\bar\nu)^3\rangle\rangle,\quad \langle\langle(\bar\nu\,\tau)^3\rangle\rangle,\quad \langle\langle(\nu\,\tau\,\bar\tau\,\tau)^2\rangle\rangle,\quad \langle\langle(\nu_2\,(\nu\,\tau)^1)^1\rangle\rangle \tag{1.107}$$

суть конечные σ–операторы *пятого* порядка (обращаем внимание на то, что отсутствие нижнего или (и) верхнего индекса означает равенство их *нулю*).

Замечание 12. Всякий конечный σ–оператор может рассматриваться и как бесконечный σ–оператор, если подразумевать записанное в двойных ломаных скобках периодически продолженным, а это значит: в случае бесконечного σ–оператора иногда запись может быть заменена более простой с сохранением смысла.

Например. Операторы **(1.107)**, когда рассматриваются как бесконечные, то могут быть заменены на операторы

$$\langle\langle\tau\,\bar\nu\rangle\rangle,\ \ \langle\langle\bar\nu\,\tau\rangle\rangle,\ \ \langle\langle\nu\,\tau\,\bar\tau\,\tau\rangle\rangle,\ \ \langle\langle\nu_2\,(\nu\,\tau)^1\rangle\rangle \tag{1.108}$$

соответственно.

Замечание 13. Операторы **(1.107)** и **(1.108)** могут быть записаны с использованием алфавита Sh так:

$$\langle\langle\bar 4^3\rangle\rangle,\quad \langle\langle 7^3\rangle\rangle,\quad \langle\langle(46)^2\rangle\rangle,\quad \langle\langle(0_1\,4^1)^1\rangle\rangle;$$
$$\langle\langle\bar 4\rangle\rangle,\quad \langle\langle 7\rangle\rangle,\quad \langle\langle 46\rangle\rangle,\quad \langle\langle 0_1\,4^1\rangle\rangle.$$

Изложение идей, связанных с σ–операторами, будет продолжено в **III** *главе*, точнее в **3.5**.

Глава 2

Области определения и их преобразования

2.1 Таблица определения и её инвертирование

Область определения функции алгебры логики n переменных (или таблица определения) X_n содержит наборы из $\mathbf{2}^n$ различных векторов размерности $\mathbf{n}$ в их стандартном расположении, представляющих собой в двоичном счислении числа $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{2}^n$ **- 1**, при этом двоичные числа имеют растущую слева направо разрядность. Для случая $n = \mathbf{2}$ и $n = \mathbf{3}$ такие таблицы определения представлены первыми двумя столбцами *таблицы* **2** § **2** *главы* **I** и первыми тремя столбцами *таблицы* **3** § **2** *главы* **I**. Обращаем внимание на то, что именно такое расположение нами выбрано (в отличие от традиционного [**22, 23, 26, 27**]) в связи с тем, что таблица может достраиваться с увеличением числа переменных. Например, если добавляем к таблице определения ещё одно переменное (так к *таблице* **3** § **2** *главы* **I** — переменное x_4), то имеющуюся таблицу следует повторить ещё раз, а затем справа присоединить ещё один столбец, первую половину которого нужно заполнить цифрами θ, а вторую половину — цифрами $\bar{\theta}$.

Описанную выше таблицу определения будем обозначать через X_n и молчаливо предполагать (если не оговорено иное), что аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят все однократно. Такую таблицу будем подвергать различным преобразованиям, среди которых простейшими следует считать инвертирование некоторых столбцов таблицы.

Инвертирование столбцов таблицы X_n будет задаваться двоичным $\mathbf{n}$ – мерным вектором, координаты которого заключаются в *треугольные* скобки, а именно $I_n = \langle i_1, i_2, \ldots, i_n \rangle$, где $i_j \in Zh$. Результат инвертирования есть таблица $\text{У}_n = \langle\oplus\rangle\,(I_n,\,X_n)$. В силу определения следует, что:

1) тождественным будет преобразование, все координаты которого суть θ, то есть $\langle\theta_n\rangle$;

2) $\bar{X}_n$ есть результат применения к X_n преобразования, все координаты которого суть $\bar{\theta}$, то есть $\langle\bar{\theta}_n\rangle$;

3) результат двух последовательно выполненных преобразований I_n^1 и I_n^2 есть преобразование

$$I_n \,=\, \langle\oplus\rangle\,(I_n^1,\, I_n^2). \tag{2.1}$$

Имея ввиду **(2.1)**, можно и на координаты $\bar{\theta}_j$ вектора I_n смотреть как на вектора $\langle[\bar{\theta}_j]\rangle$, все координаты которых суть θ, кроме j – ой, которая равна $\bar{\theta}$. Но тогда мы можем говорить и о векторе $\langle[\theta_j]\rangle$, все координаты которого суть $\bar{\theta}$, кроме j – ой, которая равна θ, а это значит:

$$\langle\bar{\theta}_n\rangle \,=\, \langle\oplus\rangle\,(\langle[\theta_j]\rangle, \langle[\bar{\theta}_j]\rangle, \qquad \langle\theta_n\rangle \,=\, \langle\bar{\oplus}\rangle\,([\theta_j]\rangle, \langle[\bar{\theta}_j]\rangle.$$

Таблицу определения X_n удобно рассматривать как последовательно записанные $\mathbf{2}^r$ подтаблицы без общих строк (следующих сверху вниз без изменения порядка следования): $X_{(0)},\, X_{(1)},\, X_{(2)},\, \ldots\, , X_{(m)}$ (указывая: $X_{(k)} \in X_n$, когда это прямо не следует из контекста), то есть

$$\left.\begin{array}{c} X_n \,\rightleftharpoons\, (X_{(0)},\, X_{(1)},\, X_{(2)},\, \ldots\, , X_{(m)}), \\ m \,=\, 2^r - 1, \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

каждая из которых имеет $\mathbf{2}^s$ строк и n столбцов, при этом

$$r + s = n, \qquad 0 \le r \le n. \tag{2.3}$$

Заметим, что в случае $r \,=\, 0$ практически не происходит деление таблицы на подтаблицы.

Инвертирование строк таблицы есть не что иное, как инвертирование строк в подтаблицах, поэтому из **(2.2)** следует

$$\left.\begin{array}{c} \bar{X}_n \,=\, (\bar{X}_{(0)},\, \bar{X}_{(1)},\, \bar{X}_{(2)},\, \ldots\, , \bar{X}_{(m)}), \\ m \,=\, 2^r - 1. \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Сопряжение для таблицы, обозначаемое через X_n^* означает запись исходной таблицы X_n, при которой строки следуют в порядке, обратном исходному. То же верно и для подтаблиц, поэтому верно

$$\left.\begin{array}{c} X_n^* \,=\, (X_{(m)}^*,\, \ldots\,, X_{(2)}^*,\, X_{(1)}^*,\, X_{(0)}^*), \\ m \,=\, 2^r - 1. \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Но в силу соглашения о записи исходной таблицы определения, принятое в начале этого параграфа, следует, что в **(2.4)** и **(2.5)** имеем:

$$\bar{X}_n \,=\, X_n^*, \tag{2.6}$$

и

$$\left.\begin{array}{c} \bar{X}_{(i)} \,=\, X_{(m-i)}^*, \\ i \,=\, 0,\, 1,\, \ldots\,, m. \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

Таблица 1

x_1	x_2	x_3	x_4	X_4	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{X}_4$
θ	θ	θ	θ		$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	
$\bar{\theta}$	θ	θ	θ	$X_{(0)}$	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$X_{(3)}^*$
θ	$\bar{\theta}$	θ	θ		$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	θ		θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	
θ	θ	$\bar{\theta}$	θ		$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	
$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	θ	$X_{(1)}$	θ	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	$X_{(2)}^*$
θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ		$\bar{\theta}$	θ	θ	$\bar{\theta}$	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ		θ	θ	θ	$\bar{\theta}$	
θ	θ	θ	$\bar{\theta}$		$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	
$\bar{\theta}$	θ	θ	$\bar{\theta}$	$X_{(2)}$	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	$X_{(1)}^*$
θ	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$		$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	θ	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$		θ	θ	$\bar{\theta}$	θ	
θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$		$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	θ	
$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$X_{(3)}$	θ	$\bar{\theta}$	θ	θ	$X_{(0)}^*$
θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$		$\bar{\theta}$	θ	θ	θ	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$		θ	θ	θ	θ	

Лемма 1. Если

$$У_n \,=\, \langle\oplus\rangle\,(\langle[\bar{\theta}_j]\rangle,\, X_n), \tag{2.8}$$

то, приняв

$$r \,=\, n \,-\, j \,+\, 1, \quad j \,=\, s \,+\, 1, \tag{2.9}$$

получим:

$$\text{У}_{(2k)} = X_{(2k+1)}, \quad \text{У}_{(2k+1)} = X_{(2k)}, \tag{2.10}$$

где $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, \frac{m-1}{2}$.

Доказательство. Лемма верна в силу того, что **(2.8)** означает инвертирование только **j** – го столбца таблицы X_n, а **(2.9)** и **(2.2)** означают, что две последовательные подтаблицы $X_{(2k)}$, $X_{(2k+1)}$ исходной таблицы в таблице У_n поменяются местами, что и зафиксировано в **(2.10)**.

Лемма 2. Если

$$\bar{\text{У}}_n = \langle\oplus\rangle\,(\langle[\theta_j]\rangle,\, X_n), \tag{2.11}$$

то, приняв **(2.9)**, получим:

$$\bar{X}_{(2k)} = X^*_{(m-2k)}, \quad \bar{X}_{(2k+1)} = X^*_{(m-2k-1)}, \tag{2.12}$$

Продолжение таблицы 1

x_1	x_2	$\bar{x}_3$	x_4	У_4	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$\bar{x}_4$	$\bar{\text{У}}_4$
θ	θ	$\bar{\theta}$	θ	$X_{(1)}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	$X^*_{(2)}$
$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	θ		θ	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	
θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ		$\bar{\theta}$	θ	θ	$\bar{\theta}$	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ		θ	θ	θ	$\bar{\theta}$	
θ	θ	θ	θ	$X_{(0)}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$X^*_{(3)}$
$\bar{\theta}$	θ	θ	θ		θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	
θ	$\bar{\theta}$	θ	θ		$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	θ		θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	
θ	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$X_{(3)}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	θ	$X^*_{(0)}$
$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$		θ	$\bar{\theta}$	θ	θ	
θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$		$\bar{\theta}$	θ	θ	θ	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$		θ	θ	θ	θ	
θ	θ	θ	$\bar{\theta}$	$X_{(2)}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	$X^*_{(1)}$
$\bar{\theta}$	θ	θ	$\bar{\theta}$		θ	$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	
θ	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$		$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$	θ	
$\bar{\theta}$	$\bar{\theta}$	θ	$\bar{\theta}$		θ	θ	$\bar{\theta}$	θ	

где $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, \frac{m-1}{2}$.

Доказательство. Используя **(2.7)**, получим: $\bar{У}_{(i)} = У^*_{(m-i)}$. Если принять $i = 2k$, а затем $i = 2k + 1$, то последнее даёт:

$$\bar{У}_{(2k)} = У^*_{(m-2k)}, \quad \bar{У}_{(2k+1)} = У^*_{(m-2k-1)}. \tag{2.13}$$

Используя **(2.7)** и заключение **леммы 1**, из **(2.13)** получим:

$$\bar{X}_{(2k+1)} = X^*_{(m-2k-1)}, \quad \bar{X}_{(2k)} = X^*_{(m-2k)}.$$

Подтверждение равенств **(2.6)**, **(2.10)**, **(2.12)** для случая $n = \mathbf{4}$, $j = \mathbf{3}$, $r = \mathbf{2}$ находим в *таблице* **1**.

Назовём представление X_n в виде **(2.2)** декомпозицией r – го порядка таблицы определения. Поскольку имеет место равенство **(2.7)**, то декомпозицию r – го порядка таблицы X_n лучше всего представлять так: $t = 2^{r-1} - 1$ и

$$X_n = (X_{(0)}, X_{(1)}, \ldots, X_{(t)}, \bar{X}^*_{(t)}, \ldots, \bar{X}^*_{(1)}, \bar{X}^*_{(0)}). \tag{2.14}$$

Тогда декомпозиция r – го порядка инвертированной таблицы $\bar{X}_n$ примет при $t = 2^{r-1} - 1$ вид:

$$\bar{X}_n = (\bar{X}_{(0)}, \bar{X}_{(1)}, \ldots, \bar{X}_{(t)}, X^*_{(t)}, \ldots, X^*_{(1)}, X^*_{(0)}). \tag{2.15}$$

Теорема 1. В условиях **лемм 1** и **2** декомпозиции r – го порядка над преобразованными таблицами $У_n$ и $\bar{У}_n$ имеют вид:

$$\mathrm{У_n} = (\mathrm{X_{(1)}, X_{(0)}, X_{(3)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(t)}, X_{(t-1)}, \bar{X}^*_{(t-1)}, \bar{X}^*_{(t)}, \ldots, \bar{X}^*_{(2)}, \bar{X}^*_{(3)}, \bar{X}^*_{(0)}, \bar{X}^*_{(1)}}), \tag{2.16}$$

$$\mathrm{\bar{У}_n} = (\mathrm{\bar{X}_{(1)}, \bar{X}_{(0)}, \bar{X}_{(3)}, \bar{X}_{(2)}, \ldots, \bar{X}_{(t)}, \bar{X}_{(t-1)}, X^*_{(t-1)}, X^*_{(t)}, \ldots, X^*_{(2)}, X^*_{(3)}, X^*_{(0)}, X^*_{(1)}}), \tag{2.17}$$

где $t = 2^{r-1} - 1$.

Доказательство. В самом деле, декомпозиция r – го порядка таблицы $У_n$ по **(2.14)** даёт:

$$У_n = (У_{(0)}, У_{(1)}, \ldots, У_{(t)}, \bar{У}^*_{(t)}, \ldots, \bar{У}^*_{(1)}, \bar{У}^*_{(0)}),$$

а применяя заключение **леммы 1**, получим равенство **(2.16)** и, инвертируя последнее, получим равенство **(2.17)**.

Замечание 1. Выражения **(2.14)** — **(2.17)** можно было бы записать и так:

$$X_n = (X_{(q)}; \bar{X}^*_{(t-q)}), \quad \bar{X}_n = (\bar{X}_{(q)}; X^*_{(t-q)}),$$

$$q = 0,\, 1,\, 2,\, \dots,\, t.$$

$$\left.\begin{aligned} У_n &= (X_{(q+1)},\, X_{(q)};\ \bar{X}^*_{(q)},\, \bar{X}^*_{(q+1)}), \\ \bar{У}_n &= (\bar{X}_{(q+1)},\, \bar{X}_{(q)};\ X^*_{(q)},\, X^*_{(q+1)}), \end{aligned}\right\}\ q = 0,\, 2,\, 4,\, \dots,\, t-1.$$

Обращаем особое внимание в этих записях на запятую и точку с запятой, смысл которых становится ясным, сопоставляя их с **(2.14) — (2.17)**.

Если теперь обобщим предыдущие записи $\langle[\theta_j]\rangle$ и $\langle[\bar{\theta}_j]\rangle$ до

$$\langle[\bar{\theta}_j]\rangle \oplus \langle[\bar{\theta}_{j+i}]\rangle = \langle[\bar{\theta}_j,\, \bar{\theta}_{j+i}]\rangle, \tag{2.18}$$

означающую, что все координаты вектора **(2.18)** суть θ, кроме j – ой и $(j+i)$ – ой, которые равны $\bar{\theta}$, то следует иметь ввиду, что

$$\langle[\bar{\theta}_j,\, \bar{\theta}_{j+i}]\rangle = \langle[\theta_j,\, \theta_{j+i}]\rangle \tag{2.19}$$

и отрицанием последнего вектора **(2.19)** является вектор:

$$\langle[\bar{\theta}_j,\, \theta_{j+i}]\rangle = \langle[\theta_j,\, \bar{\theta}_{j+i}]\rangle, \tag{2.20}$$

означающий, что все координаты последнего суть $\bar{\theta}$ за исключением двух: j – ой и $(j+i)$ – ой, которые равны θ.

В силу сказанного выше примем:

$$\begin{aligned} Z_n \rightleftharpoons \langle\oplus\rangle\,(\langle[\bar{\theta}_{j+i}]\rangle,\, У_n) &= \langle\oplus\rangle\,(\langle[\bar{\theta}_{j+i}]\rangle,\, \langle[\bar{\theta}_j]\rangle,\, X_n) = \\ &= \langle\oplus\rangle\,(\langle[\bar{\theta}_j,\, \bar{\theta}_{j+i}]\rangle,\, X_n), \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_n = \langle\oplus\rangle\,(\langle[\theta_{j+i}]\rangle,\, У_n) &= \langle\oplus\rangle\,(\langle[\theta_{j+i}]\rangle,\, \langle[\bar{\theta}_j]\rangle,\, X_n) = \\ &= \langle\oplus\rangle\,(\langle[\bar{\theta}_j,\, \theta_{j+i}]\rangle,\, X_n), \end{aligned} \tag{2.22}$$

Теорема 2. Если Z_n — таблица, полученная инвертированием j – го и $(j+i)$ – го столбцов таблицы X_n, то для $q = 0,\, 2,\, 4,\, \dots,\, t_1 - 1$ имеем:

$$Z_n = (У_{(q+1)},\, У_{(q)};\, \bar{У}^*_{(q)},\, \bar{У}^*_{(q+1)}), \quad \bar{Z}_n = (\bar{У}_{(q+1)},\, \bar{У}_{(q)};\, У^*_{(q)},\, У^*_{(q+1)}), \tag{2.23}$$

где $t_1 = 2^{n-(j+i)} - 1,\ t = 2^{n-j} - 1,\ \frac{t+1}{t_1+1} = t_0 + 1 = 2^i$ и

$$У_{(p)} = (X_{(q+1)},\, X_{(q)}), \tag{2.24}$$

при этом для p – нечётного имеем:

$$q = (p-1)(t_0+1),\ \ (p-1)(t_0+1)+2,\, \dots,\, p(t_0+1)-2, \tag{2.25}$$

а для p – чётного

$$q = (p+1)(t_0+1), \ (p+1)(t_0+1)+2, \ldots, (p+2)(t_0+1)-2. \qquad (2.26)$$

Доказательство. В соответствии с **(2.21)** инвертирование j – го и $(j+i)$ – го столбцов таблицы X_n может рассматриваться как инвертирование $(j+i)$ – го столбца таблицы $У_n$, полученной в результате инвертирования j – го столбца таблицы X_n. Но инвертирование j – го столбца таблицы X_n по **теореме 1** даёт **(2.16)**, а по той же **теореме 1** инвертирование $(j+i)$ – го столбца таблицы $У_n$ приводит к декомпозиции порядка $n-(j+i)+1 = r_1$ и $2^{r_1} = m_1+1$ подтаблиц содержат по $2^{s_1} = 2^{(j+i)-1}$ строк каждая. А это значит, что верны равенства **(2.23)**, где имеют место **(2.24)** с соответствующими **(2.25)** и **(2.26)** для нечётного и чётного p соответственно, при этом следует иметь ввиду, что $t+1 = (t_0+1)(t_1+1)$.

Замечание 2. Для **(2.24)** по **(2.25)** имеем:

$$\begin{aligned}
&p = 1, \quad q = 0, 2, 4, 6, \ldots, t_0-1,\\
&p = 3, \quad q = 2(t_0+1), 2(t_0+1)+2, 2(t_0+1)+4, \ldots, 3(t_0+1)-2,\\
&p = 5, \quad q = 4(t_0+1), 4(t_0+1)+2, 4(t_0+1)+4, \ldots, 5(t_0+1)-2,
\end{aligned}$$

. . . .

. . . .

$$p = t_1, \quad q = (t_1-1)(t_0+1), (t_1-1)(t_0+1)+2, \ \ldots, t_1(t_0+1)-2,$$

а по **(2.26)** получаем:

$$\begin{aligned}
&p = 0, \quad q = t_0+1, t_0+3, t_0+5, \ldots, 2(t_0+1)-2,\\
&p = 2, \quad q = 3(t_0+1), 3(t_0+1)+2, \ldots, 4(t_0+1)-2,\\
&p = 4, \quad q = 5(t_0+1), 5(t_0+1)+2, \ldots, 6(t_0+1)-2,
\end{aligned}$$

. . . .

. . . .

$$p = t_1-1, \quad q = t_1(t_0+1), t_1(t_0+1)+2, \ \ldots, (t_1+1)(t_0+1)-2.$$

2.2 Преобразование таблицы перестановкой её столбцов

Перестановка столбцов таблицы определения X_n будет задаваться перестановкой, являющейся биекцией множества номеров переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на себя **[28]**. Например, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ перестановкой $[\mu] = [(2, 4)(1, 5, 6)]$ преобразуется в

$$[\mu]\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_5, x_4, x_3, x_2, x_6, x_1).$$

Перестановкой $[\nu] = [(1, 3, 4)(2, 6)]$ последний набор преобразуется так:

$$[\nu]\,(x_5, x_4, x_3, x_2, x_6, x_1) = (x_5, x_1, x_4, x_6, x_2, x_3).$$

Последовательное выполнение преобразований $[\mu]$ и $[\nu]$ есть произведение преобразований

$$[\gamma] = [\mu] \cdot [\nu]. \qquad (2.27)$$

Для только что рассмотренного примера имеем:

$$[\gamma] = [(2, 4)\,(1, 5, 6)] \cdot [(1, 3, 4)\,(2, 6)] = [(1, 5, 2)\,(3, 4, 6)].$$

Таблица 2

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th><th>X_4</th><th>X_4</th><th>x_1</th><th>x_3</th><th>x_2</th><th>x_4</th><th>X_4^1</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_4</th><th>x_3</th><th>X_4^2</th></tr>
<tr><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(0)}$</td><td rowspan="4">$У_{(0)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(0)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td rowspan="4">$У_{(0)}$</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(1)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(2)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(2)}$</td><td rowspan="4">$У_{(1)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(1)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="4">$\bar{У}^*_{(1)}$</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(3)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td rowspan="2">$X_{(3)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(3)}$</td><td rowspan="4">$\bar{У}^*_{(1)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(3)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td rowspan="4">$У_{(1)}$</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(2)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(1)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(1)}$</td><td rowspan="4">$\bar{У}^*_{(0)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(2)}$</td><td>θ</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="4">$\bar{У}^*_{(0)}$</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td></tr>
<tr><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(0)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td rowspan="2">$\bar{X}^*_{(0)}$</td><td>θ</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td></tr>
<tr><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td><td>$\bar\theta$</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 2

x_1	x_3	x_4	x_2	X_4^3	x_1	x_4	x_3	x_2	X_4^4
θ $\bar\theta$	θ θ	θ θ	θ θ	$X_{(0)}$	θ $\bar\theta$	θ θ	θ θ	θ θ	$X_{(0)}$
θ $\bar\theta$	θ θ	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(3)}$	θ $\bar\theta$	θ θ	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(3)}$
θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	θ θ	$X_{(1)}$	θ $\bar\theta$	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	$X_{(2)}$
θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(2)}$	θ $\bar\theta$	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(1)}$
θ $\bar\theta$	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	$X_{(2)}$	θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	θ θ	$X_{(1)}$
θ $\bar\theta$	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(1)}$	θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(2)}$
θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	$X_{(3)}$	θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	θ θ	$X_{(3)}$
θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(0)}$	θ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar\theta$ $\bar\theta$	$\bar{X}^*_{(0)}$

Применение $[\gamma]$ к исходному аргументу даёт заключительный, в самом деле:

$$[(1,\,5,\,2)\,(3,\,4,\,6)]\,(x_1,\,x_2,\,x_3\,x_4,\,x_5,\,x_6)\;=\;(x_5,\,x_1,\,x_4,\,x_6,\,x_2,\,x_3).$$

Для начала рассмотрим преобразование таблицы X_n транспозицией

$$[\delta_j]\;=\;[(j,\,j+1)], \tag{2.28}$$

рассмотрев декомпозицию X_n в виде **(2.14)**, где $t\,=\,2^{r-1}-1$, $r\,=\,n-j+1$, и воспользовавшись *замечанием* **1** из **п. 1**:

$$\left.\begin{array}{l} X_n\;=\;(X_{(q)},\,X_{(q+1)},\,X_{(q+2)},\,X_{(q+3)};\,\bar{X}^*_{(t-q-3)},\,\bar{X}^*_{(t-q-2)},\,\bar{X}^*_{(t-q-1)},\,\bar{X}^*_{(t-q)}),\\ q\;=\;0,\,4,\,8,\,\ldots\,,\,t_0;\;\;t_0=2^{r-3}-1. \end{array}\right\} \tag{2.29}$$

Поскольку транспозиция в каждой четвёрке компонент декомпозиции меняет местами только две средние компоненты, то верна следующая ниже лемма, обоснование которой является вполне достаточным.

Лемма 1. Если таблица X_n имеет декомпозицию **(2.29)**, то преобразование транспозицией **(2.28)** имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l}[\delta_j]\,(X_n) \,=\, (X_{(q)},\, X_{(q+2)},\, X_{(q+1)},\, X_{(q+3)};\, \bar{X}^*_{(t-q-3)},\, \bar{X}^*_{(t-q-1)},\, \bar{X}^*_{(t-q-2)}, \bar{X}^*_{(t-q)}),\\ q \,=\, 0,\, 4,\, 8,\, \ldots\,,\, t_0;\;\; t_0 = 2^{r-3} - 1.\end{array}\right\} \tag{2.30}$$

Иллюстрацию к **лемме 1** мы можем обнаружить в *таблице* **2**: $n \,=\, 4,\, j \,=\, 2,\, r \,=\, 3,\, t_0 \,=\, 0$ и

$$X_4 \,=\, (X_{(0)},\, X_{(1)},\, X_{(2)},\, X_{(3)},\, \bar{X}^*_{(3)},\, \bar{X}^*_{(2)},\, \bar{X}^*_{(1)}, \bar{X}^*_{(0)}), \tag{2.31}$$

$$X^1_4 \,=\, [\delta_2]\,(X_4) \,=\, (X_{(0)},\, X_{(2)},\, X_{(1)},\, X_{(3)},\, \bar{X}^*_{(3)},\, \bar{X}^*_{(1)},\, \bar{X}^*_{(2)}, \bar{X}^*_{(0)}). \tag{2.32}$$

Замечание 1. В том случае, когда $j \,=\, n - 1$, в **(2.29)** и **(2.30)** получим $r \,=\, 2$. Вычисление t_0 теряет смысл. На это следует обратить внимание, поскольку декомпозиция **(2.29)**, а, следовательно, и **(2.30)** будет содержать всего лишь одну четвёрку компонент.

Иллюстрацию к *замечанию* **1** обнаруживаем в той же *таблице* **2**:

$$X_4 \,=\, (\text{У}_{(0)},\, \text{У}_{(1)},\, \bar{\text{У}}^*_{(1)},\, \bar{\text{У}}^*_{(0)}), \tag{2.33}$$

$$X^2_4 \,=\, [\delta_3] \,\cdot\, (X_4) \,=\, (\text{У}_{(0)},\, \bar{\text{У}}^*_{(1)},\, \text{У}_{(1)},\, \bar{\text{У}}^*_{(0)}). \tag{2.34}$$

Можно получить из *таблицы* **2** подтверждение и в более сложных случаях. Так $X^3_4 \,=\, [(2,\, 3,\, 4)] \,\cdot\, (X_4)$, а так как $[(2,\, 3,\, 4)] \,=\, [\delta_3] \,\cdot\, [\delta_2]$, то $X^2_4 \,=\, [\delta_3]\,(X_4)$, $X^3_4 \,=\, [\delta_2]\,(X^2_4)$, и поскольку из сопоставления **(2.33)** с **(2.31)** имеем:

$$\text{У}_{(0)} \,=\, (X_{(0)},\, X_{(1)}),\, \text{У}_{(1)} \,=\, (X_{(2)},\, X_{(3)}),$$

то по **(2.34)**:

$$X^2_4 \,=\, (X_{(0)},\, X_{(1)},\, \bar{X}^*_{(3)},\, \bar{X}^*_{(2)},\, X_{(2)},\, X_{(3)},\, \bar{X}^*_{(1)},\, \bar{X}^*_{(0)})$$

и, следовательно,

$$X^3_4 \,=\, [\delta_2]\,(X^2_4) \,=\, (X_{(0)},\, \bar{X}^*_{(3)},\, X_{(1)},\, \bar{X}^*_{(2)},\, X_{(2)},\, \bar{X}^*_{(1)},\, X_{(3)},\, \bar{X}^*_{(0)}).$$

И, наконец, по *таблице* **2** $X^4_4 \,=\, [(2,\, 4)]\,(X_4)$, но так как $[(2,\, 4)] \,=\, [\delta_2] \cdot [\delta_3] \cdot [\delta_2]$, то вновь можно воспользоваться **леммой 1**: $[\delta_2]\,(X_4) \,=\, X^1_4$ (см. **(2.32)**), $[\delta_3]\,(X^1_4) \,=\, X^5_4$, значит,

$$X^5_4 \,=\, (X_{(0)},\, X_{(2)},\, \bar{X}^*_{(3)},\, \bar{X}^*_{(1)},\, X_{(1)},\, X_{(3)},\, \bar{X}^*_{(2)},\, \bar{X}^*_{(0)})$$

(последнее в *таблице* **2** не представлено), но $[\delta_2]\,(X_4^5) = X_4^4$ и

$$X_4^4 = (X_{(0)},\, \bar{X}^*_{(3)},\, X_{(2)},\, \bar{X}^*_{(1)},\, X_{(1)},\, \bar{X}^*_{(2)},\, X_{(3)},\, \bar{X}^*_{(0)}),$$

что уже может быть обнаружено и в *таблице* **2**.

Эти частные результаты, полученные с помощью **леммы 1**, показывают путь применения **леммы 1** в общем случае, если иметь ввиду следующую лемму.

Лемма 2. Последовательность транспозиций

$$(1,\,2),\,(2,\,3),\,(3,\,4),\,\ldots\,,\,(n-1,\,n) \tag{2.35}$$

составляет систему образующих для симметрической группы S_n на множестве $\{1,\,2,\,3,\,\ldots\,,\,n\}$.

Доказательство. Чтобы убедиться в верности этой леммы, достаточно заметить, что

$$[(a_1,\,a_2,\,a_3,\,\ldots\,,\,a_m)] = [(a_1,\,a_m)\,(a_2,\,a_m)\,(a_3,\,a_m)\,\ldots\,(a_{m-1},\,a_m)], \tag{2.36}$$

$$[(i,\,j)] = [(i,\,n)\,(j,\,n)\,(i,\,n)], \tag{2.37}$$

$$[(k,\,n)] = [(k,\,k+1)\,(k+1,\,k+2)\,\ldots\,(n-1,\,n)\,(n-1,\,n-2)\,\ldots\,(k+2,\,k+1)\,(k+1,\,k)] \tag{2.38}$$

В самом деле, **(2.38)** есть запись

$$[(k,\,n)] = [\delta_k]\cdot[\delta_{k+1}]\cdot\ldots\cdot[\delta_{n-2}]\cdot[\delta_{n-1}]\cdot[\delta_{n-2}]\cdot\ldots\cdot[\delta_{k+1}]\cdot[\delta_k],$$

которая показывает представление транспозиции $[(k,\,n)]$ с помощью транспозиций из последовательности **(2.35)**, то есть из последовательности

$$[\delta_1],\,[\delta_2],\,[\delta_3],\,\ldots\,,\,[\delta_{n-1}]. \tag{2.39}$$

А **(2.37)** есть представление произвольной транспозиции [(i, j)] через произведение транспозиций вида [(k, n)]. И, наконец, **(2.36)** показывает, что любой цикл может быть представлен в виде произведения транспозиций.

Применение любой транспозиции из **(2.39)** к декомпозиции таблицы определено в **лемме 1**, которая теперь приобретает общий характер.

2.3 Преобразования различных порядков над векторами

Как и в **п. 4 гл. I**, запись $\langle\gamma_n\rangle$ будет по умолчанию означать вектор n – го порядка, то есть вектор размерности 2^n. Поскольку ниже будем заниматься только векторами какого-то порядка, то слово *“порядок”* не всегда будет упоминаться, но всегда будет подразумеваться. Над векторами n – го порядка будем выполнять различные операции, связанные с их преобразованием, но иногда такие операции преобразования будет выполняться не над всем $\langle\gamma_n\rangle$, а над некоторой его частью. Для этого над самим $\langle\gamma_n\rangle$ предварительно будем выполнять декатенацию (операцию расчленения вектора на отдельные части) различных порядков.

Под декатенацией k – го порядка над $\langle\gamma_n\rangle$ будем подразумевать расчленение вектора на 2^k равных частей без пересечений (без общих частей), то есть

$$\langle\gamma_n\rangle = \langle\gamma^0_{n-1}\,\gamma^1_{n-1}\rangle = \langle\gamma^0_{n-2}\,\gamma^1_{n-2}\,\gamma^2_{n-2}\,\gamma^3_{n-2}\rangle = \ldots =$$
$$= \langle\gamma^0_{n-s}\,\gamma^1_{n-s}\,\gamma^2_{n-s}\,\gamma^3_{n-s}\,\ldots\,\gamma^{k-3}_{n-s}\,\gamma^{k-2}_{n-s}\,\gamma^{k-1}_{n-s}\,\gamma^{k}_{n-s}\rangle, \tag{2.40}$$

где

$$k = 2^s - 1, \qquad 0 \le s \le n-1. \tag{2.41}$$

В записях **(2.40)** между компонентами вектора запятая опущена: это фактически конкатенация (операция, обратная декатенации) компонент, полученных в результате декатенации и такой вид записи будет применяться и дальше. В записях **(2.40)** предполагается, что

$$\langle\gamma^0_n\rangle = \langle\gamma_n\rangle;$$
$$\begin{aligned}
\langle\gamma^0_{n-1}\rangle &= \langle\gamma^0_{n-2}\,\gamma^1_{n-2}\rangle, & \langle\gamma^1_{n-1}\rangle &= \langle\gamma^2_{n-2}\,\gamma^3_{n-2}\rangle;\\
\langle\gamma^0_{n-2}\rangle &= \langle\gamma^0_{n-3}\,\gamma^1_{n-3}\rangle, & \langle\gamma^1_{n-2}\rangle &= \langle\gamma^2_{n-3}\,\gamma^3_{n-3}\rangle;\\
\langle\gamma^2_{n-2}\rangle &= \langle\gamma^4_{n-3}\,\gamma^5_{n-3}\rangle, & \langle\gamma^3_{n-2}\rangle &= \langle\gamma^6_{n-3}\,\gamma^7_{n-3}\rangle; \ldots
\end{aligned}$$

И в самом общем виде предполагается, что

$$\langle\gamma^m_{n-s+1}\rangle = \langle\gamma^{2m}_{n-s}\,\gamma^{2m+1}_{n-s}\rangle, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^{s-1}-1. \tag{2.42}$$

Ниже обобщим используемую в классике запись

$$x^r = \begin{cases} \bar{x} \text{ при } r = 0,\\ x \text{ при } r = 1,\end{cases}$$

введя определение порядкового инвертирования.

Инвертирование вектора γ_n в записи **(2.40)** с помощью двоичного размерности $k+1$ вектора ε называется порядковым инвертированием, что записывается так:

$$\langle \gamma_n^{\varepsilon} \rangle \tag{2.43}$$

и означает: если вектор ε имеет вид

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_0 \, \varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \ldots \, \varepsilon_k \rangle, \quad \varepsilon_i \in Zh, \tag{2.44}$$

то те, и только те из ε_i, которые равны θ, задают инвертирование, при этом они инвертируют лишь компоненту

$$\langle \gamma_{n-i}^{r} \rangle, \quad r = 2^i - 1. \tag{2.45}$$

Для записи вектора **(2.44)** будем использовать цифры алфавитов Zh, Vh, Ah, Sh и полагать, что вектор **(2.44)** требует декатенацию k – го порядка. Например,

$$\langle \gamma_n^{\langle\theta\rangle} \rangle = \langle \bar{\gamma}_n \rangle;$$

$$\begin{array}{lll} \langle \gamma_n^{\langle\tau\rangle} \rangle = \langle \gamma_{n-1}^0 \, \bar{\gamma}_{n-1}^1 \rangle, & & \langle \gamma_n^{\langle\nu\rangle} \rangle = \langle \bar{\gamma}_{n-1}^0 \, \gamma_{n-1}^1 \rangle; \\ \langle \gamma_n^{\langle\downarrow\rangle} \rangle = \langle \gamma_{n-2}^0 \, \gamma_{n-2}^1 \, \bar{\gamma}_{n-2}^2 \, \gamma_{n-2}^3 \rangle, & & \langle \gamma_n^{\langle\oplus\rangle} \rangle = \langle \bar{\gamma}_{n-2}^0 \, \bar{\gamma}_{n-2}^1 \, \bar{\gamma}_{n-2}^2 \, \gamma_{n-2}^3 \rangle, \\ \langle \gamma_n^{\langle/\rangle} \rangle = \langle \gamma_{n-2}^0 \, \gamma_{n-2}^1 \, \gamma_{n-2}^2 \, \bar{\gamma}_{n-2}^3 \rangle, & & \langle \gamma_n^{\langle\omega\rangle} \rangle = \langle \bar{\gamma}_{n-2}^0 \, \bar{\gamma}_{n-2}^1 \, \gamma_{n-2}^2 \, \bar{\gamma}_{n-2}^3 \rangle; \ \ldots \end{array}$$

Замечание 1. Порядковое инвертирование с помощью каждого из векторов: $\langle\theta\rangle, \langle\bar{\tau}\rangle, \langle\bar{\downarrow}\rangle, \langle\bar{1}\rangle, \langle\theta\,\bar{0}\rangle, \langle\bar{\tau}\,\bar{0}\rangle, \ldots$ даёт один и тот же результат. Это значит, что результат порядкового инвертирования с помощью заданного вектора не изменится, если заданный вектор **(2.44)** будет заменён на вектор, в котором справа налево до первой координаты θ будут отброшены все координаты, равные $\bar{\theta}$. Чтобы не переходить каждый раз к записям в Zh, когда вектор записан с использованием алфавитов Vh, Ah, Sh следует в процессе просмотра вектора справа налево отбрасывать цифры $\bar{\nu}, \bar{\omega}, \bar{0}$ и останавливаться на заменах: $\bar{\tau}, \bar{\downarrow}, \bar{1}$ на θ; $\bar{\oplus}, \bar{2}$ на τ; $\bar{/}, 3$ на ν; $\bar{4}$ на $/$; $\bar{5}$ на $\oplus$; $\bar{6}$ на $\downarrow$; $\bar{7}$ на ω.

Например:

$$\langle \bar{\theta}\,\bar{1}\,\bar{0} \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{\theta}\,\theta \rangle = \langle \tau \rangle, \ \langle \theta\,\bar{1}\,\bar{0} \rangle \rightsquigarrow \langle \theta\,\theta \rangle = \langle \nu \rangle,$$

$$\langle \bar{\nu}\,\bar{1}\,\bar{0} \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{\nu}\,\theta \rangle = \langle / \rangle, \ \langle \bar{\theta}\,\bar{2}\,\bar{0} \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{\theta}\,\tau \rangle = \langle / \rangle, \ \langle \bar{5}\,\bar{0} \rangle \rightsquigarrow \langle \oplus \rangle,$$

$$\langle \theta\,\bar{1}\,\bar{7} \rangle \rightsquigarrow \langle \theta\,\bar{1}\omega \rangle = \langle \bar{3}\,1 \rangle, \ \langle \bar{\tau}\,\bar{2}\,\bar{6} \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{\tau}\,\bar{2}\,\downarrow \rangle = \langle \theta\,\bar{4}\,3 \rangle, \ \ldots$$

где здесь и в дальнейшем запись $\langle\varepsilon\rangle \rightsquigarrow \langle\varepsilon'\rangle$ означает, что вектор ε заменяется на эквивалентный ему (в смысле *замечания* **1**) вектор ε' в порядковом преобразовании.

Если вектор ε удовлетворяет условиям: $\langle\varepsilon\rangle \rightsquigarrow \langle\varepsilon'\rangle$, $\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon'\rangle$, то вектор ε называется минимальным порядковым.

Подобно тому, как было определено порядковое инвертирование, определим порядковое сопряжение.

Сопряжение вектора γ_n в записи **(2.40)** с помощью двоичного размерности $k+1$ вектора ε называется порядковым сопряжением, что записывается так:

$$\langle\gamma_n^{\langle *\varepsilon\rangle}\rangle \tag{2.46}$$

и означает: если вектор ε имеет вид **(2.44)**, то те и только те из ε_i, которые равны θ, задают сопряжение, при этом они сопрягают лишь компоненту **(2.45)**.

Обращаем внимание на то, что из вектора **(2.44)** координаты ε_i, равные θ, извлекаются слева направо и при этом выполняется сопряжение компонент **(2.45)** по мере такого извлечения.

Как и в случае порядкового инвертирования, для порядкового сопряжения будем использовать цифры алфавитов Zh, Vh, Ah, Sh и полагать, что вектор **(2.44)** требует декатенацию k – го порядка.

Замечание 2. Поскольку последовательность выполнения сопряжения влияет на результат, то для того, чтобы изменить указанную выше последовательность на обратную, будем использовать запись

$$\langle\gamma_n^{\langle\varepsilon *\rangle}\rangle, \tag{2.47}$$

которая означает, что из вектора **(2.44)** извлекаются справа налево равные θ координаты ε_i с последующим выполнением сопряжения компонент **(2.45)**.

Теперь рассмотрим достаточно подробно порядковое сопряжение на примере вектора **(2.40)**, над которым выполнена декомпозиция первого порядка, то есть $\langle\gamma_n\rangle = \langle\gamma_{n-1}^0\,\gamma_{n-1}^1\rangle$, и осуществлены преобразования сопряжения, для которых введены обозначения, позволяющие передать эти преобразования:

$$\begin{aligned}
\langle\gamma_n^{\langle *\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^0\,\gamma_{n-1}^{1*}\rangle = \langle\alpha_n\rangle, & \langle\alpha_n^{\langle *\nu\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^1\,\gamma_{n-1}^0\rangle = \langle\beta_n\rangle,\\
\langle\beta_n^{\langle *\nu\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0*}\,\gamma_{n-1}^1\rangle = \langle\delta_n\rangle, & \langle\delta_n^{\langle *\nu\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-1}^{0*}\rangle = \langle\varepsilon_n\rangle,\\
\langle\varepsilon_n^{\langle *\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-1}^0\rangle = \langle\eta_n\rangle, & \langle\eta_n^{\langle *\nu\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0*}\,\gamma_{n-1}^{1*}\rangle = \langle\mu_n\rangle,\\
\langle\mu_n^{\langle *\nu\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^1\,\gamma_{n-1}^{0*}\rangle = \langle\lambda_n\rangle, & \langle\lambda_n^{\langle *\nu\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^0\,\gamma_{n-1}^1\rangle = \langle\gamma_n\rangle.
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что:

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha_n^{\langle\nu*\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-1}^{0*}\rangle = \langle\varepsilon_n\rangle, & \langle\varepsilon_n^{\langle\nu*\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0*}\,\gamma_{n-1}^{1}\rangle = \langle\delta_n\rangle,\\
\langle\delta_n^{\langle\nu*\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1}\,\gamma_{n-1}^{0}\rangle = \langle\beta_n\rangle, & \langle\beta_n^{\langle*\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1}\,\gamma_{n-1}^{0*}\rangle = \langle\lambda_n\rangle,\\
\langle\lambda_n^{\langle\nu*\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0*}\,\gamma_{n-1}^{1*}\rangle = \langle\mu_n\rangle, & \langle\mu_n^{\langle\nu*\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-1}^{0}\rangle = \langle\eta_n\rangle,\\
\langle\eta_n^{\langle\nu*\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0}\,\gamma_{n-1}^{1}\rangle = \langle\gamma_n\rangle, & \langle\gamma_n^{\langle*\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0}\,\gamma_{n-1}^{1*}\rangle = \langle\alpha_n\rangle.
\end{aligned}
$$

И, наконец, для полноты картины добавим ещё следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
\langle\delta_n^{\langle*\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0*}\,\gamma_{n-1}^{1*}\rangle = \langle\mu_n\rangle, & \langle\eta_n^{\langle*\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-1}^{0*}\rangle = \langle\varepsilon_n\rangle,\\
\langle\mu_n^{\langle*\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{0*}\,\gamma_{n-1}^{1}\rangle = \langle\delta_n\rangle, & \langle\lambda_n^{\langle*\tau\rangle}\rangle &= \langle\gamma_{n-1}^{1}\,\gamma_{n-1}^{0}\rangle = \langle\beta_n\rangle.
\end{aligned}
$$

Все эти выкладки подтверждают вполне очевидную лемму, верную в более общем случае.

Лемма 1. Если

$$\langle\gamma_n^{\langle*\varepsilon\rangle}\rangle = \langle\alpha_n\rangle, \quad \langle\gamma_n^{\langle\varepsilon*\rangle}\rangle = \langle\beta_n\rangle,$$

то

$$\langle\alpha_n^{\langle\varepsilon*\rangle}\rangle = \langle\beta_n^{\langle*\varepsilon\rangle}\rangle = \langle\gamma_n\rangle,$$

где $\langle\varepsilon\rangle$ определён в **(2.44)**.

Замечание 3. Сказанное в *замечании* **1** о порядковом инвертировании верно и для порядкового сопряжения.

В выражениях **(2.43)**, **(2.46)**, **(2.47)** входят $\langle\varepsilon\rangle$, $\langle*\varepsilon\rangle$, $\langle\varepsilon*\rangle$, которые в дальнейшем будут называться векторами – указателями порядкового инвертирования или сопряжения (иногда кратко: указателями). Эти векторы всегда имеют размерность на *единицу* бо́льшую, чем порядок декомпозиции вектора, для которого они являются указателями (их начало всегда считается в нулевой позиции). Указатели сопряжения отличаются от указателей инвертирования тем, что в указателях сопряжения всегда содержится $*$ (звёздочка), указывающая, с какой стороны читается указатель сопряжения, в то время как в указателе инвертирования такого символа нет: этим он отличается от указателя сопряжения, тем более, что для него последовательность его чтения не имеет никакого значения.

В преобразованиях могут выполняться как инвертирования, так и сопряжения, и тогда вместо нескольких векторов – указателей мы будем записывать один вектор – указатель, отделяя запятой подвектора, которые составляют компоненты вектора – указателя. Например, если

$$\langle \gamma_n^{\langle *\tau \rangle} \rangle = \langle \alpha_n \rangle, \quad \langle \alpha_n^{\langle *\nu \rangle} \rangle = \langle \beta_n \rangle, \quad \langle \beta_n^{\langle *\nu \rangle} \rangle = \langle \delta_n \rangle,$$
$$\langle \delta_n^{\langle *\nu \rangle} \rangle = \langle \varepsilon_n \rangle, \quad \langle \varepsilon_n^{\langle \nu \rangle} \rangle = \langle \rho_n \rangle, \quad \langle \rho_n^{\langle \nu * \rangle} \rangle = \langle \psi_n \rangle, \tag{2.48}$$

то вместо такой цепочки записей **(2.48)** мы можем записать

$$\langle \gamma_n^{\langle *\tau,\, *\nu,\, *\nu,\, *\nu,\, \nu,\, \nu * \rangle} \rangle = \langle \rho_n \rangle, \tag{2.49}$$

что равносильно всей цепочке **(2.48)**, более того, в указателе можно выполнить приведение подобных компонент для следующих подряд компонент (перестановка компонент запрещена, и это следует всегда иметь ввиду).

Значит, выражение **(2.49)** может быть заменено равносильным ему выражением:

$$\langle \gamma_n^{\langle *\tau,\, 3.*\nu,\, \nu,\, \nu * \rangle} \rangle = \langle \rho_n \rangle. \tag{2.50}$$

Замечание 4. Точка является разделителем между коэффициентом и компонентой, которая должна быть прочитана столько раз, сколько указано в коэффициенте (см. **(2.50)**). Коэффициент — это число в десятичной системе счисления.

Замечание 5. Если вектор – указатель не записан, то следует понимать, что он равен $\langle \bar{\theta} \rangle$, то есть

$$\langle \gamma_n^{\langle \bar{\theta} \rangle} \rangle = \langle \gamma_n \rangle. \tag{2.51}$$

Равенство **(2.51)** означает, что некоторые выкладки мы можем выполнять прямо над векторами – указателями. В частности, **лемма 1** в свете сказанного получит такую запись

$$\langle *\varepsilon,\, \varepsilon * \rangle = \langle \bar{\theta} \rangle, \tag{2.52}$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ определён в **(2.44)**. Более того, это значит, что верна *лемма*, являющаяся следствием **леммы 1** или равенства **(2.52)**.

Лемма 2. Если $m > k$, то

$$\langle m.*\varepsilon,\, k.\varepsilon * \rangle = \langle r.*\varepsilon \rangle,$$
$$\langle k.*\varepsilon,\, m.\varepsilon * \rangle = \langle r.\varepsilon * \rangle,$$

где $r = m - k$ и $\langle \varepsilon \rangle$ определён в **(2.44)**.

Соглашение. Если кроме вектора **(2.44)** ещё задан вектор – указатель, который является минимальным порядковым (короче: минимальный указатель):

$$\langle\delta\rangle = \langle\delta_0\,\delta_1\,\delta_2\,\ldots\,\delta_m\rangle, \quad \delta_j \in Zh, \tag{2.53}$$

где $m > k$, и так как нам удобнее всего, чтобы эти векторы имели одинаковую размерность, то следует построить $\langle\varepsilon'\rangle \rightsquigarrow \langle\varepsilon\rangle$, где в векторе ε' координаты от нулевой до k – ой совпадают с координатами ε, а координаты $k+1$, $k+2$, $\ldots$, m суть $\bar{\theta}$.

Теперь принимаем

$$\langle\lambda\rangle \rightleftharpoons \langle\bar{\oplus}\rangle(\langle\varepsilon\rangle,\, \langle\delta\rangle) \rightleftharpoons \langle\bar{\oplus}\rangle(\langle\varepsilon'\rangle,\, \langle\delta\rangle). \tag{2.54}$$

Лемма 3. Если $\langle\varepsilon\rangle$, $\langle\delta\rangle$, $\langle\lambda\rangle$ — векторы – указатели, определённые в соответствии с принятым выше соглашением, то

$$\langle\delta,\, \varepsilon\rangle = \langle\varepsilon,\, \delta\rangle = \langle\lambda\rangle. \tag{2.55}$$

Изучение свойств порядкового инвертирования и сопряжения — это отдельная задача, которая здесь не ставится, и всё же заметим, что в изучении свойств можно воспользоваться перестановками.

В частности, пусть $\langle\gamma_n\rangle = \langle\gamma^0_{n-2}\,\gamma^1_{n-2}\,\gamma^2_{n-2}\,\gamma^3_{n-2}\rangle$. Покажем, что

$$\langle\gamma_n^{\langle 8.*\omega\rangle}\rangle = \langle\gamma_n\rangle. \tag{2.56}$$

С этой целью вначале найдём:

$$\langle\gamma_n^{\langle *\omega\rangle}\rangle = \langle\gamma^{3*}_{n-2}\,\gamma^{2*}_{n-2}\,\gamma^{1*}_{n-2}\,\gamma^{0*}_{n-2}\rangle^{\langle *\bar{\theta}\nu\rangle} = \langle\gamma^{3*}_{n-2}\,\gamma^{2*}_{n-2}\,\gamma^{0}_{n-2}\,\gamma^{1}_{n-2}\rangle^{\langle *\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rangle} =$$
$$= \langle\gamma^{3*}_{n-2}\,\gamma^{2*}_{n-2}\,\gamma^{0}_{n-2}\,\gamma^{1*}_{n-2}\rangle. \tag{2.57}$$

Преобразование $\langle\gamma_n\rangle \to \langle\gamma_n^{\langle *\omega\rangle}\rangle$ может быть записано с помощью неклассической перестановки:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3* & 2* & 0 & 1* \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

которая отличается от классической перестановки тем, что для её элементов верно:

$$\alpha \to \beta* \Longrightarrow \alpha* \to \beta, \tag{2.59}$$

однако по **(2.59)** можно записать отображение

$$\beta* \to \alpha, \quad \beta \to \alpha*, \tag{2.60}$$

верное не для перестановки φ_1, а для обратной перестановки φ_1^{-1}, то есть по **(2.58)** имеем:

$$\varphi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3* & 1* & 0* \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

Произведение неклассических перестановок выполняется аналогично классическим, но при этом следует всегда иметь ввиду **(2.59)**. В частности, в нашем случае, чтобы убедиться в верности **(2.56)**, вычислим:

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3* & 2* & 0 & 1* \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0* & 3* & 2 \end{pmatrix}, \\ \varphi_1^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0* & 3* & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0* & 1* & 2* & 3* \end{pmatrix}, \\ \varphi_1^8 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0* & 1* & 2* & 3* \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Наконец, обратим внимание ещё на одну важную особенность принятых нами обозначений **(2.40)**. Совсем не обязательно всегда осуществлять полную развёртку экспоненциальной длины, которой оканчивается запись **(2.40)**, а достаточно лишь линейной длины развёртка:

$$\langle\gamma_n\rangle = \langle\gamma_{n-1}^0\,\gamma_{n-2}^2\,\gamma_{n-3}^6\,\gamma_{n-4}^{14}\,\ldots\,\gamma_{n-s}^{k-1}\,\gamma_{n-s}^k\rangle, \tag{2.57}$$

где верно **(2.41)**, и по мере необходимости осуществлять развёртку лишь той компоненты, в которой есть необходимость, а затем сворачивать те компоненты, в развёртке которых нет нужды.

Например, найдём:

$$\begin{gathered} \langle\gamma_n^{\langle *0\rangle}\rangle = \langle\gamma_n^{0*}\rangle^{\langle *1\rangle} = \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-1}^{0}\rangle^{\langle *3\rangle} = \\ = \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-2}^{0}\,\gamma_{n-2}^{1*}\rangle^{\langle *7\rangle} = \langle\gamma_{n-1}^{1*}\,\gamma_{n-2}^{0}\,\gamma_{n-3}^{3*}\,\gamma_{n-3}^{2}\rangle. \end{gathered}$$

Глава 3

Позиционные операторы. Основные концепции

Позиционные простой и сложный s – операторы, о которых идёт речь в § **2** *главы* **I**, являются лишь примерами позиционных операторов. Прежде чем развивать и расширять идею позиционности на иным образом вводимых операторах, рассмотрим некоторые свойства s – операторов. Затем остановимся на простых s – операторах на расширенных таблицах определения и лишь потом перейдём к новым понятиям и определениям.

3.1 Свойства s – операторов

Формулируемые ниже свойства s – операторов частично были установлены в **[16]** с использованием несколько иной терминологии, хотя общая идея сохранена. Иная система обозначений, принятая в этом изложении, позволила систематизировать результаты и сделать их более удобными для приложений.

Начнём с того, что вернёмся к результату применения вектора **(1.14)** § **2** *главы* **I** к таблице определения X_n, то есть к вектору **(1.15)** § **2** *главы* **I** размерности 2^n, в развёрнутом виде имеющем запись:

$$\langle \alpha^r \rangle \,=\, \langle \alpha^0\,\alpha^1\,\alpha^1\,\alpha^2\,\alpha^1\,\alpha^2\,\alpha^2\,\alpha^3\,\ldots\,\alpha^{n-2}\,\alpha^{n-1}\,\alpha^{n-1}\,\alpha^n \rangle. \tag{3.1}$$

У вектора **(3.1)** имеется целочисленный параметр r, который является вектором порядка n. Чтобы сформулировать способ его выражения, введём понятие о полной сумме (для знака полной суммы будем использовать $\dot{+}$) двух векторов, которую определим так.

Полной суммой двух векторов (или прямой суммой)

$$\langle\alpha\rangle = \langle\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\rangle, \qquad \langle\beta\rangle = \langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\rangle$$

называется вектор размерности $k \cdot s$:

$$\langle\alpha\rangle \dot{+} \langle\beta\rangle = \langle\gamma\rangle = \langle\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2s}, \ldots, \gamma_{ks}\rangle, \qquad (3.2)$$

где $\gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j$. Как легко понять, в полной сумме нет коммутативности её членов, то есть в общем случае

$$\alpha \dot{+} \beta \neq \beta \dot{+} \alpha.$$

Для полного суммирования будем использовать символ $\dot{\sum}$, то есть полагаем для векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$\dot{\sum_{i=1}^{n}}\alpha_i = \alpha_1 \dot{+} \alpha_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n. \qquad (3.3)$$

Теперь, используя **(3.2)** и **(3.3)**, можем выразить параметр r так: в случаях n, равного **2** или **3**, имеем соответственно

$$\langle r\rangle = \langle 0, 1\rangle \dot{+} \langle 0, 1\rangle = \langle 0, 1, 1, 2\rangle,$$

$$\langle r\rangle = \langle 0, 1\rangle \dot{+} \langle 0, 1\rangle \dot{+} \langle 0, 1\rangle = \langle 0, 1, 1, 2\rangle \dot{+} \langle 0, 1\rangle = \langle 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3\rangle,$$

а в общем случае

$$\langle r\rangle = \dot{\sum_{i=1}^{n}}\langle 0, 1\rangle. \qquad (3.4)$$

Замечание 1. В полном суммировании в правой части **(3.4)** подразумевается, что имеются n одинаковых слагаемых.

Теорема 1. Если

$$\langle A\rangle = \langle a^0\, a^1\, a^2 \ldots a^n\rangle \qquad (3.5)$$

— произвольный позиционный простой s – оператор с таблицей определения X_n, то верны равенства:

$$\langle A\rangle\,(X_n) = \langle A^*\rangle\,(\bar{X}_n) = \langle a^r\rangle, \qquad (3.6)$$

$$\langle A\rangle\,(\bar{X}_n) = \langle A^*\rangle\,(X_n) = \langle a^{r^*}\rangle, \qquad (3.7)$$

$$\langle \bar{A}\rangle\,(X_n) = \langle \bar{A}^*\rangle\,(\bar{X}_n) = \langle \bar{a}^r\rangle, \qquad (3.8)$$

$$\langle \bar{A}\rangle\,(\bar{X}_n) = \langle \bar{A}^*\rangle\,(X_n) = \langle \bar{a}^{r^*}\rangle, \qquad (3.9)$$

где в правых частях **(3.6)** — **(3.9)** суть вектора — столбцы порядка n, в которых $\langle r \rangle$ определено равенством **(3.4)**, а $\langle r^* \rangle$ — вектор, сопряжённый к вектору $\langle r \rangle$, то есть

$$\langle r^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle 1, 0 \rangle. \tag{3.10}$$

Доказательство. Заключение теоремы очевидно: оно является формой записи определений сопряжения простых s – операторов и инвертирования таблиц определения для этих операторов. Действительно, запись $\langle A \rangle (X_n) = \langle a^r \rangle$ в соответствии с определением **(1.15)** § **2** *главы* **I** и развёрткой **(3.1)** означает, что в j – ой строке $(j = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1)$ таблицы X_n имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r,$$

а r – я координата вектора $\langle A \rangle$ равна a^r. Но запись $\langle A^* \rangle (\bar{X}_n)$ означает, что в j – ой строке таблицы $\bar{X}_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = n - r,$$

а так как $(n - r)$ – я координата вектора $\langle A^* \rangle$ совпадает с r – ой координатой вектора $\langle A \rangle$, то **(3.6)** верно. Аналогичными рассуждениями обосновываются и **(3.7)** — **(3.9)**.

Замечание 2. Имея ввиду **(2.6)** § **1** *главы* **II** заключаем, что в каждом из равенств **(3.6)** — **(3.9)** можно осуществить замену X_n на $\bar{X}_n^*$ и $\bar{X}_n$ на X_n^*, а это означает верность равенств:

$$\langle A \rangle (\bar{X}_n^*) = \langle A^* \rangle (X_n^*) = \langle a^r \rangle,$$

$$\langle A \rangle (X_n^*) = \langle A^* \rangle (\bar{X}_n^*) = \langle a^{r^*} \rangle,$$

$$\langle \bar{A} \rangle (\bar{X}_n^*) = \langle \bar{A}^* \rangle (X_n^*) = \langle \bar{a}^r \rangle,$$

$$\langle \bar{A} \rangle (X_n^*) = \langle \bar{A}^* \rangle (\bar{X}_n^*) = \langle \bar{a}^{r^*} \rangle.$$

Теперь обратимся к подтаблицам, получающимся в результате декомпозиции r – го порядка.

Прежде всего заметим, что закон ассоциативности для полного суммирования выполнен, то есть для векторов α, β, γ верно равенство

$$\langle \alpha \dot{+} \beta \rangle \dot{+} \gamma = \alpha \dot{+} \langle \beta \dot{+} \gamma \rangle,$$

позволяющее при условии **(2.3)** § **1** *главы* **II** записать равенство:

$$\langle \eta \rangle = \langle \delta \rangle \dot{+} \langle \rho \rangle, \tag{3.11}$$

где векторы $\langle \eta \rangle$, $\langle \delta \rangle$, $\langle \rho \rangle$ имеют порядки n, s, r соответственно, так как для них принято:

$$\langle \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle 0,\, 1 \rangle, \quad \langle \delta \rangle = \sum_{i=1}^{s} \langle 0,\, 1 \rangle, \quad \langle \rho \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle 0,\, 1 \rangle. \tag{3.12}$$

Вектор $\langle \eta \rangle$ в соответствии с **(3.11)** и **(3.12)** может быть представлен в виде:

$$\langle \eta \rangle = \langle \eta_0\, \eta_1\, \eta_2\, \dots\, \eta_m \rangle, \tag{3.13}$$

где $\langle \eta_0 \rangle$, $\langle \eta_1 \rangle$, ... , $\langle \eta_m \rangle$ — суть вектора одного и того же порядка s, равные соответственно

$$\langle \eta_i \rangle = \langle \delta \rangle + \rho_i = \langle \delta_0 + \rho_i,\ \delta_1 + \rho_i,\ \delta_2 + \rho_i,\ \dots\ , \delta_h + \rho_i \rangle, \tag{3.14}$$

при

$$h = 2^s - 1, \quad m = 2^r - 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \tag{3.15}$$

Для подтаблиц, являющихся результатом декомпозиции r – го порядка, верна теорема, аналогичная *теореме* **1**, с почти дословным повторением доказательства.

Теорема 2. Если выполнены условия *теоремы* **1**, то для подтаблиц $X_{(i)}$ из **(2.2)** § **1** *главы* **II** имеют место равенства

$$\langle A \rangle\, (X_{(i)}) = \langle A^* \rangle\, (\bar{X}_{(i)}) = \langle a^{\eta_i} \rangle, \tag{3.16}$$

$$\langle A \rangle\, (\bar{X}_{(i)}) = \langle A^* \rangle\, (X_{(i)}) = \langle a^{\eta_i^*} \rangle, \tag{3.17}$$

$$\langle \bar{A} \rangle\, (X_{(i)}) = \langle \bar{A}^* \rangle\, (\bar{X}_{(i)}) = \langle \bar{a}^{\eta_i} \rangle, \tag{3.18}$$

$$\langle \bar{A} \rangle\, (\bar{X}_{(i)}) = \langle \bar{A}^* \rangle\, (X_{(i)}) = \langle \bar{a}^{\eta_i^*} \rangle, \tag{3.19}$$

где полагаются выполненными соотношения **(3.11)** — **(3.15)**.

Замечание 3. Имея ввиду **(2.7)** § **1** *главы* **II**, заключаем, что в каждом из равенств **(3.16)** — **(3.19)** можно осуществить замену $X_{(i)}$ на $\bar{X}^*_{(m-i)}$ и $\bar{X}_{(i)}$ на $X^*_{(m-i)}$, а это означает верность равенств:

$$\langle A \rangle\, (\bar{X}^*_{(m-i)}) = \langle A^* \rangle\, (X^*_{(m-i)}) = \langle a^{\eta_i} \rangle, \tag{3.20}$$

$$\langle A \rangle\, (X^*_{(m-i)}) = \langle A^* \rangle\, (\bar{X}^*_{(m-i)}) = \langle a^{\eta_i^*} \rangle, \tag{3.21}$$

$$\langle \bar{A} \rangle\, (\bar{X}^*_{(m-i)}) = \langle \bar{A}^* \rangle\, (X^*_{(m-i)}) = \langle \bar{a}^{\eta_i} \rangle, \tag{3.22}$$

$$\langle \bar{A} \rangle \, (X^*_{(m-i)}) \; = \; \langle \bar{A}^* \rangle \, (\bar{X}^*_{(m-i)}) \; = \; \langle \bar{a}^{\eta_i^*} \rangle. \tag{3.23}$$

Теорема 3. Если

$$\langle A_1 \rangle, \, \langle A_2 \rangle, \; \ldots \; , \, \langle A_k \rangle \tag{3.24}$$

суть n – арные и $\langle A \rangle$ k – арный простые позиционные s – операторы и результат применения оператора $\langle A \rangle$ к векторам **(3.24)** есть n – арный s – оператор $\langle B \rangle$, то

$$\langle A \rangle \, (\langle A_1 \rangle \, (X_n), \; \langle A_2 \rangle \, (X_n), \; \ldots \; , \, \langle A_n \rangle \, (X_n) \,), = \langle B \rangle \, (X_n). \tag{3.25}$$

Доказательство. По условию теоремы

$$\langle A \rangle \, (\langle A_1 \rangle, \, \langle A_2 \rangle, \, \ldots \, , \, \langle A_k \rangle) \; = \; \langle B \rangle \; = \; \langle b^0 \, b^1 \, b^2 \, \ldots \, b^n \rangle,$$

где $\langle A_j \rangle \; = \; \langle a_j^0 \, a_j^1 \, a_j^2 \, \ldots \, a_j^n \rangle$, и для $m \; = \; 0, \, 1, \, 2, \, \ldots \, , \, n$ имеем

$$b^m \; = \; \langle A \rangle \, (a_1^m, \, a_2^m, \, \ldots \, , \, a_k^m).$$

Но

$$\langle A_j \rangle \, (X_n) \; = \; \langle a_j^r \rangle, \quad \langle B \rangle \, (X_n) \; = \; \langle b^r \rangle, \tag{3.26}$$

где

$$j \; = \; 1, \, 2, \, \ldots \, , \, k \quad \text{и} \quad r \; = \; \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

то есть параметр r есть полная сумма **(3.4)**. А это значит, что покоординатно применяя $\langle A \rangle$ над векторами порядка n из первого равенства **(3.26)** получим:

$$\langle A \rangle \, (\langle a_1^r \rangle, \, \langle a_2^r \rangle, \, \ldots \, , \, \langle a_k^r \rangle) \; = \; \langle b^r \rangle.$$

Но этот результат совпадает со вторым равенством из **(3.26)**, что означает верность **(3.25)**.

Иллюстрационный пример к *теореме* **3**.

$$\langle \bar{5} \rangle \, (\langle 6 \rangle \, (X_3), \; \langle \bar{3} \rangle \, (X_3), \; \langle \bar{2} \rangle \, (X_3) \,) \; = \; \langle 7 \rangle \, (X_3),$$

так как

$$\langle \bar{5} \rangle \, (\langle 6 \rangle \, \langle \bar{3} \rangle \, \langle \bar{2} \rangle \,) \; = \; \langle 7 \rangle.$$

Последнее получается так:

$$\langle\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\rangle \left\{\begin{array}{l} \langle\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\rangle \\ \langle\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\rangle \\ \langle\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\rangle \end{array}\right.$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\langle\bar\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\rangle.$$

Замечание 4. На заключение *теоремы* **3**, то есть на равенство **(3.25)** можно смотреть и так: общий аргумент X_n выносится из – под операторов $\langle A_j\rangle$, оператор $\langle A\rangle$ применяется к операторам **(3.24)**, что даёт оператор $\langle B\rangle$, который и применяется к аргументу X_n.

Но по *теореме* **3** операторы **(3.24)** применяются к одному и тому же аргументу X_n. *Теорема* **3** допускает обобщение, позволяющее иметь не только аргументы X_n, но и аргументы $\bar X_n$.

Теорема 4. Если

$$\langle A_1\rangle,\ \langle A_2\rangle,\ \ldots\ ,\ \langle A_k\rangle,\ \langle B_1\rangle,\ \langle B_2\rangle,\ \ldots\ ,\ \langle B_r\rangle \tag{3.27}$$

— суть n – арные и $\langle A\rangle$ $(k+r)$ – арный простые позиционные s – операторы, то

$$\begin{gathered}\langle A\rangle\,(\langle A_1\rangle(X_n),\ \langle A_2\rangle(X_n),\ \ldots\ ,\ \langle A_k\rangle(X_n),\ \langle B_1\rangle(\bar X_n),\ \langle B_2\rangle(\bar X_n),\ \ldots \\ \ldots\ ,\ \langle B_r\rangle(\bar X_n)\,)\ =\ \langle B\rangle(X_n)\ =\ \langle C\rangle(\bar X_n),\end{gathered} \tag{3.28}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\langle B\rangle\ &=\ \langle A\rangle\,(\langle A_1\rangle,\ \langle A_2\rangle,\ \ldots\ ,\ \langle A_k\rangle,\ \langle B_1^*\rangle,\ \langle B_2^*\rangle,\ \ldots\ ,\ \langle B_r^*\rangle\,),\\ \langle C\rangle\ &=\ \langle A\rangle\,(\langle A_1^*\rangle,\ \langle A_2^*\rangle,\ \ldots\ ,\ \langle A_k^*\rangle,\ \langle B_1\rangle,\ \langle B_2\rangle,\ \ldots\ ,\ \langle B_r\rangle\,).\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Доказательство. Верность теоремы является следствием равенств **(3.7)** и **(3.6)** и *теоремы* **3**. Действительно, так как $\langle B_j\rangle\,(\bar X_n)\ =\ \langle B_j^*\rangle\,(X_n)$, то

$$\begin{aligned}&\langle A\rangle\,(\langle A_1\rangle\,(X_n),\ \langle A_2\rangle\,(X_n),\ \ldots\ ,\ \langle A_k\rangle\,(X_n),\ \langle B_1\rangle\,(\bar X_n),\ \langle B_2\rangle\,(\bar X_n),\ \ldots\ ,\ \langle B_r\rangle\,(\bar X_n)\,)\ =\\ &=\ \langle A\rangle\,(\langle A_1\rangle\,(X_n),\ \langle A_2\rangle\,(X_n),\ \ldots\ ,\ \langle A_k\rangle\,(X_n),\ \langle B_1^*\rangle\,(X_n),\ \langle B_2^*\rangle\,(X_n),\ \ldots\ ,\ \langle B_r^*\rangle\,(X_n)\,)\ =\end{aligned}$$

$= \langle B\rangle\,(X_n)$, а поскольку $\langle A_j\rangle\,(X_n)\ =\ \langle A_j^*\rangle\,(\bar X_n)$, то

$$\begin{aligned}&\langle A\rangle\,(\langle A_1\rangle\,(X_n),\ \langle A_2\rangle\,(X_n),\ \ldots\ ,\ \langle A_k\rangle\,(X_n),\ \langle B_1\rangle\,(\bar X_n),\ \langle B_2\rangle\,(\bar X_n),\ \ldots\ ,\ \langle B_r\rangle\,(\bar X_n)\,)\ =\\ &=\ \langle A\rangle\,(\langle A_1^*\rangle\,(\bar X_n),\ \langle A_2^*\rangle\,(\bar X_n),\ \ldots\ ,\ \langle A_k^*\rangle\,(\bar X_n),\ \langle B_1\rangle\,(\bar X_n),\ \langle B_2\rangle\,(\bar X_n),\ \ldots\ ,\ \langle B_r\rangle\,(\bar X_n)\,)\ =\\ &=\ \langle C\rangle\,(\bar X_n).\end{aligned}$$

Замечание 5. Так как по **(3.6)** имеем $\langle B\rangle\,(X_n) \;=\; \langle B^*\rangle\,(\bar{X}_n)$, то из последнего равенства **(3.28)** следует, что в **(3.29)** имеем: $\langle C\rangle \;=\; \langle B^*\rangle$.

Пример к *теореме* **4**.

$\langle\bar{5}\rangle\,(\,\langle 6\rangle\,(X_3),\;\langle\bar{3}\rangle\,(X_3),\;\langle\bar{2}\rangle\,(\bar{X}_3)\,) \;=\; \langle\bar{5}\rangle\,(\,\langle 6\rangle\,(X_3),\;\langle\bar{3}\rangle\,(X_3),\;\langle\bar{4}\rangle\,(X_3)\,) \;=$
$=\;\langle 1\rangle\,(X_3)$, так как $\langle\bar{5}\rangle\,(\,\langle 6\rangle,\,\langle\bar{3}\rangle,\langle\bar{4}\rangle\,) \;=\; \langle 1\rangle$.

Другие свойства s – операторов будут установлены в других главах.

3.2 Простые s–операторы на расширенных таблицах определения

В рассмотренных выше таблицах определения X_n каждый из аргументов x_j, где $j \;=\; 1, 2, \ldots, n$, входит ровно один раз. Теперь мы отступаем от этого требования, введя следующие определения.

Будем предполагать, что если говорится о применении простого s – оператора $\langle\alpha\rangle$ к таблице определения Z, то, как и раньше, по умолчанию полагаем, что размерность вектора $\langle\alpha\rangle$ на единицу больше числа столбцов в таблице определения Z.

Таблица определения $\dot{X}$ называется расширением таблицы определения X, если для любого простого позиционного s – оператора $\langle A\rangle$, применимого к X, найдётся такой простой s – оператор $\langle B\rangle$, применимый к $\dot{X}$, что

$$\langle A\rangle\,(X) \;=\; \langle B\rangle\,(\dot{X}), \tag{3.30}$$

но обратное не верно, то есть не для всякого простого s – оператора $\langle B\rangle$ можно подобрать оператор $\langle A\rangle$, чтобы выполнялось **(3.30)**. В том случае, когда набор $\dot{X}$ есть расширение набора X, то X называется сужением $\dot{X}$.

Конкатенацией областей определения $X \;=\; (\,x_1, x_2, \ldots, x_k\,)$ и $Y \;=\; (\,y_1, y_2, \ldots, y_r\,)$ называется область определения $X\,.\,Y$, получающаяся в результате приписывания элементов таблицы Y к элементам таблицы X, то есть

$$X\,.\,Y \;=\; (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_r). \tag{3.31}$$

Следует иметь ввиду, что поскольку мы будем применять к таблицам определения простые s – операторы, то последовательность (порядок следования) элементов в таблицах не будет играть никакой роли.

Для дальнейшего примем ещё один способ записи для простого s – оператора, а именно, полагаем, что

$$\langle k;\, j_0,\, j_1,\, j_2,\, \ldots\,,\, j_r\rangle, \text{ где } 0 \le j_0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le k,$$

означает: простой s – оператор является k – арным и имеет символ $\bar{\theta}$ только в позициях $j_0,\, j_1,\, j_2,\, \ldots\,,\, j_r$.

Теорема 5. Пусть $X_k = (x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_k)$, $k > 1$, $1 \le i \le k$, $X'_k = X_k \setminus x_i$. Тогда $X_k\,.\,X'_k$ является расширением X_k и

$$\langle k;\, j\rangle\,(X_k) = \langle 2k - 1;\; 2j - 1;\; 2j\,\rangle\,(X_k\,.\,X'_k). \tag{3.32}$$

Доказательство. Верность теоремы означает верность **(3.32)**, а оно действительно верно, поскольку его левая часть означает:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + \ldots + x_k = j. \tag{3.33}$$

Из равенства **(3.33)** следует, что если $x_i = \theta$, то

$$2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{i-1} + x_i + 2x_{i+1} + \ldots + 2x_k = 2j,$$

а если $x_i = \bar{\theta}$, то

$$2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{i-1} + x_i + 2x_{i+1} + \ldots + 2x_k = 2j + 1.$$

Но последние два равенства означают то, что записано в правой части равенства **(3.32)**.

Замечание 6. Вначале обратим внимание на то, что каждая из таблиц $(x_1,\, x_1,\, x_2)$ и $(x_1,\, x_2,\, x_2)$ является расширением таблицы $(x_1,\, x_2)$, а каждая из таблиц $(x_1,\, x_1,\, x_2,\, x_2,\, x_3)$, $(x_1,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_3)$, и $(x_1,\, x_2,\, x_2,\, x_3,\, x_3)$ — расширением таблицы $(x_1,\, x_2,\, x_3)$. А затем обратим внимание на то, что в равенстве **(3.32)** содержатся как частные случаи равенства:

$$\left.\begin{aligned} \langle k;\, 0\rangle\,(X_k) &= \langle 2k - 1;\; 0\rangle\,(X_k\,.\,X'_k),\\ \langle k;\, k\rangle\,(X_k) &= \langle 2k - 1;\; 2k - 1\rangle\,(X_k\,.\,X'_k), \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

поскольку для $j = 0$ и $j = k$ лишь одно из чисел $2j - 1$ и $2j$ лежит между 0 и $2k - 1$, то есть удовлетворяет требованию, накладываемому на оператор справа в равенстве **(3.32)**.

Разумеется, на $X_k\,.\,X'_k$ из *теоремы* **5** можно смотреть как на расширение для таблицы X'. И это действительно так, но сформулируем и докажем это в следующей ниже форме.

Теорема 6. Пусть $X_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $i > k$, $X_k^+ = X_k \cup x_i$. Тогда таблица $X_k \,.\, X_k^+$ является расширением таблицы X_k и

$$\langle k;\, j\rangle\,(X_k) = \langle 2k+1;\; 2j,\; 2j+1\rangle\,(X_k \,.\, X_k^+). \tag{3.35}$$

Доказательство. Верность теоремы означает верность **(3.35)**, а оно действительно верно, так как левая его часть означает:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = j. \tag{3.36}$$

Из **(3.36)** следует, что для $x_i = \theta$:

$$2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_k + x_i = 2j,$$

а для $x_i = \bar{\theta}$:

$$2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_k + x_i = 2j + 1.$$

Последние два равенства означают то, что записано в правой части равенства **(3.35)**.

Обратим внимание на то, что в соответствии с *теоремой* **6** таблица $(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3)$ является расширением таблицы (x_1, x_2), а таблица $(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4)$ является расширением таблицы (x_1, x_2, x_3).

Можно сформулировать утверждение, в котором к имеющимся координатам исходной таблицы добавляются две новые координаты (в отличие от *теоремы* **6**, где добавляется одна координата), и таким образом не только частично обобщить *теоремы* **5** и **6**, но и дополнить их.

Теорема 7. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} X_k = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad k < i < s, \quad X_k^+ = X_k \cup \{x_i, x_s\}, \\ X_k^1 = X_k \,.\, X_k^+, \quad X_k^2 = X_k \,.\, X_k^1. \end{array}\right\} \tag{3.37}$$

Тогда X_k^2 является расширением каждой из таблиц X_k, X_k^+ и X_k^1, точнее верны следующие ниже равенства:

$$\langle k;\, j\rangle\,(X_k) = \langle 3k+2;\; 3j,\; 3j+1,\; 3j+2\rangle\,(X_k^2), \tag{3.38}$$

$$\langle k+2;\, j\rangle\,(X_k^+) = \langle 3k+2;\; 3j-4,\; 3j-2,\; 3j\rangle\,(X_k^2), \tag{3.39}$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle 2k+2;\, 2j\rangle\,(X_k^1) = \langle 3k+2;\; 3j-1,\; 3j\rangle\,(X_k^2), \\ \langle 2k+2;\, 2j+1\rangle\,(X_k^1) = \langle 3k+2;\; 3j+1\rangle\,(X_k^2). \end{array}\right\} \tag{3.40}$$

Доказательство. Равенство **(3.38)** действительно верно, так как левая его часть означает верность равенства **(3.36)**, из которого следует, что когда $x_i + x_s = r$, то

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_k + x_i + x_s = 3j + r.$$

А поскольку r может равняться только **0**, **1** и **2**, то последнее означает то, что и записано в правой части равенства **(3.38)**.

Верность равенства **(3.39)** обосновывается так. Левая часть этого равенства означает, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_i + x_s = j. \tag{3.41}$$

Из равенства **(3.41)** следует, что когда $x_i + x_s = r$, то

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_k + x_i + x_s = 3j - 2r,$$

а поскольку r может равняться только **0**, **1** и **2**, то последнее равенство означает то, что записано в правой части **(3.39)**.

И, наконец, равенства **(3.40)** означают (для первого и второго соответственно):

$$2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_k + x_i + x_s = 2j,$$
$$2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_k + x_i + x_s = 2j + 1.$$

Заметим, что $x_i + x_s$ может равняться **0** или **2** в *первом* и **1** во *втором*. Поэтому из последних двух равенств следуют соответственно:

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_k + x_i + x_s = 3j \quad (\text{или } 3j - 1),$$
$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_k + x_i + x_s = 3j + 1.$$

А последние два равенства дают соответственно то, что указано в правых частях **(3.40)**. *Теорема* доказана.

Ещё раз обратим внимание на то, что в принятом определении для записи s – оператора требуется, чтобы нижние индексы были неотрицательны и не превосходили по величине верхний индекс s – оператора. А это значит, что как и в *теореме* **5** следует: в равенстве **(3.39)** и в *первом* из равенств **(3.40)** имеют место частные случаи:

$$\langle k + 2;\ 0\rangle\,(X_k^+) = \langle 3k + 2;\ 0\rangle\,(X_k^2),$$
$$\langle k + 2;\ 1\rangle\,(X_k^+) = \langle 3k + 2;\ 1, 3\rangle\,(X_k^2),$$
$$\langle k + 2;\ k + 1\rangle\,(X_k^+) = \langle 3k + 2;\ 3k - 1;\ 3k + 1\rangle\,(X_k^2),$$
$$\langle k + 2;\ k + 2\rangle\,(X_k^+) = \langle 3k + 2;\ 3k + 2\rangle\,(X_k^2),$$
$$\langle 2k + 2;\ 0\rangle\,(X_k^1) = \langle 3k + 2;\ 0\rangle\,(X_k^2),$$
$$\langle 2k + 2;\ 2k + 2\rangle\,(X_k^1) = \langle 3k + 2;\ 3k + 2\rangle\,(X_k^2).$$

Другим обобщением *теорем* **5** и **6** может служить следующая

Теорема 8. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} X_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \;\; k > 1, \;\; 1 \le i \le k < s, \;\; X'_k = X_k \setminus x_i, \\ X_k^+ = X_k \cup x_s, \quad X_k^1 = X_k^1 \,.\, X_k^+, \quad X_k^2 = X_k \,.\, X_k^1. \end{array}\right\} \quad (3.42)$$

Тогда таблица X_k^2 является расширением каждого из наборов X_k и X_k^1 и

$$\langle k;\, j\rangle\,(X_k) = \langle 3k;\;\; 3j - 1,\;\; 3j,\;\; 3j + 1\rangle\,(X_k^2), \qquad (3.43)$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle 2k;\, 2j\rangle\,(X_k^1) = \langle 3k;\;\; 3j\rangle\,(X_k^2), \\ \langle 2k;\, 2j + 1\rangle\,(X_k^1) = \langle 3k;\;\; 3j + 1;\;\; 3j + 2\rangle\,(X_k^2). \end{array}\right\} \qquad (3.44)$$

Доказательство. Левая часть равенства **(3.43)** означает верность равенства **(3.39)**, из которого следует, что если $x_i = \theta$, то

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_{i-1} + 3x_{i+1} + \ldots + 3x_k + 2x_i + x_s = 3j \text{ (или } 3j + 1),$$

а если $x_i = \bar{\theta}$, то

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_{i-1} + 3x_{i+1} + 3x_{i+1} + \ldots + 3x_k + 2x_i + x_s = 3j - 1 \text{ (или } 3j).$$

Полученные равенства — это другая форма записи правой части равенства **(3.43)**. Левые части равенств **(3.44)** означают (для *первого* и *второго* соответственно):

$$2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{i-1} + 2x_{i+1} + \ldots + 2x_k + x_i + x_s = 2j,$$

$$2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{i-1} + 2x_{i+1} + \ldots + 2x_k + x_i + x_s = 2j + 1.$$

Из *первого* следует: $x_i + x_s = 0$ или **2**, что даёт:

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_{i-1} + 3x_{i+1} + \ldots + 3x_k + 2x_i + x_s = 3j,$$

а из *второго* имеем: $x_i + x_s = 1$, что означает

$$3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_{i-1} + 3x_{i+1} + \ldots + 3x_k + 2x_i + x_s = 3j + 1 \text{ (или } 3j + 2).$$

Поскольку это совпадает с правой частью **(3.44)**, то *теорема* доказана.

Теорема 9. Пусть $X_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k < i < s$, $X_k^1 = X_k \cup x_i$, $X_k^2 = X_k \cup x_s$, Тогда набор

$$Z = X_k \,.\, X_k^1 \,.\, X_k^1 \,.\, X_k^2$$

является расширением каждого из наборов

$$X_k,\ X_k^1,\ X_k^2,\ \ Y_k^1 = X_k \,.\, X_k^1,\ \ Y_k^2 = X_k \,.\, X_k^2,\ \ Y_k^3 = X_k^1 \,.\, X_k^2,$$
$$Y_k^4 = X_k \,.\, X_k^1 \,.\, X_k^1,\ \ Y_k^5 = X_k \,.\, X_k^1 \,.\, X_k^2,\ \ Y_k^6 = X_k^1 \,.\, X_k^1 \,.\, X_k^2,$$

точнее

$$\langle k;\, j\rangle\,(X_k) = \langle 4k+3;\ 4j,\ 4j+1,\ 4j+2,\ 4j+3\rangle\,(Z), \tag{3.45}$$
$$\langle k+1;\, j\rangle\,(X_k^1) = \langle 4k+3;\ 4j-2,\ 4j-1,\ 4j,\ 4j+1\rangle\,(Z), \tag{3.46}$$
$$\langle k+1;\, j\rangle\,(X_k^2) = \langle 4k+3;\ 4j-3,\ 4j-1,\ 4j,\ 4j+2\rangle\,(Z), \tag{3.47}$$

$$\langle 2k+1;\, j\rangle\,(Y_k^1) = \langle 4k+3;\ 2j,\ 2j+1\rangle\,(Z),$$

$$\left.\begin{aligned}\langle 2k+1;\, 2j\rangle\,(Y_k^2) &= \langle 4k+3;\ 4j,\ 4j+2\rangle\,(Z),\\ \langle 2k+1;\, 2j+1\rangle\,(Y_k^2) &= \langle 4k+3;\ 4j+1,\ 4j+3\rangle\,(Z),\end{aligned}\right\}$$

$$\langle 2k+2;\, j\rangle\,(Y_k^3) = \langle 4k+3;\ 2j-1,\ 2j\rangle\,(Z),$$

$$\left.\begin{aligned}\langle 3k+2;\, 3j\rangle\,(Y_k^4) &= \langle 4k+3;\ 4j,\ 4j+1\rangle\,(Z),\\ \langle 3k+2;\, 3j+2\rangle\,(Y_k^4) &= \langle 4k+3;\ 4j+2,\ 4j+3\rangle\,(Z),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle 3k+2;\, 3j\rangle\,(Y_k^5) &= \langle 4k+3;\ 4j\rangle\,(Z),\\ \langle 3k+2;\, 3j+1\rangle\,(Y_k^5) &= \langle 4k+3;\ 4j+1,\ 4j+2\rangle\,(Z),\\ \langle 3k+2;\, 3j+2\rangle\,(Y_k^5) &= \langle 4k+3;\ 4j+3\rangle\,(Z),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle 3k+3;\, 3j\rangle\,(Y_k^6) &= \langle 4k+3;\ 4j-1, 4j\rangle\,(Z),\\ \langle 3k+3;\, 3j+1\rangle\,(Y_k^6) &= \langle 4k+3;\ 4j+1\rangle\,(Z),\\ \langle 3k+3;\, 3j+2\rangle\,(Y_k^6) &= \langle 4k+3;\ 4j+2\rangle\,(Z).\end{aligned}\right\}$$

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично предыдущим, то есть рассмотрением всех возможных случаев. Справедливость равенства **(3.45)** следует из того, что левая часть его означает верность равенства **(3.36)**, из которого следует, что если $2x_i + x_s = r$, то

$$4x_1 + 4x_2 + \ldots + 4x_k + 2x_i + x_s = 4j + r.$$

Но поскольку r может равняться лишь одному из чисел **0**, **1**, **2**, **3**, то последнее равенство означает то же, что и в правой части **(3.45)**.

Левая часть равенства **(3.46)** означает то, что и равенство:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_i = j,$$

из которого следует, что если $x_i = \theta$, то

$$4x_1 + 4x_2 + \ldots + 4x_k + 2x_i + x_s = 4j \quad (\text{или } 4j + 1),$$

а если $x_i = \bar{\theta}$, то

$$4x_1 + 4x_2 + \ldots + 4x_k + 2x_i + x_s = 4j - 2 \quad (\text{или } 4j - 1).$$

Значит, равенство **(3.46)** верно.

Левая часть равенства **(3.47)** означает, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_s = j,$$

из которого следуют для $x_s = \theta$ и $x_s = \bar{\theta}$ соответственно:

$$4x_1 + 4x_2 + \ldots + 4x_k + 2x_i + x_s = 4j \quad (\text{или } 4j + 2),$$

$$4x_1 + 4x_2 + \ldots + 4x_k + 2x_i + x_s = 4j - 3 \quad (\text{или } 4j - 1).$$

Последние два равенства означают то, что записано в правой части равенства **(3.47)**.

Далее, чтобы не повторять многократно одни и те же рассуждения, приведём их в более сжатой форме.

Левые части остальных равенств заключения *теоремы* означают соответственно то, что и следующие равенства, в которых принято $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = u$:

$$\begin{array}{ll}
2u + x_i = j; & 2j \ (\text{или } \ 2j + 1), \\
2u + x_s = 2j; & 4j \ (\text{или } \ 4j + 2), \\
2u + x_s = 2j + 1; & 4j + 1 \ (\text{или } \ 4j + 3), \\
2u + x_i + x_s = j; & 2j - 1 \ (\text{или } \ 2j), \\
3u + 2x_i = 3j; & 4j \ (\text{или } \ 4j + 1), \\
3u + 2x_i = 3j + 2; & 4j + 2 \ (\text{или } \ 4j + 3), \\
3u + x_i + x_s = 3j; & 4j, \\
3u + x_i + x_s = 3j + 1; & 4j + 1 \ (\text{или } \ 4j + 2), \\
3u + x_i + x_s = 3j + 2; & 4j + 3, \\
3u + 2x_i + x_s = 3j; & 4j \ (\text{или } \ 4j - 1), \\
3u + 2x_i + x_s = 3j + 1; & 4j + 1, \\
3u + 2x_i + x_s = 3j + 2; & 4j + 2.
\end{array}$$

Выше в строке для каждого равенства, после точки с запятой указываются значения для выражения

$$4u + 2x_i + x_s.$$

Это выражение с указанными для него значениями означает то же, что и соответствующие правые части равенств, рассмотренных нами.

Теоремами **5 — 9** не исчерпывается весь список теорем об операторах на расширенных таблицах определения, но характер теорем и способ их доказательства показаны в полной мере.

Завершим же этот параграф теоремой об s – операторе на максимально расширенных таблицах определения. Согласно **[18]** для двоичного набора X_n совершенным называется набор

$$X_n^s = (x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, \dots, x_n), \tag{3.48}$$

в котором при $i = 1, 2, \dots, n$ аргумент x_i содержится 2^{i-1} раз, так что набор X_n^s имеет длину $N = 2^n - 1$. Следовательно, простой позиционный оператор, согласованный с совершенным набором X_n^s, должен содержать $N + 1$ символов из алфавита Zh. Разумеется, что можно использовать и алфавиты Vh, Ah, Sh. Применение согласованного оператора $\langle a \rangle$ к совершенному набору X_n^s записывается так:

$$\langle a \rangle (X_n^s) \tag{3.49}$$

и даёт результат в соответствии с общим определением действия позиционного s – оператора на набор.

Теорема 10. Для произвольной функции алгебры логики (см. **(1.2)** из § **1** *главы* **I**) существует, и притом единственный, простой позиционный оператор, содержащий $N + 1$ символов, значение которого на совершенном наборе **(3.48)** совпадает со значением функции.

Доказательство. Если набор X_n, являющийся аргументом произвольной функции алгебры логики f, будет принимать значения, на которые можно смотреть как на номера набора X_n, то соответствующий совершенный набор X_n^s будет содержать число *единиц*, равное номеру набора X_n. А это значит, что если j – му значению набора X_n функция f сопоставляет значение **1**, то только в j – ой позиции простого позиционного оператора, применяемого к набору X_n^s, должен быть указан символ $\bar{\theta}$.

3.3 Позиционные фундаментальные симметрические операторы

В § **2** *главы* **I** были определены сложные s – операторы, но о их свойствах ничего не было сказано, а в предыдущем параграфе были рассмотрены простые s – операторы на расширенных таблицах определения, но это расширение имело вводный характер, кроме *теоремы* **10** и понятий, связанных с ней. Теперь мы соединим и продолжим эти два начинания введением понятия о позиционном фундаментальном симметрическом операторе (кратко: FS – операторе).

FS – оператор — это простой s – оператор, который всегда применяется к совершенным наборам – аргументам (см. конец предыдущего параграфа). В записи применения FS – оператора **(3.49)** индекс n указывает на число переменных, а само X^s_n является таблицей определения FS – оператора.

Поскольку символы FS – оператора и результаты применения FS – оператора к области определения совпадают, то необходимость в записи области определения (тем более, что она стандартна) не всегда есть. А это означает, что почти всегда мы её будем опускать.

Полнота системы FS – операторов очевидна, но экспоненциальный характер их записи побуждает нас использовать для этих целей другие приёмы.

Для записи функций алгебры логики FS – операторами будем использовать систему бинарных продукций (образующих правил) из множества:

$$Q = \{ T, \bar{T}, T^{*}, \bar{T}^{*}, M, \bar{M}, M^{*}, \bar{M}^{*} \},$$

состоящего их двух инвертированно – сопряжённых четвёрок продукций (в множестве Q — это *первые* и *вторые* четыре продукции соответственно). Действие каждой из продукций множества Q на заданный вектор α_j превращает его в конкатенацию двух векторов, так что размерность исходного вектора удваивается:

$$\left.\begin{array}{llll} \langle \alpha_j T \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j \bar{\theta}_j \rangle, & & \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j \theta_j \rangle, \\ \langle \alpha_j T^{*} \rangle \rightleftharpoons \langle \bar{\theta}_j \alpha_j \rangle, & & \langle \alpha_j \bar{T}^{*} \rangle \rightleftharpoons \langle \theta_j \alpha_j \rangle. \end{array}\right\} \tag{3.50}$$

$$\langle \alpha_j M \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j \alpha_j \rangle, \qquad \langle \alpha_j \bar{M} \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j \bar{\alpha}_j \rangle. \tag{3.51}$$

$$\langle \alpha_j M^{*} \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j \alpha^{*}_j \rangle, \qquad \langle \alpha_j \bar{M}^{*} \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha_j \bar{\alpha}^{*}_j \rangle. \tag{3.52}$$

В *определениях* **(3.50)** — **(3.52)** предполагается, что вектор α_j является вектором с двоичными координатами порядка j, то есть размерности 2^j, а все 2^j координаты векторов θ_j и $\bar{\theta}_j$ суть соответственно *нулевые* и *единичные*. Что касается векторов $\bar{\alpha}_j, \alpha_j^*, \bar{\alpha}_j^*$, то это векторы — *инвертированный*, *сопряжённый* и *двойственный* к вектору α_j.

Ниже, как правило, в качестве начальных векторов, к которым применяются продукции из множества Q, будут использоваться векторы

$$\langle\, \tau_j \,\rangle = \langle\, \bar{\theta}_j\, \theta_j \,\rangle,\ \langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle = \langle\, \theta_j\, \bar{\theta}_j \,\rangle,\ \langle\, \nu_j \,\rangle = \langle\, \theta_j\, \theta_j \,\rangle,\ \langle\, \bar{\nu}_j \,\rangle = \langle\, \bar{\theta}_j\, \bar{\theta}_j \,\rangle, \tag{3.53}$$

но чаще будут использоваться *первые* два вектора.

Теперь обратим внимание, что поскольку каждое из выражений

$$\left.\begin{array}{lclclcl} \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{T} \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \theta_j \,\rangle, & & \langle\, \bar{\alpha}_j\, T \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{\theta}_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{T}^* \,\rangle & = & \langle\, \theta_j\, \bar{\alpha}_j \,\rangle, & & \langle\, \bar{\alpha}_j\, T^* \,\rangle & = & \langle\, \bar{\theta}_j\, \bar{\alpha}_j \,\rangle, \end{array}\right\} \tag{3.54}$$

$$\left.\begin{array}{lclclcl} \langle\, \alpha_j^*\, T^* \,\rangle & = & \langle\, \bar{\theta}_j\, \alpha_j^* \,\rangle, & & \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle & = & \langle\, \theta_j\, \alpha_j^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j^*\, T \,\rangle & = & \langle\, \alpha_j^*\, \bar{\theta}_j \,\rangle, & & \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T} \,\rangle & = & \langle\, \alpha_j^*\, \theta_j \,\rangle, \end{array}\right\} \tag{3.55}$$

$$\left.\begin{array}{lclclcl} \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle & = & \langle\, \theta_j\, \bar{\alpha}_j^* \,\rangle, & & \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T^* \,\rangle & = & \langle\, \bar{\theta}_j\, \bar{\alpha}_j^* \,\rangle, \\ \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{T} \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \theta_j \,\rangle, & & \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{\theta}_j \,\rangle \end{array}\right\} \tag{3.56}$$

является соответственно **инвертированным**, **сопряжённым** и **двойственным** к каждому из выражений **(3.50)**, то тем самым доказана следующая

Теорема 11. Если B — одна из продукций *первой* четвёрки множества Q, то инвертированный, сопряжённый и двойственный вектор к заданному вектору $\langle\, \alpha_j\, B \,\rangle$ суть соответственно векторы $\langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{B} \,\rangle$, $\langle\, \alpha_j^*\, B^* \,\rangle$, $\langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{B}^* \,\rangle$, при этом двойные операции инвертирования, сопряжения и двойственности ведут к снятию этой операции.

А так как верны равенства:

$$\begin{array}{lclclcl} \langle\, \bar{\alpha}_j\, M \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{\alpha}_j \,\rangle, & & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{M} \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \alpha_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar{\alpha}_j\, M^* \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{\alpha}_j^* \,\rangle, & & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{M}^* \,\rangle & = & \langle\, \bar{\alpha}_j\, \alpha_j^* \,\rangle, \end{array}$$

то это значит, что сравнивая их с **(3.51)** и **(3.52)**, тем самым доказана

Теорема 12. Если B — одна из продукций *второй* четвёрки множества Q, то из условия $y = \langle\, \alpha_j\, B \,\rangle$ следует, что $\bar{y} = \langle\, \bar{\alpha}_j\, B \,\rangle$.

Легко убедиться, что верна следующая

Теорема 13. Если примем, что

$$y_1 = \langle \alpha_j M \rangle, \quad y_2 = \langle \alpha_j \bar{M} \rangle, \quad y_3 = \langle \alpha_j M^* \rangle, \quad y_4 = \langle \alpha_j \bar{M}^* \rangle,$$

то

$$y_1^* = \langle \alpha_j^* M \rangle, \quad y_2^* = \langle \bar{\alpha}_j^* \bar{M} \rangle, \quad y_3^* = \langle \alpha_j M^* \rangle, \quad y_4^* = \langle \bar{\alpha}_j \bar{M}^* \rangle.$$

Следствие 1. Из *теорем* **12** и **13** следует, что

$$\bar{y}_1^* = \langle \bar{\alpha}_j^* M \rangle, \quad \bar{y}_2^* = \langle \alpha_j^* \bar{M} \rangle, \quad \bar{y}_3^* = \langle \bar{\alpha}_j M^* \rangle, \quad \bar{y}_4^* = \langle \alpha_j \bar{M}^* \rangle.$$

В дальнейшем полезно иметь ввиду ещё и следующую очевидную лемму.

Лемма 1. Если $z_1 = \langle \tau_j \rangle, \quad z_2 = \langle \bar{\tau}_j \rangle,$ то

$$\bar{z}_1 = \langle \bar{\tau}_j \rangle, \; z_1^* = \langle \bar{\tau}_j \rangle, \; \bar{z}_1^* = \langle \tau_j \rangle,$$
$$\bar{z}_2 = \langle \tau_j \rangle, \; z_2^* = \langle \tau_j \rangle, \; \bar{z}_2^* = \langle \bar{\tau}_j \rangle.$$

Для FS – операторов различных функций алгебры логики важным является понятие **области определения** (таблицы определения) рассматриваемой функции. Будем говорить, что область (таблица) определения функции есть X_j, если целочисленные неотрицательные индексы каждого из литералов (*литерал* — это общее имя для переменной x_i и её отрицание $\bar{x}_i$) не больше j. Если функция алгебры логики $f(X_j)$ имеет FS – оператор $\langle \alpha_j \rangle$, то этот факт будем записывать так:

$$f(X_j) \simeq \langle \alpha_j \rangle. \tag{3.57}$$

Если принять, что в **(3.53)** минимальным индексом является *нулевой*, и

$$\langle \tau \rangle \rightleftharpoons \langle \tau_0 \rangle = \langle \bar{\theta}\,\theta \rangle, \qquad \langle \bar{\tau} \rangle \rightleftharpoons \langle \bar{\tau}_0 \rangle = \langle \theta\,\bar{\theta} \rangle,$$

то очевидной является следующая

Лемма 2. Для селекторных функций (проекций) верны соотношения:

$$x_{j+1} \simeq \langle \bar{\tau}_j \rangle, \qquad \bar{x}_{j+1} \simeq \langle \tau_j \rangle.$$

Для записи функций с использованием классических бинарных операций из множества

$$\{\downarrow, \oplus, /, \bar{/}, \bar{\oplus}, \bar{\downarrow}\}, \tag{3.58}$$

где $\bar{/} \rightleftharpoons \&$ (**конъюнкция**), $\bar{\downarrow} \rightleftharpoons \vee$ (**дизъюнкция**), $\bar{\oplus} \rightleftharpoons \sim$ (**эквивалентность**), будем применять следующую *теорему.*

Теорема 14. Если функция алгебры логики $f\,(\,X_j\,)$ имеет FS – оператор $\langle\,\alpha_j\,\rangle$, то тогда следующие ниже функции с областью определения X_{j+1} имеют FS – операторы:

$$f\,(\,X_{j+1}\,) \,=\, f\,(\,X_j\,) \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,M\,\rangle, \tag{3.59}$$

$$f\,(\,X_j\,) \downarrow x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{T}\,\rangle, \qquad f\,(\,X_j\,) \downarrow \bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{T}^*\,\rangle, \tag{3.60}$$

$$f\,(\,X_j\,) \oplus x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,\bar{M}\,\rangle, \qquad f\,(\,X_j\,) \oplus \bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{M}\,\rangle, \tag{3.61}$$

$$f\,(\,X_j\,)\,/\,x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\bar{\alpha}_j\,T^*\,\rangle, \qquad f\,(\,X_j\,)\,/\,\bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\bar{\alpha}_j\,T\,\rangle, \tag{3.62}$$

$$f\,(\,X_j\,)\,\bar{/}\,x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*\,\rangle, \qquad f\,(\,X_j\,)\,\bar{/}\,\bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle, \tag{3.63}$$

$$f\,(\,X_j\,)\,\bar{\oplus}\,x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{M}\,\rangle, \qquad f\,(\,X_j\,)\,\bar{\oplus}\,\bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,\bar{M}\,\rangle, \tag{3.64}$$

$$f\,(\,X_j\,)\,\bar{\downarrow}\,x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,T\,\rangle, \qquad f\,(\,X_j\,)\,\bar{\downarrow}\,\bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,T^*\,\rangle. \tag{3.65}$$

Доказательство. Верность **(3.59)** следует из того, что поскольку область определения увеличилась вдвое, то битовую длину вектора – оператора следует циклически повторить, что и записано в правой части **(3.59)**.

Остальные соотношения **(3.60)** — **(3.65)** получаются в результате выполнения прямых выкладок, которые могут быть без труда повторены так, как мы это делаем на примере *первого* и *последнего* соотношений:

$$f\,(\,X_j\,) \downarrow x_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,\alpha_j\,\rangle \downarrow \langle\,\theta_j\,\bar{\theta}_j\,\rangle \,=\, \langle\,\bar{\alpha}_j\,\theta_j\,\rangle \,=\, \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{T}\,\rangle,$$

$$f\,(\,X_j\,)\,\bar{\downarrow}\,\bar{x}_{j+1} \stackrel{\sim}{\rightarrow} \langle\,\alpha_j\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\bar{\theta}_j\,\theta_j\,\rangle \,=\, \langle\,\bar{\theta}_j\,\alpha_j\,\rangle \,=\, \langle\,\alpha_j\,T^*\,\rangle.$$

Теорема **14** показывает, что из общей системы продукций множества Q естественным образом выделяется подмножество основных продукций

$$Q_1 \,=\, \{\,T,\,T^*,\,\bar{T},\,\bar{T}^*,\,M,\,\bar{M}\,\},$$

достаточных для того, чтобы записать операции из множества **(3.58)** над заданными литералами. Если ограничиться конъюнкцией и дизъюнкцией над заданными литералами, то столь же естественным образом из общей системы выделяется *второе* подмножество основных продукций

$$Q_2 \,=\, \{\,T,\,T^*,\,\bar{T},\,\bar{T}^*,\,M\,\}.$$

Для записи же только дизъюнкций над заданными литералами (дизъюнктов) достаточно базовой системы

$$Q_3 = \{\, T,\, T^*,\, M \,\},$$

а для записи только конъюнкций над заданными литералами (конъюнктов) достаточно базовой системы

$$Q_4 = \{\, \bar{T},\, \bar{T}^*,\, M \,\}.$$

Точно таким же образом для записи лишь сложений по *модулю 2* над литералами достаточно базовой системы

$$Q_5 = \{\, \bar{M},\, M \,\}.$$

Продукции M^* и $\bar{M}^*$ являются вспомогательными и могут использоваться для записи операций из системы **(3.58)** над уже имеющимися операторами:

$$\begin{aligned} \langle\, \alpha_j\, M^* \,\rangle &= \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \alpha_j^*\, T^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{T} \,\rangle \downarrow \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \\ &= \langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, T \,\rangle \,/\, \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T^* \,\rangle = \\ &= \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{\oplus}\, \langle\, \alpha_j^*\, T^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{T} \,\rangle \,\bar{\oplus}\, \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \\ &= \langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \oplus \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, T \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T^* \,\rangle. \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned} \langle\, \alpha_j\, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{T} \,\rangle \downarrow \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \\ &= \langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, T \,\rangle \,/\, \langle\, \alpha_j^*\, T^* \,\rangle = \\ &= \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{\oplus}\, \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, \bar{T} \,\rangle \,\bar{\oplus}\, \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \\ &= \langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \bar{\alpha}_j\, T \,\rangle \oplus \langle\, \alpha_j^*\, T^* \,\rangle. \end{aligned} \tag{3.67}$$

В системе продукций множества Q и его подмножеств $Q_1,\, Q_2,\, Q_3,\, Q_4,\, Q_5$ все продукции имеют индекс **нуль**, который не записывается, но подразумевается. Простейший способ расширения указанных множеств продукций может быть выполнен введением индексов $i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\,,$ полагая

$$Q^i = \{\, T_i,\, \bar{T}_i,\, T_i^*,\, \bar{T}_i^*\, M_i, \bar{M}_i,\, M_i^*,\, \bar{M}_i^* \,\},$$

и аналогично для подмножеств $Q_1^i,\, Q_2^i,\, Q_3^i,\, Q_4^i,\, Q_5^i,$ при этом общее определение действия продукций с положительными индексами таково.

Если $i = 0, 1, 2, 3, \ldots\,,$ $j \geq i,$ $\langle\, \alpha_{j+1} \,\rangle = \langle\, \alpha_j^0\, \alpha_j^1 \,\rangle,$ $B_{i+1} \in Q^{i+1},$ то

$$\langle\, \alpha_{j+1}\, B_{i+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \alpha_j^0\, B_i\, \alpha_j^1\, B_i \,\rangle. \tag{3.68}$$

Приложение этого определения для записи операторов видно из следующей ниже *теоремы*.

Теорема 15. Если $k \geq 1$ и функция алгебры логики $f\,(X_{j+k})$ имеет FS – оператор

$$\langle\,\alpha_{j+k}\,\rangle = \langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^1\,\alpha_j^2\,\alpha_j^3\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\alpha_j^s\,\rangle, \quad \text{где} \quad s = 2^k - 1,$$

то тогда следующие функции с областью определения X_{j+k} имеют FS – операторы:

$$f\,(X_{j+k}) \downarrow x_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\bar{\alpha}_j^0\,\bar{\alpha}_j^2\,\bar{\alpha}_j^4\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s-1}\,\bar{T}_{k-1}\,\rangle, \tag{3.69}$$

$$f\,(X_{j+k}) \downarrow \bar{x}_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\bar{\alpha}_j^1\,\bar{\alpha}_j^3\,\bar{\alpha}_j^5\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s}\,\bar{T}^*_{k-1}\,\rangle, \tag{3.70}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,/\, x_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\bar{\alpha}_j^1\,\bar{\alpha}_j^3\,\bar{\alpha}_j^5\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s}\,T^*_{k-1}\,\rangle, \tag{3.71}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,/\, \bar{x}_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\bar{\alpha}_j^0\,\bar{\alpha}_j^2\,\bar{\alpha}_j^4\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s-1}\,T_{k-1}\,\rangle, \tag{3.72}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{/}\, x_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\alpha_j^1\,\alpha_j^3\,\alpha_j^5\ \ldots\ \alpha_j^{s}\,\bar{T}^*_{k-1}\,\rangle, \tag{3.73}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{/}\, \bar{x}_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^2\,\alpha_j^4\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\bar{T}_{k-1}\,\rangle, \tag{3.74}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{\downarrow}\, x_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^2\,\alpha_j^4\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,T_{k-1}\,\rangle, \tag{3.75}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{\downarrow}\, \bar{x}_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\alpha_j^1\,\alpha_j^3\,\alpha_j^5\ \ldots\ \alpha_j^{s}\,T^*_{k-1}\,\rangle. \tag{3.76}$$

Доказательство. В верности этой теоремы легко убедиться, выполнив прямые выкладки. Образцы этих выкладок показаны на соотношениях **(3.69)** и **(3.74)**:

$$f\,(X_{j+k}) \downarrow x_{j+1} \simeq \langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^1\,\alpha_j^2\,\alpha_j^3\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\alpha_j^s\,\rangle \downarrow \langle\,\theta_j\,\bar{\theta}_j\,\theta_j\,\bar{\theta}_j\ \ldots\ \theta_j\,\bar{\theta}_j\,\rangle =$$

$$= \langle\,\bar{\alpha}_j^0\,\theta_j\,\bar{\alpha}_j^2\,\theta_j\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s-1}\,\theta_j\,\rangle = \langle\,\bar{\alpha}_j^0\,\bar{\alpha}_j^2\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s-1}\,\bar{T}_{k-1}\,\rangle,$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{/}\, \bar{x}_{j+1} \simeq \langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^1\,\alpha_j^2\,\alpha_j^3\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\alpha_j^s\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\,\bar{\theta}_j\,\theta_j\,\bar{\theta}_j\,\theta_j\ \ldots\ \bar{\theta}_j\,\theta_j\,\rangle =$$

$$= \langle\,\alpha_j^0\,\theta_j\,\alpha_j^2\,\theta_j\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\theta_j\,\rangle = \langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^2\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\bar{T}_{k-1}\,\rangle.$$

Замечание 7. Опущенные в *теореме* **14** операции $\oplus$ и $\bar{\oplus}$ приводят к результатам

$$f\,(X_{j+k}) \oplus x_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\alpha_j^0\,\bar{\alpha}_j^1\,\alpha_j^2\,\bar{\alpha}_j^3\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\bar{\alpha}_j^s\,\rangle, \tag{3.77}$$

$$f\,(X_{j+k}) \oplus \bar{x}_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\bar{\alpha}_j^0\,\alpha_j^1\,\bar{\alpha}_j^2\,\alpha_j^3\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s-1}\,\alpha_j^s\,\rangle, \tag{3.78}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{\oplus}\, x_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\bar{\alpha}_j^0\,\alpha_j^1\,\bar{\alpha}_j^2\,\alpha_j^3\ \ldots\ \bar{\alpha}_j^{s-1}\,\alpha_j^s\,\rangle, \tag{3.79}$$

$$f\,(X_{j+k}) \,\bar{\oplus}\, \bar{x}_{j+1} \ \simeq\ \langle\,\alpha_j^0\,\bar{\alpha}_j^1\,\alpha_j^2\,\bar{\alpha}_j^3\ \ldots\ \alpha_j^{s-1}\,\bar{\alpha}_j^s\,\rangle, \tag{3.80}$$

из которых можно извлечь полезные выводы, наложив определённые требования на оператор функции $f\,(\,X_{j\,+\,k}\,)$.

Операторы правых частей **(3.69)** — **(3.76)** приобретают бо̀льший интерес с учётом следующей *леммы*.

Лемма 3. Если $B_0,\,B_1,\,B_2,\,\ldots\,,\,B_{k\,-\,1}\in Q_1$ и

$$\langle\,\alpha_{j\,+\,k}\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^1\,\alpha_j^2\,\alpha_j^3\,\;\ldots\;\,\alpha_j^{s\,-\,1}\,\alpha_j^s\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha_j\,B_0\,B_1\,\ldots\,B_{k\,-\,1}\,\rangle, \tag{3.81}$$

то

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j^0\,\alpha_j^2\,\alpha_j^4\;\ldots\;\alpha_j^{s\,-\,1}\,\rangle\,&=\,\langle\,\beta_j^0\,B_1\,B_2\,\ldots\,B_{k\,-\,1}\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j^1\,\alpha_j^3\,\alpha_j^5\;\ldots\;\alpha_j^{s}\,\rangle\,&=\,\langle\,\beta_j^1\,B_1\,B_2\,\ldots\,B_{k\,-\,1}\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{3.82}$$

где

$$\langle\,\alpha_j\,B_0\,\rangle\,=\,\langle\,\beta_j^0\,\beta_j^1\,\rangle. \tag{3.83}$$

Доказательство. Верность *леммы* становится очевидной, если использовать рекурсивное рассуждение, которое заключается в том, что в выражении **(3.81)** продукция $B_i\,\in\,Q_1$, (где $i\,>\,0$) ведёт к приписыванию к выражению $\langle\,\alpha_j\,B_0\,B_1\,B_2\,\ldots\,B_{i\,-\,1}\,\rangle$ справа или слева (как вектору) $\bar\theta_{j\,+\,i}$ или $\theta_{j\,+\,i}$, когда B_i совпадает с одной из продукций $T,\,T^*,\,\bar T,\bar T^*$, и к приписыванию справа такого же выражения или инвертированного, когда B_i совпадает с M или $\bar M$. Продукция B_i, приписываемая к каждому из выражений **(3.82)**, даёт половинный эффект, так как её место смещается левее на одну позицию из – за того, что в выражениях **(3.82)** продукция B_0 исключена.

Примеры, иллюстрирующие *лемму* **3**.

1) $\langle\,\alpha_j\,T\,T^*\,\bar T\,T\,\rangle\;=\;\langle\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\alpha_j\,\bar\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\rangle,$

$\langle\,\alpha_j\,T^*\,\bar T\,T\,\rangle\;=\;\langle\,\bar\theta_j\,\alpha_j\;\theta_j\,\theta_j\;\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\rangle,$

$\langle\,\bar\theta_j\,T^*\,\bar T\,T\,\rangle\;=\;\langle\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\;\theta_j\,\theta_j\;\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\rangle\,=\,\langle\,\tau_{j\,+\,1}\,T\,\rangle.$

2) $\langle\,\alpha_j\,M\,T\,T^*\,\bar M\,\rangle\;=\;\langle\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\alpha_j\,\alpha_j\;\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\bar\alpha_j\,\bar\alpha_j\,\theta_j\,\theta_j\,\rangle,$

$\langle\,\alpha_j\,T\,T^*\,\bar M\,\rangle\;=\;\langle\,\bar\theta_j\,\bar\theta_j\,\alpha_j\,\bar\theta_j\,\theta_j\,\theta_j\,\bar\alpha_j\,\theta_j\,\rangle;$ второй оператор такой же.

Замечание 8. Точно такими же рассуждениями можно показать, что *лемма* **3** остаётся справедливой и в том случае, когда условие на продукции заменяется на более общее, а именно:

$$B_0,\,B_1,\,B_2,\,\ldots\,,\,B_{k\,-\,1}\,\in\,Q_1\,\cup\,Q_2^r \tag{3.84}$$

и если
$$B_i \in Q_2^r, \quad \text{то} \quad r < i. \tag{3.85}$$

Иллюстрационные примеры к этому замечанию.

$$\begin{array}{lll}
1) & \langle \alpha_j\, M\, T\, \bar T_1\, T_2^* \rangle & = \langle \bar\theta_{j+1}\, \alpha_j\, \alpha_j\, \bar\theta_{j+1}\, \theta_{j+1}\, \bar\theta_{j+1}\, \bar\theta_{j+2}\, \theta_{j+1} \rangle, \\
 & \langle \alpha_j\, T\, \bar T_1\, T_2^* \rangle & = \langle \bar\theta_j\, \alpha_j\, \bar\theta_j\, \theta_j\, \bar\theta_{j+1}\, \theta_j \rangle; \quad \text{второй оператор такой же.} \\
2) & \langle \alpha_j\, T\, T^*\, \bar T\, T\, T_2\, T_1^* \rangle & = \langle \bar\theta_{j+4}\, \bar\theta_{j+1}\, \alpha_j\, \bar\theta_j\, \bar\theta_{j+2}\, \theta_{j+2}\, \bar\theta_{j+2}\, \bar\theta_{j+5} \rangle, \\
 & \langle \alpha_j\, T^*\, \bar T\, T\, T_2\, T_1^* \rangle & = \langle \bar\theta_{j+3}\, \bar\theta_j\, \alpha_j\, \bar\theta_{j+1}\, \theta_{j+1}\, \bar\theta_{j+1}\, \bar\alpha_{j+4} \rangle, \\
 & \langle \bar\theta_j\, T^*\, \bar T\, T\, T_2\, T_1^* \rangle & = \langle \bar\theta_{j+3}\, \bar\theta_{j+2}\, \theta_{j+1}\, \bar\theta_{j+1}\, \bar\theta_{j+4} \rangle = \langle \tau_{j+1}\, T\, T_2\, T_1^* \rangle.
\end{array}$$

3.4 Постановка и запись задач распознавания с использованием FS–операторов

Задачи логического распознавания — это такие задачи, в которых требуется ответить на вопрос: *"да"* или *"нет"*. Например, имеет ли данная система уравнений решение; имеются ли бесконечно много простых чисел – близнецов и так далее. Список таких задач является обширным и многие из них являются чрезвычайно трудными.

Хотя целый класс дискретных задач в принципе может быть решён простым перебором, но практическое осуществление этой процедуры даже с помощью **ЭВМ** наталкивается на трудности, связанные с большими затратами времени и машинной памяти, так как число шагов переборного метода растёт экспоненциально в зависимости от размеров задачи (исключение составляют отдельные задачи).

Задача `выполнимости`, упомянутая во введении, в определённом смысле является одной из самых интересных. Эта задача, впервые сформулированная для нужд кибернетики и вычислительной математики около трёх десятков лет назад ([**29**], [**30**]), известна в классической логике [**25**], [**24**] значительно раньше. Она используется в качестве некоторой меры сложности в теории труднорешаемых задач [**15**]. Хотя это — абстрактная задача, она имеет большое количество разнообразных интерпретаций и держит рекорд по числу практических приложений: важнейшие этапы минимизации дизъюнктивных нормальных форм [**31**], комбинаторика логического проектирования [**32**], логические уравнения

[33], **[34]**, построение тестов для логических схем **[35]**, нахождение дизъюнктивных нормальных функций, реализуемых схемами **[36]**. Эта задача занимает центральное место в теории алгоритмов **[37]**, **[34]**. Она не безинтересна для разработчиков систем искусственного интеллекта **[38]**, **[39]**, **[40]**. Большое количество задач, сводимых к задаче выполнимости, можно найти в **[15]**.

В задаче выполнимости (в её классической формулировке) требуется ответить: *существует ли набор значений переменных, называемый выполняющим, который превращает данную* **КНФ** *в истинное высказывание ?* (Форма называется **КНФ**, если она является конъюнкцией одного или более конъюнктивных членов, каждый из которых является дизъюнктом). При положительном ответе **КНФ** называется выполнимой, при отрицательном — невыполнимой (противоречивой); если кроме распознавания выполнимости требуется ещё предъявить выполняющий набор, то задачу называют выполнимой с предъявлением, которую мы будем иметь ввиду в дальнейшем, кратко записывая **ВЫП**.

Примеры задач **ВЫП**. В каждой из нижеследующих **КНФ** $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$ требуется определить: выполнима ли предъявленная форма ?

$$\begin{aligned} f_1(X_5) \;\rightleftharpoons\; & (\bar{x}_1 \bar{\downarrow} x_2)\,\bar{/}\,(\bar{x}_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_4)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} x_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3)\,\bar{/} \\ \bar{/}\;\; & (x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_5)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_5)\,\bar{/}\,(x_2 \bar{\downarrow} x_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(X_7) \;\rightleftharpoons\; & (x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6)\,\bar{/}\,(x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_5)\,\bar{/}\,(x_4 \bar{\downarrow} x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \downarrow \bar{x}_7)\,\bar{/} \\ \bar{/}\;\; & (x_1 \bar{\downarrow} x_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_5)\,\bar{/}\,(\bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7)\,\bar{/}\,(\bar{x}_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_7)\,\bar{/} \\ \bar{/}\;\; & (\bar{x}_5 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7)\,\bar{/}\,(x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} x_7). \end{aligned}$$

3.4.1 Операторы задачи ВЫП и её табличное представление.

В задачах **ВЫП** имеем дело с конъюнкцией дизъюнктов. Для представления дизъюнктов FS – операторами можно воспользоваться *леммой* **2** и *теоремой* **14**, точнее, соотношениями **(3.65)** из *теоремы* **14**.

Для дизъюнктов формы $f_1(X_5)$ имеем:

$$
\begin{array}{rclllllr}
\bar{x}_1 \bar{\downarrow} x_2 & \simeq & \langle\, \tau & T & M & M & M\,\rangle, \\
\bar{x}_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 & \simeq & \langle\, \tau & T^* & M & M & M\,\rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_4 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & T^* & M & T & M\,\rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} x_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & T & T^* & M & M\,\rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & T^* & M & M & T^*\,\rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_5 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & T^* & M & T^* & T\,\rangle, \\
x_2 \bar{\downarrow} x_3 & \simeq & \langle & \bar{\tau}_1 & T & M & M\,\rangle.
\end{array}
$$

Для дизъюнктов формы $f_2(X_7)$ имеем:

$$
\begin{array}{rclllllll}
x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & M & T & T^* & M & T & M\,\rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & T^* & T & M & T^* & M & M\,\rangle, \\
x_4 \bar{\downarrow} x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} \bar{x}_7 & \simeq & \langle & & & \bar{\tau}_3 & T & T^* & T^*\,\rangle, \\
x_1 \bar{\downarrow} x_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 & \simeq & \langle\, \bar{\tau} & M & M & T & T^* & M & M\,\rangle, \\
\bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 & \simeq & \langle & \tau_1 & T^* & M & M & T & T\,\rangle, \\
\bar{x}_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_7 & \simeq & \langle & & \tau_2 & T^* & M & M & T^*\,\rangle, \\
\bar{x}_5 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 & \simeq & \langle & & & & \tau_4 & T & T\,\rangle, \\
x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} x_7 & \simeq & \langle & & & & \bar{\tau}_4 & T^* & T\,\rangle.
\end{array}
$$

В табличном представлении задачи **ВЫП** каждый дизъюнкт имеет FS – оператор в системе продукций Q_3 и занимает одну строку таблицы. Число столбцов таблицы совпадает с числом переменных. Заполнение таблицы осуществляется так. В дизъюнкте литералу с минимальным индексом i ставится в соответствие $\bar{\tau}_{i-1}$, если – это x_i и τ_{i-1} для $\bar{x}_i$. Эти начала записываются в $(i-1)$–ом столбце. В остальных столбцах правее $(i-1)$–го записываем T в j–ом столбце, если в дизъюнкте входит x_{j+1} и записываем T^* для $\bar{x}_{j+1}$. Если в дизъюнкте литерала с индексом $j+1$ нет, то записываем продукцию M. Принимем, что FS–операторы, занимающие каждый по строке в таблице, соединены конъюнктивно. Разумеется, что по таблице можно однозначно восстановить задачу в **КНФ**. **КНФ** для $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$ имеются табличное представление: *таблица* **1** и *таблица* **2** соответственно.

Таблица 1

0	1	2	3	4
τ	T	M	M	M
τ	T^*	M	M	M
$\bar\tau$	T^*	M	T	M
$\bar\tau$	T	T^*	M	M
$\bar\tau$	T^*	M	M	T^*
$\bar\tau$	T^*	M	T^*	T
	$\bar\tau$	T	M	M

Таблица 2

0	1	2	3	4	5	6
$\bar\tau$	M	T	T^*	M	T	M
$\bar\tau$	T^*	T	M	T^*	M	M
			$\bar\tau$	T	T^*	T^*
$\bar\tau$	M	M	T	T^*	M	M
	τ	T^*	M	M	T	T
		τ	T^*	M	M	T^*
				τ	T	T
				$\bar\tau$	T^*	T

Замечание 9. В строках таблицы задачи **ВЫП** индекс у τ или $\bar\tau$ опущен, но он предполагается равным номеру столбца. Поскольку в задачах имеется конъюнкция операторов, то перестановка строк в таблицах не влияет на решение задач, представленных таблично. Перестановка столбцов в таблице задачи **ВЫП** означает переименование переменных, поэтому, если в такой задаче находится решение, то должно быть учтено переименование.

Для операторов таблицы будут использоваться понятия: *длина оператора* и *ранг оператора*. Длина оператора таблицы с n столбцами $0, 1, 2, \ldots, n-1$ и с началом τ_{i-1} или $\bar\tau_{i-1}$ равна $n-i+1$, а ранг оператора равен $n-i-k+1$, где k — сумма продукций M в операторе, то есть ранг оператора совпадает с числом литералов, входящих в дизъюнкт. Значит, при перестановке столбцов ранг оператора не изменяется, а длина оператора может измениться.

Таблица называется *двойственной* к таблице задачи **ВЫП**, если в ней произведена замена τ на $\bar\tau$, $\bar\tau$ на τ, T на $\bar T$ и T^* на $\bar T^*$ и, кроме того, принимается, что FS–операторы, занимающие каждый по строке в таблице, соединены дизъюнктивно, что отмечается двойной вертикальной чертой в её начале. *Таблица* **3** является двойственной к *таблице* **1**, и *таблица* **4** — двойственна к *таблице* **2**.

Таблица 3

0	1	2	3	4
$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	M	M	M
$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	M	M	M
τ	$\bar{T}^*$	M	$\bar{T}$	M
τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	M	M
τ	$\bar{T}^*$	M	M	$\bar{T}^*$
τ	$\bar{T}^*$	M	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$
	τ	$\bar{T}$	M	M

Таблица 4

0	1	2	3	4	5	6
τ	M	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	M	$\bar{T}$	M
τ	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	M	M
			τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$
τ	M	M	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	M	M
	$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	M	M	$\bar{T}$	$\bar{T}$
		$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	M	M	$\bar{T}^*$
				$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
				τ	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$

В том случае, когда задача **ВЫП** является противоречивой, двойственная задача является тавтологией. Это действительно так, поскольку двойственная таблица к таблице задачи **ВЫП** является таблицей **ДНФ**, получающейся из **КНФ** в результате замены x_i на $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i$ на x_i и $\bar{\downarrow}$ на $\bar{/}$, а $\bar{/}$ на $\bar{\downarrow}$.

3.4.2 Юнкты и их FS–операторы.

Таблицы задачи **ВЫП** и двойственные к ним являются частным случаем более общих таблиц, которые могут быть составлены из операторов более общего характера. В самом деле, в таблице задачи **ВЫП** каждый оператор получается из дизъюнкта. Однако вместо дизъюнкта мы можем иметь и другие образования, которые могут получаться в результате замены $\bar{\downarrow}$ на любую операцию из множества **(3.58)**, то есть иметь: $\downarrow$ – юнкт, $\oplus$ – юнкт, $/$ – юнкт, $\bar{/}$ – юнкт, $\bar{\oplus}$ – юнкт, используя в названии первый слог от операции перед словом *"юнкт"*, то есть соответственно: **вебъюнкт**, **модъюнкт**, **шефъюнкт**, **конъюнкт**, **эквиюнкт**. Например, из первого $\bar{\downarrow}$ – юнкта $f_2(X_7)$ можем получить следующие юнкты в перечисленной выше последовательности:

$$
\begin{array}{c}
x_1 \;\downarrow\; x_3 \;\downarrow\; \bar{x}_4 \;\downarrow\; x_6,\\
x_1 \;\oplus\; x_3 \;\oplus\; \bar{x}_4 \;\oplus\; x_6,\\
x_1 \;/\; x_3 \;/\; \bar{x}_4 \;/\; x_6,\\
x_1 \;\bar{/}\; x_3 \;\bar{/}\; \bar{x}_4 \;\bar{/}\; x_6,\\
x_1 \;\bar{\oplus}\; x_3 \;\bar{\oplus}\; \bar{x}_4 \;\bar{\oplus}\; x_6,
\end{array}
\tag{3.86}
$$

при этом предполагается, что операции выполняются в порядке их следования.

Если сохранить требование выполнять операции в порядке их следования, то разумеется, что совсем не обязательно, чтобы между литералами указывалась одна и та же операция, то есть мы могли бы строить и смешанные юнкты, если только индексы переменных возрастают, как например

$$
\begin{array}{c}
x_1 \;\downarrow\; x_3 \;/\; \bar{x}_4 \;\bar{\downarrow}\; x_6,\\
x_1 \;\bar{/}\; x_3 \;\bar{\downarrow}\; \bar{x}_4 \;/\; x_6,\\
x_1 \;\oplus\; x_3 \;\bar{/}\; \bar{x}_4 \;\bar{\oplus}\; x_6.
\end{array}
\tag{3.87}
$$

Используя *лемму* **2** и *теорему* **14** для перечисленных типов юнктов легко строятся FS–операторы. Перечисленные в **(3.86)** и **(3.87)** юнкты имеют FS–операторы соответственно:

$$
\begin{array}{c}
\langle\, \tau \;\; M \;\; \bar{T} \;\; T^* \;\; M \;\; \bar{T} \,\rangle,\\
\langle\, \tau \;\; M \;\; \bar{M} \;\; \bar{M} \;\; M \;\; \bar{M} \,\rangle,\\
\langle\, \tau \;\; M \;\; T^* \;\; \bar{T} \;\; M \;\; T^* \,\rangle,\\
\langle\, \bar{\tau} \;\; M \;\; \bar{T}^* \;\; \bar{T} \;\; M \;\; \bar{T}^* \,\rangle,\\
\langle\, \bar{\tau} \;\; M \;\; \bar{M} \;\; \bar{M} \;\; M \;\; \bar{M} \,\rangle,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\langle\, \bar{\tau} \;\; M \;\; T \;\; T \;\; M \;\; T \,\rangle,\\
\langle\, \tau \;\; M \;\; T^* \;\; \bar{T}^* \;\; M \;\; T^* \,\rangle,\\
\langle\, \bar{\tau} \;\; M \;\; \bar{M} \;\; \bar{T} \;\; M \;\; T \,\rangle.
\end{array}
$$

От требования, чтобы индексы переменных в юнктах возрастали, можно отказаться, если в записи юнктов использовать только операции из множества

$$\{\downarrow, /, \bar{/}, \bar{\downarrow}\}, \tag{3.88}$$

так как в этом случае, для записи FS–операторов, кроме *леммы* **2** и *теоремы* **14** следует использовать *теорему* **15**, *лемму* **3** и *замечание* **8**. А это значит, что в записи FS–операторов будут использованы продукции из множества Q_2^r с условием **(3.85)**, что обусловлено множеством **(3.88)**.

3.5 σ–операторы юнктов

Как известно, при постановке различных задач важную роль играют *юнкты*, которые, будучи соединённые знаками логических операций, дают нам полные формулировки задач. Но для записи самих юнктов необходимы базовые σ–операторы или селекторные операторы.

3.5.1 Селекторные операторы.

Принятый нами способ задания таблицы определения X_n (*см.* **2.1**) и записи базовых σ–операторов (*см.* **(1.106)**) позволяет заявить, что верна следующая очевидная

Теорема 16. Селекторные операторы или операторы переменных (при заданном n) имеют базовые σ–операторы:

$$\begin{array}{rr}
x_1 \simeq \langle\langle\bar\tau^{\,n-1}\rangle\rangle, & \bar x_1 \simeq \langle\langle\tau^{\,n-1}\rangle\rangle, \\
x_2 \simeq \langle\langle\bar\tau_1^{n-2}\rangle\rangle, & \bar x_2 \simeq \langle\langle\tau_1^{n-2}\rangle\rangle, \\
x_3 \simeq \langle\langle\bar\tau_2^{n-3}\rangle\rangle, & \bar x_3 \simeq \langle\langle\tau_2^{n-3}\rangle\rangle, \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
x_j \simeq \langle\langle\bar\tau_{j-1}^{n-j}\rangle\rangle, & \bar x_j \simeq \langle\langle\tau_{j-1}^{n-j}\rangle\rangle, \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{n-1} \simeq \langle\langle\bar\tau_{n-2}^{1}\rangle\rangle, & \bar x_{n-1} \simeq \langle\langle\tau_{n-2}^{1}\rangle\rangle, \\
x_n \simeq \langle\langle\bar\tau_{n-1}\rangle\rangle, & \bar x_n \simeq \langle\langle\tau_{n-1}\rangle\rangle.
\end{array}$$

При выполнении выкладок удобно использовать некоторые достаточно очевидные свойства системы конечных σ–операторов:

$$\langle\langle\nu_j^i\rangle\rangle,\ \ \langle\langle\tau_j^i\rangle\rangle,\ \ \langle\langle\bar\tau_j^i\rangle\rangle,\ \ \langle\langle\bar\nu_j^i\rangle\rangle, \tag{3.89}$$

где предполагается, что целые неотрицательные i и j подчинены равенству

$$j + i = n - 1. \tag{3.90}$$

В перечне свойств конечных σ–операторов одно и то же выражение может иметь различные формы записи, поэтому условно принято, что последняя запись в перечне считается предпочтительной.

Свойство 1. Если $0 \le k \le i$ и $0 \le k \le j$, то

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \langle\langle \nu_j^i \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j-k}^{i+k} \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j+k}^{i-k} \rangle\rangle = \langle\langle \nu^{j+i} \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j+i} \rangle\rangle,\\
&\text{б)}\quad \langle\langle \bar\nu_j^i \rangle\rangle = \langle\langle \bar\nu_{j-k}^{i+k} \rangle\rangle = \langle\langle \bar\nu_{j+k}^{i-k} \rangle\rangle = \langle\langle \bar\nu^{j+i} \rangle\rangle = \langle\langle \bar\nu_{j+i} \rangle\rangle,\\
&\text{в)}\quad \langle\langle \nu_j\, \nu_j \rangle\rangle = \langle\langle \nu_{j+1} \rangle\rangle,\\
&\text{г)}\quad \langle\langle \bar\nu_j\, \bar\nu_j \rangle\rangle = \langle\langle \bar\nu_{j+1} \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Верность свойств **1а) ÷ 1г)** следует из определений операторов $\langle\langle \nu_j^i \rangle\rangle$ и $\langle\langle \bar\nu_j^i \rangle\rangle$.

Свойство 2.

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \langle\langle (\bar\nu_j\, \nu_j)^i \rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j+1}^i \rangle\rangle,\\
&\text{б)}\quad \langle\langle (\nu_j\, \bar\nu_j)^i \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_{j+1}^i \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

В самом деле, в случае **а)**

$$\langle\langle \tau_{j+1}^i \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\theta_{j+1}\, \theta_{j+1})^i \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\nu_j\, \nu_j)^i \rangle\rangle,$$

что может быть записано и в обратном направлении.

Аналогичное верно и для **2б)**.

Лемма 4. Если $1 \le j < r \le n$, $p = r - j$ и a – общее имя для τ_{j-1} и $\bar\tau_{j-1}$, то селекторные функции x_j и $\bar x_j$ имеют σ–оператор $\langle\langle (a^p)^{n-r} \rangle\rangle$.

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned}
x_j &\;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle\langle \bar\tau_{j-1}^{n-j} \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\tau_{j-1}^{r-j})^{n-r} \rangle\rangle = \langle\langle (a^p)^{n-r} \rangle\rangle,\\
\bar x_j &\;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle\langle \tau_{j-1}^{n-j} \rangle\rangle = \langle\langle (\tau_{j-1}^{r-j})^{n-r} \rangle\rangle = \langle\langle (a^p)^{n-r} \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

3.5.2 Операции над σ–операторами.

Прежде всего установим логические операции из **(3.58)** над селекторными σ–операторами.

Свойство 3. Если $i \geq 1$, то

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ \ \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \downarrow \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\nu_{i-1}\,\bar\tau^{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{б)}\ \ \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \downarrow \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\nu_{i-1}\,\tau^{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{в)}\ \ \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \downarrow \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^{i-1}\,\nu_{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{г)}\ \ \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \downarrow \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^{i-1}\,\nu_{i-1}\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

Справедливость этого свойства обосновывается так:

$$\text{а)}\ \ \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \downarrow \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^{i-1}\,\tau^{i-1}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle\bar\nu_{i-1}\,\nu_{i-1}\rangle\rangle = \langle\langle\nu_{i-1}\,\bar\tau^{i-1}\rangle\rangle,$$

аналогичные выкладки и для первых частей **б) — г)**. Затем заметим, что равенство сохраняется, если члены его заменяются на инвертированные, а операция $\langle\downarrow\rangle$ заменяется на сопряжённую $\langle\,\bar{/}\rangle$.

Свойство 4. Если $i \geq 1$, то

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ \ \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \,/\, \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\nu_{i-1}\,\tau^{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{б)}\ \ \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \,/\, \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\nu_{i-1}\,\bar\tau^{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{в)}\ \ \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \,/\, \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^{i-1}\,\bar\nu_{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{г)}\ \ \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \,/\, \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^{i-1}\,\bar\nu_{i-1}\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

В самом деле, если операции между членами в равенствах *свойства* **3** заменить на инвертированные, то результат должен быть также инвертирован, что приводит к соответствующим равенствам в этом свойстве.

Свойство 5. Если $i \geq 1$, то

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ \ \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \oplus \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \oplus \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle =\\
&\qquad = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^{i-1}\tau^{i-1}\rangle\rangle,\\
&\text{б)}\ \ \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \oplus \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \oplus \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle =\\
&\qquad = \langle\langle\tau^i\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\bar\tau^i\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle\bar\tau_i\rangle\rangle = \langle\langle\tau^{i-1}\bar\tau^{i-1}\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

И здесь убеждаемся, что

$$\text{а)}\quad \langle\langle \tau^i\rangle\rangle \oplus \langle\langle \tau_i\rangle\rangle = \langle\langle \tau^{i-1}\tau^{i-1}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \bar{\nu}_{i-1}\nu_{i-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}^{i-1}\tau^{i-1}\rangle\rangle,$$

аналогичные выкладки и для *первой* части **б)**. Затем учитываем, что $\langle\oplus\rangle$ и $\langle\bar{\oplus}\rangle$ суть самосопряжённые операции.

Свойство 6. Если $1 \le j < r \le n$, то

$$\text{а)}\quad \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \nu_{r-2}\,\bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle,$$
$$\text{б)}\quad \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \nu_{r-2}\,\tau_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle,$$
$$\text{в)}\quad \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\,\nu_{r-2}\rangle\rangle,$$
$$\text{г)}\quad \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j-1}\,\nu_{r-2}\rangle\rangle.$$

Учитывая рассуждения в свойствах **3** — **5**, здесь достаточной будет выкладка:

$$\langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j-1}\,\tau_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle \downarrow \langle\langle \bar{\nu}_{r-2}\,\nu_{r-2}\rangle\rangle = \langle\langle \nu_{r-2}\,\bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle.$$

Эта выкладка будет достаточной для понимания того, что верно и

Свойство 7. Если $1 \le j < r \le n$, то

$$\text{а)}\quad \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,/\, \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}_{r-2}\,\tau_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle,$$
$$\text{б)}\quad \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,/\, \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\nu}_{r-2}\,\bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle,$$
$$\text{в)}\quad \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,/\, \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j-1}\,\bar{\nu}_{r-2}\rangle\rangle,$$
$$\text{г)}\quad \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \,/\, \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\,\bar{\nu}_{r-2}\rangle\rangle.$$

Свойство 8. Если $1 \le j < r \le n$, то

$$\text{а)}\quad \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\tau_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle,$$
$$\text{б)}\quad \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \bar{\oplus} \langle\langle \bar{\tau}_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j-1}\bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle.$$

Здесь тоже ограничимся выкладкой:

$$\langle\langle \tau_{j-1}^{r-j}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \tau_{r-1}\rangle\rangle = \langle\langle \tau_{j-1}^{r-j-1}\tau_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle \oplus \langle\langle \bar{\nu}_{r-2}\nu_{r-2}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1}\tau_{j-1}^{r-j-1}\rangle\rangle.$$

Теперь сделаем ещё одно обобщение и убедимся, что верны следующие ниже свойства.

Свойство 9. Если $i > s \geq, \quad i + j = s + q,$ то

$$\text{а)}\ \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \downarrow \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\nu_{q-1}\, \bar\tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{б)}\ \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \downarrow \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\nu_{q-1}\, \tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{в)}\ \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \downarrow \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\tau_j^{i-s-1}\, \nu_{q-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{г)}\ \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \downarrow \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\tau_j^{i-s-1}\, \nu_{q-1})^s \rangle\rangle.$$

И здесь выкладку проиллюстрируем на *случае* **а)**:

$$\langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \downarrow \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\tau_j^{i-s})^s \rangle\rangle \downarrow \langle\langle (\tau_q)^s \rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle (\tau_j^{i-s-1}\, \tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle \downarrow \langle\langle (\bar\nu_{q-1}\, \nu_{q-1})^s \rangle\rangle,$$

что даёт указанный результат. Инвертирование, применённое к *свойству* **9**, даёт

Свойство 10. Если $i > s \geq 1, \quad i + j = s + q,$ то

$$\text{а)}\ \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\downarrow}\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,/\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\nu_{q-1}\, \tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{б)}\ \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\downarrow}\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,/\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\nu_{q-1}\, \bar\tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{в)}\ \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\downarrow}\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,/\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\tau_j^{i-s-1}\, \bar\nu_{q-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{г)}\ \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\downarrow}\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,/\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\tau_j^{i-s-1}\, \bar\nu_{q-1})^s \rangle\rangle.$$

Свойство 11. Если $i > s \geq 1, \quad i + j = s + q,$ то

$$\text{а)}\ \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \oplus \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \oplus \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\oplus}\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\oplus}\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\bar\tau_j^{i-s-1} \tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle,$$

$$\text{б)}\ \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \oplus \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \oplus \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle \tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\oplus}\, \langle\langle \tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle \bar\tau_j^i \rangle\rangle \,\overline{\oplus}\, \langle\langle \bar\tau_q^s \rangle\rangle = \langle\langle (\tau_j^{i-s-1}\, \bar\tau_j^{i-s-1})^s \rangle\rangle.$$

Наконец, можно сказать, что и так всё ясно и ничего не иллюстрировать.

Замечание 10. *Свойства* **9 — 11** действительно являются обобщением соответствующих *свойств* **6 — 8**, которые, в свою очередь, обобщают *свойства* **3 — 5** соответственно.

В самом деле, если в *свойствах* **9** — **11** заменить j на $j-1$, i на $r-j$, q на $r-1$ и принять $s=0$, то получим соответствующие равенства из *свойств* **6** — **8**. Если же в *свойствах* **6** — **8** принять $j=1$, $r-1=i$, то получим соответствующие равенства из *свойств* **3** — **5**.

Теорема 17. В условиях и обозначениях *леммы* **4** имеем:

$$x_j \,\overline{/}\, x_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (\nu_{r-2}\, a^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle,$$
$$x_j \,\overline{/}\, \bar{x}_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (a^{p-1}\, \nu_{r-2})^{n-r} \,\rangle\rangle;$$

$$x_j \,\overline{\downarrow}\, x_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (a^{p-1}\, \bar{\nu}_{r-2})^{n-r} \,\rangle\rangle,$$
$$x_j \,\overline{\downarrow}\, \bar{x}_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (\bar{\nu}_{r-2}\, a^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle;$$

$$x_j \,\oplus\, x_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (a^{p-1}\, \bar{a}^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle,$$
$$x_j \,\oplus\, \bar{x}_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (\bar{a}^{p-1}\, a^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle.$$

В обосновании соотношений *этой* теоремы следует воспользоваться *теоремой* **16** и *леммой* **4**, выполнив выкладки так, как это делалось выше, но *два* примера обоснования *первого* и *последнего* соотношений таковы:

$$\begin{aligned} x_j \,\overline{/}\, x_r \;&\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (a^{p})^{n-r} \,\rangle\rangle \;\overline{/}\; \langle\langle\, \bar{\tau}_{r-1}^{\,n-r} \,\rangle\rangle \;= \\ &=\; \langle\langle\, (a^{p-1}\, a^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle \;\overline{/}\; \langle\langle\, (\nu_{r-2}\, \bar{\nu}_{r-2}\,)^{n-r} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\nu_{r-2}\, a^{p-1}\,)^{n-r} \,\rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$x_j \,\oplus\, \bar{x}_r \;\underset{\rightarrow}{\sim}\; \langle\langle\, (a^{p-1}\, a^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle \;\oplus\; \langle\langle\, (\bar{\nu}_{r-2}\, \nu_{r-2})^{n-r} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\bar{a}^{p-1}\, a^{p-1})^{n-r} \,\rangle\rangle.$$

Замечание 11. *Теорема* **17** охватывает значительно больше соотношений, если иметь ввиду, что

$$\bar{x}_j \,\downarrow\, \bar{x}_r \;=\; x_j \,\overline{/}\, x_r,$$
$$\bar{x}_j \,\downarrow\, x_r \;=\; x_j \,\overline{/}\, \bar{x}_r;$$

$$\bar{x}_j \,/\, \bar{x}_r \;=\; x_j \,\overline{\downarrow}\, x_r,$$
$$\bar{x}_j \,/\, x_r \;=\; x_j \,\overline{\downarrow}\, \bar{x}_r;$$

$$\bar{x}_j \,\oplus\, \bar{x}_r \;=\; x_j \,\oplus\, x_r \;=\; \bar{x}_j \,\overline{\oplus}\, x_r \;=\; x_j \,\overline{\oplus}\, \bar{x}_r,$$
$$\bar{x}_j \,\oplus\, x_r \;=\; x_j \,\oplus\, \bar{x}_r \;=\; x_j \,\overline{\oplus}\, x_r \;=\; \bar{x}_j \,\overline{\oplus}\, \bar{x}_r.$$

Замечание 12. Если предполагать, что к каждой из функций левой части соотношений, представленных в *теореме* **17** (а с учётом *замечания* **11** и более широкого охвата), могут вновь конъюнктивно, дизъюнктивно, модъюнктивно (а с учётом *замечания* **11** и вебъюнктивно, шефъюнктивно и эквиюнктивно) присоединяться члены x_m или $\bar{x}_m$, где $r < m \leq n$, то *правым* частям соотношений из *теоремы* **17** (не исключая и соотношений из *замечания* **11**) следует придать вид выражения σ–оператора из *леммы* **4**, точнее, если a_* — общее имя для

$$\nu_{r-2}\, a^{p-1},\ \ a^{p-1}\, \nu_{r-2},\ \ a^{p-1}\, \bar{\nu}_{r-2},\ \ \bar{\nu}_{r-2}\, a^{p-1},\ \ a^{p-1}\, \bar{a}^{p-1},\ \ \bar{a}^{p-1}\, a^{p-1}, \tag{3.91}$$

то *правые* части соотношений из *теоремы* **17** примут вид

$$\langle\langle\, (a_*^q)^{n-m} \,\rangle\rangle \tag{3.92}$$

где $q = m - r$. А так как a_* в **(3.92)** может рассматриваться как следующее общее имя, построенное по общему предшествующему имени a (*см.* **(3.91)**), то мы имеем описание рекурсивного процесса построения выражений σ–операторов с начальным общим именем $\bar{\tau}_{j-1}$ и τ_{j-1} для x_j и $\bar{x}_j$ соответственно и конечным значением

$$\langle\langle\, A^{n-w} \,\rangle\rangle, \tag{3.93}$$

где A — *предпоследнее* общее имя (в построении *последнего* — нет надобности), имеющее вид **(3.91)** с $p = t = w - v$ для w, непосредственно предшествующего n, что значит:

$$1 \leq j < r < m < \ldots < v < w \leq n. \tag{3.94}$$

3.5.3 Примеры σ–операторов юнктов.

Используя изложенное в **3.5.2**, построим σ–операторы для дизъюнкта

$$x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6, \tag{3.95}$$

юнктов **(3.86)** и **(3.87)**. Во всех этих примерах выражение **(3.94)** получает вид $1 \leq j < r < w \leq n$, где $j = 1$, $r = 3$, $w = 4$, $n = 6$.

Считая $n = 6$ максимальным фиксированным, рассмотрим дизъюнкт **(3.95)** в динамике его наращивания:

$$x_1 \simeq \langle\langle \bar{\tau}^5 \rangle\rangle,$$

$$x_1 \bar{\downarrow} x_3 \simeq \langle\langle\, (\bar{\tau}^1\, \bar{\nu}_1)^3 \,\rangle\rangle,$$

$$x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_2\, \bar{\tau}^1\, \bar{\nu}_1)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_2\, \bar{\tau}^1\, \bar{\nu}_1)^1\, \bar{\nu}_4 \,\rangle\rangle.$$

Юнкты **(3.86)** имеют нижеследующие σ–операторы соответственно:

$$\langle\langle\, (\bar{\nu}_2\, \tau^1\, \nu_1)^1\, \nu_4 \rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\tau}^1\, \tau^1)^1\, (\bar{\tau}^1\, \tau^1\, \tau^1\, \bar{\tau}^1)^1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, \bar{\nu}_4\, (\bar{\nu}_1\, \tau^1\, \nu_2)^1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, \nu_4\, (\nu_1\, \bar{\tau}^1\, \nu_2\,)^1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, (\bar{\tau}^1\, \tau^1\, \tau^1\, \bar{\tau}^1)^1\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\tau}^1\, \tau^1)^1 \,\rangle\rangle.$$

Обоснование указанных результатов можно выполнить, используя *теорему* **17**, *замечания* **11** и **12**:

$$\alpha \,=\, x_1 \downarrow x_3 \,=\, \bar{x}_1 \,\bar{/}\, \bar{x}_3 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\tau^1\, \nu_1)^3 \,\rangle\rangle,$$
$$\beta \,=\, x_1 \downarrow x_3 \downarrow \bar{x}_4 \,=\, \alpha \downarrow \bar{x}_4 \,=\, \bar{\alpha} \,\bar{/}\, x_4 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\nu_2\, \bar{\tau}^1\, \bar{\nu}_1)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \downarrow x_3 \downarrow \bar{x}_4 \downarrow x_6 \,=\, \beta \downarrow x_6 \,=\, \bar{\beta} \,\bar{/}\, \bar{x}_6 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_2\, \tau^1\, \nu_1)^1\, \nu_4 \,\rangle\rangle;$$

$$x_1 \oplus x_3 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\tau}^1\, \tau^1)^3 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_4 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\tau}^1\, \tau^1)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_4 \oplus x_6 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\tau}^1\, \tau^1)^1\, (\bar{\tau}^1\, \tau^1\, \tau^1\, \bar{\tau}^1)^1 \,\rangle\rangle;$$

$$\alpha \,=\, x_1 \,/\, x_3 \,=\, \bar{x}_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_1\, \tau^1)^3 \,\rangle\rangle,$$
$$\beta \,=\, x_1 \,/\, x_3 \,/\, \bar{x}_4 \,=\, \alpha \,/\, \bar{x}_4 \,=\, \bar{\alpha} \bar{\downarrow} x_4 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\nu_1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\nu}_2)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,/\, x_3 \,/\, \bar{x}_4 \,/\, x_6 \,=\, \beta \,/\, x_6 \,=\, \bar{\beta} \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, \bar{\nu}_4\, (\bar{\nu}_1\, \tau^1\, \nu_2)^1 \,\rangle\rangle;$$

$$x_1 \,\bar{/}\, x_3 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\nu_1\, \bar{\tau}^1)^3 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\bar{/}\, x_3 \,\bar{/}\, \bar{x}_4 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\nu_1\, \bar{\tau}^1\, \nu_2)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\bar{/}\, x_3 \,\bar{/}\, \bar{x}_4 \,\bar{/}\, x_6 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, \nu_4\, (\nu_1\, \bar{\tau}^1\, \nu_2)^1 \,\rangle\rangle;$$

$$\alpha \,=\, x_1 \bar{\oplus} x_3 \,=\, x_1 \oplus \bar{x}_3 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1)^3 \,\rangle\rangle,$$
$$\beta \,=\, x_1 \bar{\oplus} x_3 \bar{\oplus} \bar{x}_4 \,=\, \alpha \bar{\oplus} \bar{x}_4 \,=\, \alpha \oplus x_4 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\tau}^1\, \tau^1)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \bar{\oplus} x_3 \bar{\oplus} \bar{x}_4 \bar{\oplus} x_6 \,=\, \beta \bar{\oplus} x_6 \,=\, \beta \oplus \bar{x}_6 \overset{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\tau}^1\, \tau^1\, \tau^1\, \bar{\tau}^1)^1\, (\tau^1\, \bar{\tau}^1\, \bar{\tau}^1\, \tau^1)^1 \,\rangle\rangle.$$

Юнкты **(3.87)** имеют нижеследующие σ–операторы соответственно:

$$\langle\langle\,(\bar\tau^1\,\bar\nu_1\,\bar\nu_2)^1\,\bar\nu_4\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\,\bar\nu_4\,(\nu_2\,\bar\nu_1\,\tau^1)^1\,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\,(\tau^1\,\bar\tau^1\,\bar\nu_2)^1\,(\bar\tau^1\,\tau^1\,\nu_2)^1\,\rangle\rangle.$$

В том, что это так, можно убедиться по следующим ниже выкладкам:

$$\alpha \;=\; x_1 \downarrow x_3 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\tau^1\,\nu_1)^3\,\rangle\rangle,$$
$$\beta \;=\; x_1 \downarrow x_3 \,/\, \bar x_4 \;=\; \alpha \,/\, \bar x_4 \;=\; \bar\alpha \,\bar{\downarrow}\, x_4 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\tau^1\,\bar\nu_1\,\bar\nu_2)^2\,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \downarrow x_3 \,/\, \bar x_4 \,\bar{\downarrow}\, x_6 \;=\; \beta \,\bar{\downarrow}\, x_6 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\tau_1\,\bar\nu_1\,\bar\nu_2)^1\,\bar\nu_4\,\rangle\rangle;$$

$$\alpha \;=\; x_1 \,\bar{/}\, x_3 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\nu_1\,\bar\tau^1)^3\,\rangle\rangle,$$
$$\beta \;=\; x_1 \,\bar{/}\, x_3 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_4 \;=\; \alpha \,\bar{\downarrow}\, \bar x_4 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\nu_2\,\nu_1\,\bar\tau^1)^2\,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\bar{/}\, x_3 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_4 \,/\, x_6 \;=\; \beta \,/\, x_6 \;=\; \bar\beta \,\bar{\downarrow}\, \bar x_6 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,\bar\nu_4\,(\nu_2\,\bar\nu_1\,\tau^1)^1\,\rangle\rangle;$$

$$\alpha \;=\; x_1 \,\oplus\, x_3 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\tau^1\,\tau^1)^3\,\rangle\rangle,$$
$$\beta \;=\; x_1 \,\oplus\, x_3 \,\bar{/}\, \bar x_4 \;=\; \alpha \,\bar{/}\, \bar x_4 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\tau^1\,\tau^1\,\nu_2)^2\,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\oplus\, x_3 \,\bar{/}\, \bar x_4 \,\bar\oplus\, x_6 \;=\; \beta \,\bar\oplus\, x_6 \;=\; \beta \,\oplus\, \bar x_6 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\tau^1\,\bar\tau^1\,\bar\nu_2)^1\,(\bar\tau^1\,\tau^1\,\nu_2)^1\,\rangle\rangle.$$

3.5.4 σ–операторы задачи ВЫП.

Как уже указывалось в **3.4.1**, в *задачах* **ВЫП** всегда имеем дело с конъюнкцией дизъюнктов. Для представления дизъюнктов σ–операторами можно воспользоваться *теоремой* **17** и *замечанием* **12**. Пример такого σ–оператора дизъюнкта **(3.95)** мы уже строили. А теперь построим σ–операторы всех дизъюнктов форм $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$ из **3.4.1**.

Дизъюнкты задачи $f_1(X_5)$ имеют σ–операторы:

$$\bar x_1 \,\bar{\downarrow}\, x_2 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\tau\,\bar\nu)^3\,\rangle\rangle,$$
$$\bar x_1 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_2 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\nu\,\tau)^3\,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_2 \,\bar{\downarrow}\, x_4 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,((\bar\nu\,\bar\tau)^1\,\bar\nu_2)^1\,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\bar{\downarrow}\, x_2 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_3 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,(\bar\nu_1\,\bar\tau\,\bar\nu)^2\,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_2 \,\bar{\downarrow}\, \bar x_5 \;\overset{\sim}{\to}\; \langle\langle\,\bar\nu_3\,(\bar\nu\,\bar\tau)^2\,\rangle\rangle,$$

$$x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_5 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, \bar{\nu}_2\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^1\, \bar{\nu}_3 \,\rangle\rangle,$$
$$x_2 \bar{\downarrow} x_3 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\tau}_1\, \bar{\nu}_1)^2 \,\rangle\rangle.$$

Дизъюнкты задачи $f_2(X_7)$ имеют σ–операторы:

$$x_1 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} x_6 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, ((\bar{\nu}_2\, \bar{\tau}^1\, \bar{\nu}_1)^1\, \bar{\nu}_4)^1 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \bar{\downarrow} \bar{x}_2 \bar{\downarrow} x_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_3\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau}\, \bar{\nu}_1)^1)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$x_4 \bar{\downarrow} x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} \bar{x}_7 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, \bar{\nu}_5\, \bar{\nu}_4\, \bar{\tau}_3\, \bar{\nu}_3 \,\rangle\rangle,$$
$$x_1 \bar{\downarrow} x_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_5 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_3\, \bar{\tau}^2\, \bar{\nu}_2)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$\bar{x}_2 \bar{\downarrow} \bar{x}_3 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, (\bar{\nu}_1\, \tau_1)^2\, \bar{\nu}_4\, \bar{\nu}_5 \,\rangle\rangle,$$
$$\bar{x}_3 \bar{\downarrow} \bar{x}_4 \bar{\downarrow} \bar{x}_7 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, \bar{\nu}_5\, (\bar{\nu}_2\, \tau_2)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$\bar{x}_5 \bar{\downarrow} x_6 \bar{\downarrow} x_7 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, \tau_4\, \bar{\nu}_4\, \bar{\nu}_5 \,\rangle\rangle,$$
$$x_5 \bar{\downarrow} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} x_7 \stackrel{\sim}{\to} \langle\langle\, \bar{\nu}^4\, \bar{\tau}_4\, \bar{\nu}_5 \,\rangle\rangle.$$

Замечание 13. Сравнивая *первый* σ–оператор *первого* дизъюнкта задачи $f_2(X_7)$ с σ–оператором дизъюнкта **(3.95)**, видим, что эти операторы не совпадают, хотя дизъюнкты совпадают. Это нас не должно смущать, так как σ–оператор дизъюнкта **(3.95)** строился из условия: $n = 6$, в то время, как в задаче $f_2(X_7)$ число переменных $n = 7$.

Замечание 14. Поскольку задачи в этих примерах имеют достаточно простые σ–операторы для своих дизъюнктов, то не представляет особого труда найти конъюнкцию над всеми σ–операторами дизъюнктов в каждой из этих задач.

В подтверждение этого *замечания* найдём конъюнкции σ–операторов задачи $f_1(X_5)$:

$$\langle\langle\, (\tau\, \bar{\nu})^3 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, (\bar{\nu}\, \tau)^3 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\tau\, \tau)^3 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau^4 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, ((\bar{\nu}\, \bar{\tau})^1\, \bar{\nu}_2)^1 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \tau^4 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, ((\tau\, \nu)^1\, \tau^2)^1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, (\bar{\nu}_1\, \bar{\tau}\, \bar{\nu})^2 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, (\bar{\tau}_1\, \bar{\nu}_1)^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\bar{\tau}_1\, \bar{\tau}\, \nu)^2 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, ((\tau\, \nu)^1\, \tau^2)^1 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, (\bar{\tau}_1\, \bar{\tau}\, \nu)^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\nu_2\, \nu\, \tau\, \nu_1)^1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, (\bar{\nu}_3\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^2 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\nu}_2\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^1\, \bar{\nu}_3 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \bar{\nu}_2\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^1\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^2 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, (\nu_2\, \nu\, \tau\, \nu_1)^1 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\nu}_2\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^1\, (\bar{\nu}\, \bar{\tau})^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \nu_4 \,\rangle\rangle.$$

Результат $\langle\langle\, \nu_4 \,\rangle\rangle$ говорит о том, что форма $f_1(X_5)$ — противоречива.

Замечание 15. Не следует думать, что каждый раз нужно находить конъюнкцию всех операторов задачи, чтобы распознать выполнимость. На самом деле, для распознавания выполнимости в исследуемой задаче достаточно выполнить последовательно конъюнкцию над *"началами"* некоторых операторов (подвекторами порядка $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$), причём тех, которые не равны тождественно $\langle\langle\, \bar{\nu}_k \,\rangle\rangle$.

Например, в задаче $f_2(X_7)$ достаточно остановиться лишь на начале *пятого* оператора

$$\langle\langle\, \bar{\nu}_1\, \tau_1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \bar{\nu}_1\, \bar{\nu}\, \nu \,\rangle\rangle,$$

чтобы понять, что следующие *шесть* наборов:

$$x_1\, x_2\, 0\,0\,0\,0\,0, \quad x_1\, 0\,1\,0\,0\,0\,0$$

являются выполняющими для формы $f_2(X_7)$.

К вопросу о распознавании выполнимости и построении выполняющих наборов (в случае выполнимости) мы ещё вернёмся, когда будем изучать проблему выполнимости, а теперь сформулируем (в виде общего правила) метод построения σ–операторов для дизъюнктов заданной формы.

Общее правило построения σ–оператора заданного дизъюнкта. Если индексы переменных в дизъюнкте подчинены неравенству **(3.94)**, то следует построить следующие *две* строки номеров:

$$r-j-1,\;\; m-r-1,\;\; \ldots\;\;,\; w-v-1,\;\; n-w; \tag{3.96}$$

$$j-1,\;\; r-2,\;\; m-2,\;\; \ldots\;\;,\; v-2,\;\; w-2,\;\; n-2, \tag{3.97}$$

которые определяют верхние **(3.96)** и нижние **(3.97)** индексы в подвекторах. Начальные подвектора строятся по переменной x_j или $\bar{x}_j$:

$$x_j \;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle\langle\, \bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1} \,\rangle\rangle, \qquad \bar{x}_j \;\overset{\sim}{\rightarrow}\; \langle\langle\, \tau_{j-1}^{r-j-1} \,\rangle\rangle. \tag{3.98}$$

Затем, к вектору **(3.98)** приписывается вектор $\bar{\nu}_{r-2}$ слева или справа в зависимости от того, какая из переменных $\bar{x}_r$ или x_r дизъюнктивно присоединяется к предыдущей переменной, и построенное выражение получает верхний индекс $m-r-1$ (когда $m-r-1=0$, — скобки опускаются), то есть имеем:

$$\left.\begin{array}{ll} x_j \bar{\downarrow} x_r \simeq \langle\langle (\bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1} \bar{\nu}_{r-2})^{m-r-1} \rangle\rangle, & x_j \bar{\downarrow} \bar{x}_r \simeq \langle\langle (\bar{\nu}_{r-2} \bar{\tau}_{j-1}^{r-j-1})^{m-r-1} \rangle\rangle, \\ \bar{x}_j \bar{\downarrow} x_r \simeq \langle\langle (\tau_{j-1}^{r-j-1} \bar{\nu}_{r-2})^{m-r-1} \rangle\rangle, & \bar{x}_j \bar{\downarrow} \bar{x}_r \simeq \langle\langle (\bar{\nu}_{r-2} \tau_{j-1}^{r-j-1})^{m-r-1} \rangle\rangle. \end{array}\right\} \quad (3.99)$$

Далее, *правые* части **(3.99)** играют роль векторов *правых* частей **(3.98)**, что означает аналогичную необходимость приписывания к ним вектора $\bar{\nu}_{m-2}$ слева или справа (с занесением верхнего индекса у построенного выражения) и *так далее*. Весь этот процесс длится до тех пор, пока не будут подряд исчерпаны все номера из **(3.96)** и **(3.97)**.

Результат работы по сформулированному правилу можно увидеть выше, где представлены примеры построения σ–операторов для дизъюнктов задач $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$.

3.5.5 Табличное представление σ–операторов задачи ВЫП.

В табличном представлении *задачи* **ВЫП** для каждого σ–оператора дизъюнкта отводится по одной строке, в которой записываются: номер первого *нулевого* (со всеми нулевыми координатами) сегмента, порядки приращений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ этого сегмента и порядки $p_1, p_2, p_3, \ldots$ числа периодов.

В нумерации сегментов мы исходим из того, что σ–оператор — это вектор порядка n, а под сегментом понимаем некоторый подвектор порядка k, где $0 \leq k \leq n-1$, при этом сами сегменты получаются в результате деления исходного вектора (σ–оператора) на равные части

Таблица 5

1	2	3	4	5	Δ_1	p_1	Δ_2	p_2
$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	2	3		
$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	2	3		
θ	$\bar\theta$	θ	θ	θ	2	1	4	1
θ	θ	$\bar\theta$	θ	θ	3	2		
θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	2	2		
θ	$\bar\theta$	θ	$\bar\theta$	θ	2	1		
	θ	θ	θ	θ	3	2		

Таблица 6

1	2	3	4	5	6	7	Δ_1	p_1	Δ_2	p_2	Δ_3	p_3
θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	θ	θ	1	1	4	1	6	1
θ	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	θ	θ	3	1	5	2		
			θ	θ	$\bar\theta$	$\bar\theta$						
θ	θ	θ	θ	$\bar\theta$	θ	θ	1	2	5	2		
	$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	θ	θ	3	2				
		$\bar\theta$	$\bar\theta$	θ	θ	$\bar\theta$	4	2				
				$\bar\theta$	θ	θ						
				θ	$\bar\theta$	θ						

со следующими подряд двоичными координатами, иными словами, каждую половину σ–оператора нумеруем θ и $\bar\theta$ для *первой* и *второй* половин соответственно. Эти половины имеют порядки $n-1$. Каждую из этих половин мы вновь можем поделить поровну и получить *четыре* сегмента порядка $n-2$ с номерами: $\theta\,\theta$, $\bar\theta\,\theta$, $\theta\,\bar\theta$, $\bar\theta\,\bar\theta$ и *так далее*. При этом следует иметь ввиду, что мы строим номер *первого* сегмента, все координаты которого *нулевые*.

Замечание 16. Если в результате построения *первый* нулевой сегмент получает номер с r координатами, то этот сегмент имеет порядок $n-r$.

Теперь, чтобы следить за изложением на конкретных примерах, заметим, что в *таблицах* **5** и **6** представлены таблично задачи $f_1(X_5)$ и $f_2(X_7)$ из **3.5.4**.

В *левой* половине каждой из этих таблиц записаны номера *первых* нулевых сегментов каждого σ–оператора соответствующего дизъюнкта. По этому номеру мы можем судить о порядке сегмента (он совпадает с числом *пустых* клеток) и о самом сегменте (о номерах его *нулевых* координат). Например, в *таблице* **5** все номера, кроме *последнего*, являются номерами сегментов *нулевого* порядка (сегмент *нулевого* порядка — это сегмент–строка). *Последний* номер *таблицы* **5** означает, что это номер сегмента *первого* порядка, то есть сегмента из *двух* строк с номерами:

$$\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta,$$
$$\bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta.$$

Третий номер в *таблице* **7** означает, что это номер сегмента *третьего* порядка, то есть сегмента из *восьми* строк с номерами

$$\begin{gathered}
\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta,\\
\bar\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta.
\end{gathered}$$

Выяснив, что означают номера, ещё уточним метод их построения, который следует из самого их определения. В записи каждого σ–оператора дизъюнкта содержится *один* раз τ или $\bar\tau$, быть может, с индексами. Разделяя исходный вектор на две равные части, мы определяем: содержится ли в *первой* (*левой*) части подвектор τ или $\bar{\tau}$?

Если **да**, то это означает, что в строящемся номере заносим θ (новые θ или $\bar{\theta}$ всегда приписываются слева), иначе записываем $\bar{\theta}$. Если ответ на предыдущий вопрос был — **да**, то деление производим над *первым* подвектором, а если был — **нет**, то — над *вторым* и *так далее* продолжаем этот процесс, пока не придём к *нулевому* вектору, означающему конец построения номера.

Предлагается проследить за этим построением по *таблице* **5** и **6**.

Замечание 17. Если в записи некоторого вектора *последним* является некоторый верхний индекс s, то это значит, что в строящемся номере будет записано справа налево s раз θ, а вектором, подлежащим дальнейшему делению, будет вектор, на который распространяется индекс s.

И, наконец, остановимся на порядке приращения и порядке числа периодов. Поясним это на примерах.

В *таблице* **5**, в *первой* строке, имеем $\Delta_1 = 2$ и $p_1 = 3$. Это значит, что номер в строке будет получать приращение *порядка* **2**, то есть $\theta\,\theta\,\bar{\theta}$, а число таких периодов, считая и *исходный*, будет равно $2^3 = 8$. Значит, *нулевыми* сегментами по *первой* строке *таблицы* **5** являются сегменты с номерами:

$$\begin{aligned}
&\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\theta\,\theta,\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\theta,\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta,\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\theta,\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\theta\,\bar{\theta},\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta},\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta},\\
&\bar{\theta}\,\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}.
\end{aligned}$$

В *таблице* **5**, в *третьей* строке, имеем: $\Delta_1 = 2$, $p_1 = 1$ и $\Delta_2 = 4$, $p_2 = 1$. Это значит, что по *первой* паре (Δ_1 и p_1) имеем номера:

$$\begin{aligned}
&\theta\,\bar{\theta}\,\theta\,\theta\,\theta,\\
&\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\,\theta\,\theta,
\end{aligned}$$

а, учитывая *вторую* пару, имеем ещё номера:

$$\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta,$$
$$\theta\,\bar\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta.$$

Сказанного вполне достаточно, чтобы полностью понять табличное представление σ–операторов *задачи* **ВЫП**.

Глава 4

Логические операции над KFS – операторами

Развиваемая в этой главе теория имеет своё начало в **п.п. 3** и **4** предыдущей главы. Над определёнными там FS – операторами необходимо уметь выполнять преобразования и логические операции из списка **(3.58)** *главы* **III**. Возможности таких действий зависят от выбранной системы продукций. В **п.3** *главы* **III** были введены следующие системы: Q и Q_1 — Q_5, где

$$\begin{aligned}
&Q_3 \subset Q_2 \subset Q_1 \subset Q, \quad Q_4 \subset Q_2, \\
&Q_1 = Q_2 \cup Q_5, \quad Q_2 = Q_3 \cup Q_4, \\
&Q_1 \setminus Q_2 = \{\bar{M}\}, \quad Q \setminus Q_1 = \{M^*, \bar{M}^*\}, \\
&Q_1 \setminus Q_5 = \{T, T^*, \bar{T}, \bar{T}^*\}.
\end{aligned}$$

Операторы, представленные некоторой системой продукций Q_0 (эта система может совпадать с какой-нибудь из перечисленных выше, но это не обязательно), называются KFS – операторами (каноническими FS – операторами) и рекурсивно определяются так:

1. Двухбитовые векторы $\langle\, \nu \,\rangle, \langle\, \tau \,\rangle, \langle\, \bar{\tau} \,\rangle, \langle\, \bar{\nu} \,\rangle$ суть KFS – операторы.

2. Если $\langle\, \alpha_j \,\rangle$ — KFS – оператор и $G \in Q_0$, то $\langle\, \alpha_{j+1} \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \alpha_j \, G \,\rangle$ есть KFS – оператор.

3. Никаких других KFS – операторов в системе продукций Q_0, кроме порождённых применением правил **1** и **2**, нет.

Если не оговорена система продукций, то по умолчанию в этой главе всегда будет подразумеваться система Q. Из системы продукций Q могут выделяться различные подсистемы продукций (примеры таких подсистем представлены выше) и FS – операторы могут представляться продукциями из выбранных подсистем. В таких случаях будем вести рассуждения о KFS – операторах в системе Q_0, где $Q_0 \subset Q$.

4.1 Конъюнкция KFS – операторов в системе Q

Чтобы иметь конъюнкции KFS – операторов в системе Q, будем постепенно получать список равенств вначале в системе Q_2, затем дополним эти равенства списком, который будет списком в системе Q_1 и лишь потом дополним их равенствами в системе Q.

Итак, непосредственными выкладками можно убедиться в справедливости нижеследующих формул в системе Q_2:

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{/} \langle \beta_j T \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \tag{4.1}$$

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{/} \langle \beta_j M \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \tag{4.2}$$

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{T} \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \tag{4.3}$$

$$\langle \alpha_j T \rangle \bar{/} \langle \beta_j T \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) T \rangle, \tag{4.4}$$

$$\langle \alpha_j M \rangle \bar{/} \langle \beta_j M \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) M \rangle, \tag{4.5}$$

$$\langle \alpha_j T \rangle \bar{/} \langle \beta_j M \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) T \rangle \bar{/} \langle \beta_j M \rangle, \tag{4.6}$$

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{/} \langle \beta_j T^* \rangle = \langle \alpha_j \bar{T} \rangle, \tag{4.7}$$

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle = \langle \theta \rangle, \tag{4.8}$$

$$\langle \alpha_j T \rangle \bar{/} \langle \beta_j T^* \rangle = \langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle. \tag{4.9}$$

Если теперь дополнить систему равенств **(4.1)** — **(4.9)** ещё следующими ниже четырьмя равенствами, то получим список равенств в системе Q_1:

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{M} \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \tag{4.10}$$

$$\langle \alpha_j T \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{M} \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) T \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{M} \rangle, \tag{4.11}$$

$$\langle \alpha_j M \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{M} \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) T \rangle \bar{/} \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \bar{\beta}_j \rangle T^* \rangle, \tag{4.12}$$

$$\langle \alpha_j \bar{M} \rangle \bar{/} \langle \beta_j \bar{M} \rangle = \langle (\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle) T \rangle \bar{/} \langle (\langle \bar{\alpha}_j \rangle \bar{/} \langle \bar{\beta}_j \rangle T^* \rangle. \tag{4.13}$$

Замечание 1. Когда утверждаем, что в системе Q_2 справедливы равенства **(4.1)** – **(4.9)** над KFS – операторами, то подразумеваем, что $\langle \alpha_j \rangle$ и $\langle \beta_j \rangle$ суть KFS – операторы в системе Q_2, но уже когда идёт речь о равенствах **(4.1)** – **(4.13)** в системе Q_1, то по умолчанию предполагается, что $\langle\,\alpha_j\,\rangle$ и $\langle\,\beta_j\,\rangle$ являются KFS – операторы в системе Q_1. Этой позиции будем придерживаться и впредь, если только не оговорено обратное.

Хотя введённые определениями **(3.52)** *главы* **III** продукции M^* и $\bar{M}^*$ имеют вспомогательный характер, поскольку не используются для представления юнктов, тем не менее в системе Q равенства **(4.1)** – **(4.13)** должны быть пополнены следующими равенствами над KFS – операторами:

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle, \tag{4.14}$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle, \tag{4.15}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M^*\,\rangle, \tag{4.16}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle, \tag{4.17}$$

$$\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j^*\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle, \tag{4.18}$$

$$\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j^*\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle, \tag{4.19}$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{M}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,(\,\langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j^*\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle, \tag{4.20}$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{M}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,(\,\langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j^*\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle, \tag{4.21}$$

$$\langle\,\alpha_j\,M^*\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,(\,\langle\,\alpha_j^*\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j^*\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle. \tag{4.22}$$

Замечание 2. Равенствам **(4.6)**, **(4.11)**, **(4.16)** и **(4.17)** можно придать и такой вид:

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,T^*\,\rangle, \tag{4.23}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j\,T^*\,\rangle, \tag{4.24}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j^*\,T^*\,\rangle, \tag{4.25}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j^*\,T^*\,\rangle. \tag{4.26}$$

Принцип сопряжения равенства. Если в операторах равенства заменить самые правые продукции T и $\bar{T}$ соответственно на T^* и $\bar{T}^*$ (и наоборот: T^* и $\bar{T}^*$ на T и $\bar{T}$), а для подоператоров, предшествующих продукциям $\bar{M}$, M^*, $\bar{M}^*$ выполнить соответственно *инвертирование*, *сопряжение* и *двойственность*, то вновь получим верные равенства.

Условимся, что если к заданному равенству с *номером* $(\,\lambda\,)$ применён принцип *сопряжения*, то полученное в результате равенство будет иметь *номер* $(\,\lambda^*\,)$. Такой приём позволяет нам ссылаться на равенства, которые не записаны, но которые мы можем получить по имеющимся.

Сам принцип *сопряжения* сформулирован с учётом симметрии в определениях **(3.50)** *главы* **III** и характером определений **(3.51)** **(3.52)** из той же главы.

Легко понять, что почти каждое из равенств **(4.1)** – **(4.26)** порождает новое. Например, равенство **(4.10)** даёт равенство **(4.10*)**:

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T}^* \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{M} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle.$$

Но имеются и такие, которые являются инвариантными. К ним относятся равенства: **(4.5)**, **(4.8)**, **(4.9)**, **(4.12)** и **(4.13)**.

Конъюнкции над KFS – операторами в том случае, когда один из операторов есть $\langle\, \tau_j \,\rangle$ или $\langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle$, представлены в *таблице* **1**.

Таблица 1

$\bar{/}$	$\alpha_j\, T$	$\alpha_j\, T^*$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j\, M$	$\alpha_j\, \bar{M}$	$\alpha_j\, M^*$	$\alpha_j\, \bar{M}^*$
τ_j	$\alpha_j\, \bar{T}$	τ_j	$\alpha_j\, \bar{T}$	ν_j	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}$
$\bar{\tau}_j$	$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	ν_j	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j^*\, \bar{T}^*$	$\bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^*$

Замечание 3. В тех случаях, когда подоператор $\langle\, \beta_j \,\rangle$ равен одному из подоператоров $\langle\, \alpha_j \,\rangle$, $\langle\, \bar{\alpha}_j \,\rangle$, $\langle\, \alpha_j^* \,\rangle$ или $\langle\, \bar{\alpha}_j^* \,\rangle$, равенства **(4.1)** – **(4.26)** приобретают большую свораичваемость.

4.2 Дизъюнкция KFS – операторов в системе Q

Для дизъюнкции KFS – операторов примем не только ту же методику изложения, что и для конъюнкции, но и аналогичную последовательность равенств (а что это значит, будет пояснено ниже). Также непосредственными выкладками можно убедиться в справедливости нижеследующих равенств для KFS – операторов в системе Q_2:

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\, \beta_j\, \bar{T} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \,\bar{\downarrow}\, \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, T \,\rangle, \tag{4.27}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, T \,\rangle, \tag{4.28}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, T \,\rangle, \tag{4.29}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{T} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle, \tag{4.30}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, M \,\rangle, \tag{4.31}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M \,\rangle, \tag{4.32}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{T}^* \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle, \tag{4.33}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\theta} \,\rangle, \tag{4.34}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{T}^* \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{/} \langle\, \beta_j\, T^* \,\rangle. \tag{4.35}$$

Дополнив систему равенств **(4.27)** – **(4.35)** ещё следующими ниже четырьмя равенствами, получим список равенств в системе Q_1:

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, T \,\rangle, \tag{4.36}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M} \,\rangle, \tag{4.37}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle, \tag{4.38}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{M} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M} \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \bar{\alpha}_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle. \tag{4.39}$$

В системе Q равенства **(4.27)** – **(4.39)** должны быть пополнены следующими равенствами над KFS – операторами:

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, T \,\rangle, \tag{4.40}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, T \,\rangle, \tag{4.41}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M^* \,\rangle, \tag{4.42}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle, \tag{4.43}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j^* \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle, \tag{4.44}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j^* \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle, \tag{4.45}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{M} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \bar{\alpha}_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j^* \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle, \tag{4.46}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{M} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \bar{\alpha}_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j^* \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle, \tag{4.47}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M^* \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, (\,\langle\, \alpha_j^* \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j^* \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle. \tag{4.48}$$

Замечание 4. Равенствам **(4.32)**, **(4.37)**, **(4.42)** и **(4.43)** можно придать и такой вид:

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M\,\rangle \;=\; \langle\, (\,(\,\langle\, \alpha_j\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \tag{4.49}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}\,\rangle \;=\; \langle\, (\,(\,\langle\, \alpha_j\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \tag{4.50}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M^*\,\rangle \;=\; \langle\, (\,(\,\langle\, \alpha_j\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j^*\, \bar{T}^*\,\rangle, \tag{4.51}$$

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, \bar{M}^*\,\rangle \;=\; \langle\, (\,(\,\langle\, \alpha_j\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j^*\, \bar{T}^*\,\rangle. \tag{4.52}$$

Замечание 5. Равенства **(4.27)** – **(4.52)** соответствуют равенствам **(4.1)** – **(4.26)** и наоборот (это и есть аналогичная последовательность, о которой шла речь выше), что означает: по одному из равенств $(\,p\,) \in \{\,(1), (2), \ldots, (26)\,\}$ можно получить равенство $(\,q\,) \in \{\,(27), (28), \ldots, (54)\,\}$, где $q = p + 26$ в результате выполнения замен: $\bar{T} \leftrightarrow T$, $\bar{T}^* \leftrightarrow T^*$, $\bar{/} \leftrightarrow \bar{\downarrow}$, $\theta \leftrightarrow \bar{\theta}$. В этом смысле равенства для дизъюнкций могут рассматриваться как инвертированные равенства для конъюнкций и наоборот.

Теперь обращаем внимание на то, что *замечание* **1** сохраняет свою силу и для дизъюнкций.

Замечание 6. Список равенств **(4.27)** – **(4.52)** для дизъюнкций может быть пополнен равенствами **(4.27*)** – **(4.52*)** в результате применения принципа сопряжения равенства. Поэтому ссылка на равенство (λ^*), где λ — один из номеров **(4.27)** – **(4.52)**, — это ссылка на реальное равенство.

В подтверждение *замечания* **6** можем увидеть, что ссылка на равенство **(4.36*)** и **(4.43*)** означает соответственно равенство:

$$\langle\, \alpha_j\, T^*\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{M}\,\rangle \,=\, \langle\, (\,(\,\langle\, \alpha_j\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle,$$

и

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j^*\, M^*\,\rangle \,=\, \langle\, (\,(\,\langle\, \alpha_j\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}^*\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j^*\, M^*\,\rangle.$$

Обращаем внимание, что и здесь, как и для конъюнкций имеются инвариантные равенства. К ним относятся равенства: **(4.31)**, **(4.34)**, **(4.35)**, **(4.38)** и **(4.39)**. Более того, равенства **(4.9)** и **(4.35)** — это одно и то же равенство.

Дизъюнкции над KFS – операторами в том случае, когда один из операторов есть $\langle\, \tau_j\,\rangle$ или $\langle\, \bar{\tau}_j\,\rangle$, представлены в *таблице* **2**.

Таблица 2

$\bar{\downarrow}$	$\alpha_j\,\bar{T}$	$\alpha_j\,\bar{T}^*$	$\alpha_j\,T$	$\alpha_j\,T^*$	$\alpha_j\,M$	$\alpha_j\,\bar{M}$	$\alpha_j\,M^*$	$\alpha_j\,\bar{M}^*$
$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j\,T$	$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j\,T$	$\bar{\nu}_j$	$\alpha_j\,T$	$\alpha_j\,T$	$\alpha_j\,T$	$\alpha_j\,T$
τ_j	τ_j	$\alpha_j\,T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\alpha_j\,T^*$	$\alpha_j\,T^*$	$\bar{\alpha}_j\,T^*$	$\alpha_j^*\,T^*$	$\bar{\alpha}_j^*\,T^*$

4.3 Операции / и ↓ над KFS–операторами в системе Q

Из инвертированно–сопряжённой четвёрки бинарных операций (см. **(3.88)** *главы* **III**) рассмотрены **две**: *конъюнкция* и *дизъюнкция*. Поскольку *конъюнкция* есть *отрицание* / (штриха Шеффера), а *дизъюнкция* есть *отрицание* ↓ (стрелки Пирса), то для полноты картины остановимся именно на этих *двух* операциях и посмотрим, как будут выглядеть равенства для KFS – операторов.

Сразу ясно, что можно не выписывать новых равенств, можно обойтись равенствами **(4.1)** – **(4.52)** и **(4.1*)** – **(4.52*)**, хотя в принципе новые равенства появляются, но эти равенства суть $(\overline{4.1})$ – $(\overline{4.26})$ и $(\overline{4.1^*})$ – $(\overline{4.26^*})$ для / и $(\overline{4.27})$ – $(\overline{4.52})$ и $(\overline{4.27^*})$ – $(\overline{4.52^*})$ для ↓. Остаётся пояснить, каков смысл *отрицания*.

Отрицание над номером равенства означает, что в левой части равенства инвертируется только знак операции (но поскольку операция входит со знаком инвертирования, то знак инвертирования снимается), а в правой части равенства производится инвертирование результата. Последнее означает, что если в правой части имеется один оператор, то он инвертируется (см. *теоремы* **11** и **12** из *главы* **III**), а если в правой части имеются два оператора, соединённые знаком операции, то производится лишь инвертирование этой операции.

Иллюстрацией к сказанному являются примеры $(\overline{4.1})$, $(\overline{4.1^*})$, $(\overline{4.11})$, $(\overline{4.11^*})$, $(\overline{4.28})$, $(\overline{4.28^*})$, $(\overline{4.43})$, $(\overline{4.43^*})$, получающие соответственно вид:

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\,/\,\langle\,\beta_j\,T\,\rangle \;=\; \langle\,(\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,/\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,)\,T\,\rangle,$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*\,\rangle\,/\,\langle\,\beta_j\,T^*\,\rangle \;=\; \langle\,(\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,/\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,)\,T^*\,\rangle,$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,/\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}\,\rangle \;=\; \langle\,(\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,)\,T\,\rangle\,/\,\langle\,\beta_j\,\bar{M}\,\rangle,$$

$$\langle\,\alpha_j\,T^*\,\rangle\,/\,\langle\,\bar{\beta}_j\,\bar{M}\,\rangle \;=\; \langle\,(\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,)\,T^*\,\rangle\,/\,\langle\,\bar{\beta}_j\,\bar{M}\,\rangle,$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,\downarrow\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle \;=\; \langle\,(\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\downarrow\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,)\,\bar{T}\,\rangle,$$

$$
\begin{aligned}
\langle\, \alpha_j\, T^* \,\rangle \downarrow \langle\, \beta_j\, M \,\rangle &= \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \downarrow \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle, \\
\langle\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \downarrow \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle \downarrow \langle\, \beta_j\, \bar{M}^* \,\rangle, \\
\langle\, \alpha_j\, \bar{T}^* \,\rangle \downarrow \langle\, \bar{\beta}_j^*\, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle \downarrow \langle\, \bar{\beta}_j^*\, \bar{M}^* \,\rangle.
\end{aligned}
$$

Замечание 7. Поскольку в изложении имелось соответствие равенств, то $(\overline{4.1})$ – $(\overline{4.9})$, $(\overline{4.1^*})$ – $(\overline{4.9^*})$, $(\overline{4.23})$, $(\overline{4.23^*})$, $(\overline{4.27})$ – $(\overline{4.35})$, $(\overline{4.27^*})$ – $(\overline{4.35^*})$, $(\overline{4.49})$, $(\overline{4.49^*})$ суть равенства в системе Q_2; $(\overline{4.1})$ – $(\overline{4.13})$, $(\overline{4.1^*})$ – $(\overline{4.13^*})$, $(\overline{4.24})$, $(\overline{4.24^*})$, $(\overline{4.27})$ – $(\overline{4.39})$, $(\overline{4.27^*})$ – $(\overline{4.39^*})$, $(\overline{4.50})$, $(\overline{4.50^*})$ — равенства в системе Q_1; $(\overline{4.1})$ – $(\overline{4.22})$, $(\overline{4.1^*})$ – $(\overline{4.22^*})$, $(\overline{4.25})$, $(\overline{4.26})$, $(\overline{4.25^*})$, $(\overline{4.26^*})$, $(\overline{4.27})$ – $(\overline{4.48})$, $(\overline{4.27^*})$ – $(\overline{4.48^*})$, $(\overline{4.51})$, $(\overline{4.52})$, $(\overline{4.51^*})$, $(\overline{4.52^*})$ — равенства в системе Q.

Операции $/$ и $\downarrow$ над KFS – операторами в том случае, когда один из операторов есть $\langle\, \tau_j \,\rangle$ или $\langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle$, представлены в *таблицах* **3** и **4**. Обратим внимание, что результаты *таблиц* **3** и **4** суть инвертированные результаты *таблиц* **1** и **2** соответственно.

Таблица 3

$/$	$\alpha_j\, T$	$\alpha_j\, T^*$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j\, M$	$\alpha_j\, \bar{M}$	$\alpha_j\, M^*$	$\alpha_j\, \bar{M}^*$
τ_j	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\tau}_j$	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\alpha}_j\, T$
$\bar{\tau}_j$	τ_j	$\bar{\alpha}_j\, T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\alpha}_j\, T^*$	$\bar{\alpha}_j\, T^*$	$\alpha_j\, T^*$	$\bar{\alpha}_j^*\, T^*$	$\alpha_j^*\, T^*$

Таблица 4

$\downarrow$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j\, T$	$\alpha_j\, T^*$	$\alpha_j\, M$	$\alpha_j\, \bar{M}$	$\alpha_j\, M^*$	$\alpha_j\, \bar{M}^*$
$\bar{\tau}_j$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	τ_j	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	ν_j	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$
τ_j	$\bar{\tau}_j$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	ν_j	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\alpha}_j^*\, \bar{T}^*$	$\alpha_j^*\, \bar{T}^*$

Замечание 8. В свете сказанного выше полезно сравнить *таблицы* **3** и **4**, а также *таблицы* **1** и **2**. При этом легко заметить, что на самом деле можно вообще обойтись одной из *таблиц* **1** – **4**.

4.4 Продукционная структура KFS – операторов

Бинарные операции инвертированно–сопряжённой четвёрки $\{\bar{/}, \bar{\downarrow}, /, \downarrow\}$ над KFS – операторами, рассмотренными выше, имеют тот недостаток, что под $\langle\, \alpha_j \,\rangle$ и $\langle\, \beta_j \,\rangle$ подразумеваются KFS – подоператоры, но структура этих подоператоров неопределена, а это является препятствием к свёртыванию. Поэтому, используя результаты **п.5** *главы* **I** и **п.3** *главы* **III**, формулируем соответствующие заключения, позволяющие судить о структуре KFS – подоператоров. Но вначале условимся называть две продукции A и B тождественными по применению к подоператору $\langle\, \alpha_j \,\rangle$, если $\langle\, \alpha_j\, A \,\rangle = \langle\, \alpha_j\, B \,\rangle$. И тогда верна

Лемма 1. Продукции M и $\bar{M}^*$ и продукции $\bar{M}$ и M^* тождественны по отношению к самодвойственному подоператору $\langle\, p_j \,\rangle$ и самосопряжённому подоператору $\langle\, q_j \,\rangle$ соответственно, то есть

$$\langle\, p_j\, M \,\rangle = \langle\, p_j\, \bar{M}^* \,\rangle, \quad \langle\, q_j\, \bar{M} \,\rangle = \langle\, q_j\, M^* \,\rangle. \tag{4.53}$$

Доказательство. В самом деле:

$$\langle\, p_j\, M \,\rangle = \langle\, p_j\, p_j \,\rangle \;=\; \langle\, p_j\, \bar{p}_j^* \,\rangle = \langle\, p_j\, \bar{M}^* \,\rangle,$$

$$\langle\, q_j\, M \,\rangle = \langle\, q_j\, q_j \,\rangle \;=\; \langle\, q_j\, q_j^* \,\rangle = \langle\, q_j\, M^* \,\rangle.$$

В тех случаях, когда в записях операторов имеется тождественность продукций: $M \equiv \bar{M}^*$ или $\bar{M} \equiv M^*$ будем отдавать приоритет в записях продукциям M и $\bar{M}$ соответственно.

Теорема 1. Если в записи оператора, начинающегося с τ_i или $\bar{\tau}_i$, имеем лишь продукции M и $\bar{M}$ (тождественные продукции не исключаются, но считаются замещёнными приоритетными), то в тех случаях, когда число продукций $\bar{M}$–нечётное, оператор является самосопряжённым, а когда – чётное, то оператор является самодвойственным.

Доказательство. Верность *теоремы* для случая, когда в записи оператора имеется всего одна продукция — это прямое следствие *теоремы* **3** из *главы* **I**, поскольку $\langle\, \tau_i \,\rangle$ и $\langle\, \bar{\tau}_i \,\rangle$ составляют **СДП**, то $\langle\, \tau_i\, M \,\rangle$ и $\langle\, \bar{\tau}_i\, M \,\rangle$ дают **СДП**, а $\langle\, \tau_i\, \bar{M} \,\rangle$ и $\langle\, \bar{\tau}_i\, \bar{M} \,\rangle$ дают **ССП**. Теперь допустим, что *теорема* верна для случая, когда в записи оператора имеется k продукций M и $\bar{M}$, то есть, когда среди этих k продукций $\bar{M}$ имеет нечётное вхождение, то имеем самосопряжённый оператор $\langle\, q \,\rangle$, а когда $\bar{M}$ имеет чётное вхождение, то имеем самодвойственный оператор $\langle\, p \,\rangle$.

Рассмотрим теперь переход к оператору для случая, когда в записи оператора имеется $(k+1)$ продукции M и $\bar{M}$, то есть это означает, что необходимо рассматривать операторы

$$\langle\, p\, M \,\rangle, \quad \langle\, q\, \bar{M} \,\rangle \tag{4.54}$$

и

$$\langle\, p\, \bar{M} \,\rangle, \quad \langle\, q\, M \,\rangle. \tag{4.55}$$

В операторах **(4.54)** продукция $\bar{M}$ входит чётное число раз, а в операторах **(4.55)** продукция $\bar{M}$ входит нечётное число раз. А по *теореме* **3** (*определение* **(4.69)**) и *теореме* **4** (*определение* **(4.72)**) заключаем, что операторы **(4.54)** – самодвойственны; по той же *теореме* **3** (*определение* **(4.70)**) и *теореме* **4** (*определение* **(4.71)**) заключаем, что операторы **(4.55)** – самосопряжены, при этом в ссылках на теоремы имелась ввиду *глава* **I**.

Теорема 2. Если $\langle\, p_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{p}_j \,\rangle$ — пара самодвойственных операторов, а $\langle\, q_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{q}_j \,\rangle$ — пара самосопряжённых операторов, то каждый из операторов

$$\langle\, p_j\, \bar{T}^* \,\rangle, \ \langle\, \bar{p}_j\, \bar{T}^* \,\rangle, \ \langle\, q_j\, \bar{T}^* \,\rangle, \ \langle\, \bar{q}_j\, \bar{T}^* \,\rangle \tag{4.56}$$

является начальным каноническим оператором в четвёрке операторов.

Доказательство. Верность теоремы становится очевидной как только обнаруживается, что это просто другая форма записи *теоремы* **6** из *главы* **I**.

Для дальнейшего полезно иметь ввиду *таблицу* **5**, которая является другой формой записи *таблицы* **11** из *главы* **I**.

Таблица 5

d_{j+1}	d^*_{j+1}	$\bar{d}_{j+1}$	$\bar{d}^*_{j+1}$	g_{j+1}	$\bar{g}_{j+1}$
$p_j\, \bar{T}^*$	$\bar{p}_j\, \bar{T}$	$\bar{p}_j\, T^*$	$p_j\, T$	$p_j\, \bar{M}$	$\bar{p}_j\, \bar{M}$
$\bar{p}_j\, \bar{T}^*$	$p_j\, \bar{T}$	$p_j\, T^*$	$\bar{p}_j\, T$	$\bar{p}_j\, \bar{M}$	$p_j\, \bar{M}$
$g_j\, \bar{T}^*$	$q_j\, \bar{T}$	$\bar{g}_j\, T^*$	$\bar{g}_j\, T$	$\bar{g}_j\, M$	$g_j\, M$
$\bar{g}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{g}_j\, \bar{T}$	$g_j\, T^*$	$g_j\, T$	$g_j\, M$	$\bar{g}_j\, M$

Теорема 3. Если $\langle\, d_j \,\rangle, \langle\, d_j^* \,\rangle, \langle\, \bar{d}_j \,\rangle, \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle$ — каноническая четвёрка операторов, то

$$\langle\, d_j\, \bar{T}^* \,\rangle,\;\; \langle\, d_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j\, \bar{T}^* \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j^*\, \bar{T}^* \,\rangle, \tag{4.57}$$

являются начальными каноническими операторами.

Таблица 6

d_{j+1}	d_{j+1}^*	$\bar{d}_{j+1}$	$\bar{d}_{j+1}^*$	g_{j+1}	$\bar{g}_{j+1}$
$d_j\, \bar{T}^*$	$d_j^*\, \bar{T}$	$\bar{d}_j\, T^*$	$\bar{d}_j^*\, T$	$\bar{d}_j^*\, M^*$	$d_j^*\, M^*$
$d_j^*\, \bar{T}^*$	$d_j\, \bar{T}$	$\bar{d}_j^*\, T^*$	$\bar{d}_j\, T$	$\bar{d}_j\, M^*$	$d_j\, M^*$
$\bar{d}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{d}_j^*\, \bar{T}$	$d_j\, T^*$	$d_j^*\, T$	$d_j^*\, M^*$	$\bar{d}_j^*\, M^*$
$\bar{d}_j^*\, \bar{T}^*$	$\bar{d}_j\, \bar{T}$	$d_j^*\, T^*$	$d_j\, T$	$d_j\, M^*$	$\bar{d}_j\, M^*$

Доказательство. Эта теорема верна, так как она является другой формой записи *теоремы* **7** из *главы* **I**.

Лемма 2. Если $\langle\, d_j \,\rangle, \langle\, d_j^* \,\rangle, \langle\, \bar{d}_j \,\rangle, \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle$ — каноническая четвёрка операторов, то каждый из операторов

$$\langle\, d_j\, M^* \,\rangle,\;\; \langle\, d_j^*\, M^* \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j\, M^* \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j^*\, M^* \,\rangle \tag{4.58}$$

является самосопряжённым оператором, а каждый из операторов

$$\langle\, d_j\, \bar{M}^* \,\rangle,\;\; \langle\, d_j^*\, \bar{M}^* \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j\, \bar{M}^* \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j^*\, \bar{M}^* \,\rangle, \tag{4.59}$$

является самодвойственным оператором.

Доказательство. Верность первой части этой леммы является прямым следствием *леммы* **1** из *главы* **I**, а верность второй части этой леммы является прямым следствием *леммы* **2** из *главы* **I**.

Лемма 3. Если $\langle\, d_j \,\rangle, \langle\, d_j^* \,\rangle, \langle\, \bar{d}_j \,\rangle, \langle\, \bar{d}_j^* \,\rangle$ — каноническая четвёрка операторов, то

$$\langle\, d_j\, M \,\rangle,\;\; \langle\, d_j^*\, M \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j\, M \,\rangle,\;\; \langle\, \bar{d}_j^*\, M \,\rangle \tag{4.60}$$

является аналогичной канонической четвёркой операторов.

Доказательство. Верность этой леммы очевидна, так как утверждение в ней следует из *равенства* **(4.5)**.

Теперь, учитывая определения и выкладки, следующие после *теоремы* **7** из *главы* **I**, рассматриваем составные канонические операторы первого порядка:

$$\langle\, t_{j,1}\,\rangle = \langle\, d_j\,\bar{M}\,\rangle,\ \langle t^*_{j,1}\rangle = \langle \bar{d}^*_j \bar{M}\rangle,\ \langle \bar{t}_{j,1}\rangle = \langle \bar{d}_j \bar{M}\rangle,\ \langle \bar{t}^*_{j,1}\rangle = \langle d^*_j \bar{M}\rangle, \tag{4.61}$$

второго порядка:

$$\langle\, t_{j,2}\,\rangle = \langle\, t_{j,1}\,\bar{M}\,\rangle,\ \langle t^*_{j,2}\rangle = \langle \bar{t}^*_{j,1} \bar{M}\rangle,\ \langle \bar{t}_{j,2}\rangle = \langle \bar{t}_{j,1} \bar{M}\rangle,\ \langle \bar{t}^*_{j,2}\rangle = \langle t^*_{j,1} \bar{M}\rangle, \tag{4.62}$$

и так далее до $(\,r\,+\,1\,)$ – го порядка включительно:

$$\left.\begin{array}{ll} \langle\, t_{j,r+1}\,\rangle \,=\, \langle\, t_{j,r}\,\bar{M}\,\rangle, & \langle\, t^*_{j,r+1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{t}^*_{j,r}\,\bar{M}\,\rangle, \\ \langle\, \bar{t}_{j,r+1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{t}_{j,r}\,\bar{M}\,\rangle, & \langle\, \bar{t}^*_{j,r+1}\,\rangle \,=\, \langle\, t^*_{j,r}\,\bar{M}\,\rangle. \end{array}\right\} \tag{4.63}$$

Выкладки **(1.79)** – **(1.82)** из *главы* **I** позволяют заключить, что

$$\left.\begin{array}{ll} \langle\, t_{j,1}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \bar{t}^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, g_j\,\bar{T}^*\,\rangle, & \langle\, t_{j,1}\,\rangle\,/\,\langle\, \bar{t}^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{g}_j\,T^*\,\rangle, \\ \langle\, t^*_{j,1}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \bar{t}_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, g_j\,\bar{T}\,\rangle, & \langle\, t^*_{j,1}\,\rangle\,/\,\langle\, \bar{t}_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{g}_j\,T\,\rangle. \end{array}\right\} \tag{4.64}$$

$$\langle\, t_{j,1}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, t^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, d_j\,M^*\,\rangle, \qquad \langle\, t_{j,1}\,\rangle\,/\,\langle\, t^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{d}_j\,M^*\,\rangle. \tag{4.65}$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,1}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \bar{t}^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, d^*_j\,M^*\,\rangle, \qquad \langle\, \bar{t}_{j,1}\,\rangle\,/\,\langle\, \bar{t}^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{d}^*_j\,M^*\,\rangle. \tag{4.66}$$

$$\langle\, t_{j,1}\,\rangle \oplus \langle\, \bar{t}^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{g}_j\,M\,\rangle, \qquad \langle\, \bar{t}_{j,1}\,\rangle \oplus \langle\, \bar{t}^*_{j,1}\,\rangle \,=\, \langle\, g_j\,M\,\rangle. \tag{4.67}$$

Выкладки **(1.83)** – **(1.86)** из *главы* **I** позволяют заключить, что

$$\left.\begin{array}{ll} \langle\, t_{j,2}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \bar{t}^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, d_j\,M^*\,M^*_1\,\rangle, & \langle\, t_{j,2}\,\rangle\,/\,\langle\, \bar{t}^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{d}_j\,M^*\,M^*_1\,\rangle, \\ \langle\, t^*_{j,2}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, d^*_j\,M^*\,M^*_1\,\rangle, & \langle\, t^*_{j,2}\,\rangle\,/\,\langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{d}^*_j\,M^*\,M^*_1\,\rangle. \end{array}\right\} \tag{4.68}$$

$$\langle\, t_{j,2}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, t^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, g_j\,\bar{T}^*\,M^*\,\rangle, \qquad \langle\, t_{j,2}\,\rangle\,/\,\langle\, t^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{g}_j\,T^*\,M^*\,\rangle. \tag{4.69}$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \bar{t}^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, g_j\,\bar{T}\,M^*\,\rangle, \qquad \langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle\,/\,\langle\, \bar{t}^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{g}_j\,T\,M^*\,\rangle. \tag{4.70}$$

$$\langle\, t_{j,2}\,\rangle \oplus \langle\, \bar{t}^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, g_j\,M\,M\,\rangle, \qquad \langle\, \bar{t}_{j,2}\,\rangle \oplus \langle\, \bar{t}^*_{j,2}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{g}_j\,M\,M\,\rangle. \tag{4.71}$$

Результаты выкладок **(4.64)** – **(4.71)** позволяют перейти к общему заключению относительно составных канонических операторов нечётного и чётного порядков.

Теорема 4. Если составные канонические операторы $(r\,+\,1)$ – го порядка определены рекурсивными равенствами **(4.63)**, где исходные составные канонические операторы первого порядка определены равенствами **(4.61)**, то для чётного i имеем:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, t_{j,\,i+1}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+1}\,\rangle &= \langle\, g_j\, \bar{T}^{*}\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i}\rangle, \\ \langle\, t^{*}_{j,\,i+1}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}_{j,\,i+1}\,\rangle &= \langle\, g_j\, \bar{T}\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i}\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.72}$$

$$\langle\, t_{j,\,i+1}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, t^{*}_{j,\,i+1}\,\rangle \;=\; \langle\, d_j\, M^{*}\, M^{*}_1\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i-1}\rangle, \tag{4.73}$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,\,i+1}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+1}\,\rangle \;=\; \langle\, d^{*}_j\, M^{*}\, M^{*}_1\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i-1}\rangle, \tag{4.74}$$

$$\langle\, t_{j,\,i+1}\,\rangle \oplus \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+1}\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{g}_j\, \underbrace{M\,\ldots\, M}_{i+1}\rangle; \tag{4.75}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, t_{j,\,i+2}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+2}\,\rangle &= \langle\, d_j\, M^{*}\, M^{*}_1\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i}\rangle, \\ \langle\, t^{*}_{j,\,i+2}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+2}\,\rangle &= \langle\, d^{*}_j\, M^{*}\, M^{*}_1\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i}\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.76}$$

$$\langle\, t_{j,\,i+2}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, t_{j,\,i+2}\,\rangle \;=\; \langle\, g_j\, \bar{T}^{*}\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i+1}\rangle, \tag{4.77}$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,\,i+2}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+2}\,\rangle \;=\; \langle\, g_j\, \bar{T}\, \underbrace{M^{*}\,\ldots\, M^{*}}_{i+1}\rangle, \tag{4.78}$$

$$\langle\, t_{j,\,i+2}\,\rangle \oplus \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+2}\,\rangle \;=\; \langle\, g_j\, \underbrace{M\,\ldots\, M}_{i+2}\rangle. \tag{4.79}$$

Доказательство. Верность этой теоремы доказывается достаточно просто методом математической индукции, хотя и требует достаточно длинную череду выкладок, которых вряд ли можно избежать. Итак, равенства **(4.72)** – **(4.79)** в случае $i = 0$ справедливы, поскольку они совпадают с равенствами **(4.64)** – **(4.71)**. Допустим, что равенства **(4.72)** – **(4.79)** верны до некоторого i, то есть до операторов порядка $i + 1$ и порядка $i + 2$, считая i чётным. Тогда, используя это допущение, покажем, что формулы **(4.72)** – **(4.79)** сохраняют свою справедливость и в случае операторов порядка $(i + 3)$ и $(i + 4)$.

Итак, по **(4.63)** с использованием **(4.77)** и **(4.78)** имеем:

$$\langle\, t_{j,\,i+3}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+3}\,\rangle \;=\; \langle\, t_{j,\,i+2}\, \bar{t}_{j,\,i+2}\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, t^{*}_{j,\,i+2}\, \bar{t}^{*}_{j,\,i+2}\,\rangle \;=$$

$$= \langle\, g_j\, \bar{T}^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1}\, g_j\, \bar{T}\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1} \rangle\, =$$

$$= \langle\, g_j\, \bar{T}^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1}\, M^* \,\rangle\, =\, \langle\, g_j\, \bar{T}^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+2} \rangle,$$

что совпадает с первым равенством из **(4.72)**, когда в нём порядок оператора получает *приращение* **2**. Если применить сопряжение к началу и концу последнего равенства, то получим второе из равенств **(4.72)** для порядка, получившего *приращение* **2**.

По равенствам **(4.63)** с использованием **(4.76)** имеем:

$$\langle\, t_{j,\,i+3} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, t^*_{j,\,i+3} \,\rangle\, =\, \langle\, t_{j,\,i+2}\, \bar{t}_{j,\,i+2} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, \bar{t}^*_{j,\,i+2}\, t^*_{j,\,i+2} \,\rangle\, =$$

$$= \langle\, d_j\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i}\, d_j^*\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i} \rangle = \langle\, d_j\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1} \rangle,$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,\,i+3} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, \bar{t}^*_{j,\,i+3} \,\rangle\, =\, \langle\, \bar{t}_{j,\,i+2}\, t_{j,\,i+2} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, t^*_{j,\,i+2}\, \bar{t}^*_{j,\,i+2} \,\rangle\, =$$

$$= \langle\, d_j^*\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i}\, d_j\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i} \rangle\, =\, \langle\, d_j^*\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1} \rangle.$$

Эти последние два результата совпадают с **(4.73)** и **(4.74)** соответственно, когда в них порядок оператора получает *приращение* **2**.

По равенствам **(4.63)** с использованием **(4.79)** имеем:

$$\langle\, t_{j,\,i+3} \,\rangle\, \oplus\, \langle\, \bar{t}^*_{j,\,i+3} \,\rangle\, =\, \langle\, t_{j,\,i+2}\, \bar{t}_{j,\,i+2} \,\rangle\, \oplus\, \langle\, t^*_{j,\,i+2}\, \bar{t}^*_{j,\,i+2} \,\rangle\, =$$

$$= \langle\, \bar{g}_j\, \underbrace{M \,\ldots\, M}_{i+2}\, \bar{g}_j\, \underbrace{M \,\ldots\, M}_{i+2} \rangle\, =\, \langle\, \bar{g}_j\, \underbrace{M \,\ldots\, M}_{i+3} \rangle,$$

что соответствует **(4.75)**, когда порядок оператора получает *приращение* **2**.

Теперь всё то, что было проделано для $i + 3$ выполним для $i + 4$, вновь используя **(4.63)** и результаты выкладок для $i + 3$, и убедимся в справедливости **(4.76)** — **(4.79)**, когда порядок оператора получает приращение **2**. Итак, имеем:

$$\langle\, t_{j,\,i+4} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, \bar{t}^*_{j,\,i+4} \,\rangle\, =\, \langle\, t_{j,\,i+3}\, \bar{t}_{j,\,i+3} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, t^*_{j,\,i+3}\, \bar{t}^*_{j,\,i+3} \,\rangle\, =$$

$$= \langle\, d_j\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1}\, d_j^*\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+1} \rangle\, =\, \langle\, d_j\, M^*\, M_1^*\, \underbrace{M \,\ldots\, M}_{i+2} \rangle,$$

$$\langle\, t_{j,\,i+4} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, t^*_{j,\,i+4} \,\rangle\, =\, \langle\, t_{j,\,i+3}\, \bar{t}_{j,\,i+3} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, \bar{t}^*_{j,\,i+3}\, t^*_{j,\,i+3} \,\rangle\, =$$

$$= \langle\, g_j\, \bar{T}^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+2}\, g_j\, \bar{T}\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+2} \rangle\, =\, \langle\, g_j\, \bar{T}^*\, \underbrace{M^* \,\ldots\, M^*}_{i+3} \rangle,$$

$$\langle\, \bar{t}_{j,\,i+4} \,\rangle\, /\, \langle\, \bar{t}^*_{j,\,i+4} \,\rangle\, =\, \langle\, \bar{t}_{j,\,i+3}\, t_{j,\,i+3} \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, t^*_{j,\,i+3}\, \bar{t}^*_{j,\,i+3} \,\rangle\, =$$

$$= \langle\, g_j \,\bar T\, \underbrace{M^* \ldots M^*}_{i+2}\, g_j \,\bar T^*\, \underbrace{M^* \ldots M^*}_{i+2} \,\rangle \,=\, \langle\, g_j \,\bar T\, \underbrace{M^* \ldots M^*}_{i+3} \,\rangle,$$

$$\langle\, t_{j,i+4} \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \bar t^*_{j,i+4} \,\rangle \,=\, \langle\, t_{j,i+3}\,\bar t_{j,i+3} \,\rangle \,\oplus\, \langle\, t^*_{j,i+3}\,\bar t^*_{j,i+3} \,\rangle \,=$$
$$= \langle\, g_j \,\underbrace{M \ldots M}_{i+3}\, g_j \,\underbrace{M \ldots M}_{i+3} \,\rangle \,=\, \langle\, g_j \,\underbrace{M \ldots M}_{i+4} \,\rangle.$$

Теорема 5. Если $\langle\, t_{j,r} \,\rangle$, $\langle\, t^*_{j,r} \,\rangle$, $\langle\, \bar t_{j,r} \,\rangle$, $\langle\, \bar t^*_{j,r} \,\rangle$ — четвёрка составных канонических операторов r – го порядка, то

$$\langle\, t_{j,r}\,\bar T^* \,\rangle,\ \langle\, t^*_{j,r}\,\bar T^* \,\rangle,\ \langle\, \bar t_{j,r}\,\bar T^* \,\rangle,\ \langle\, \bar t^*_{j,r}\,\bar T^* \,\rangle \tag{4.80}$$

являются начальными каноническими операторами.

Доказательство. В том, что операторы из **(4.80)** суть канонические операторы $\langle\, d_{j+r+1} \,\rangle$ проверяется достаточно просто, поскольку легко увидеть по *таблице* **7**, что

Таблица 7

d_{j+r+1}	d^*_{j+r+1}	$\bar d_{j+r+1}$	$\bar d^*_{j+r+1}$	g_{j+r+1}	$\bar g_{j+r+1}$
$t_{j,r}\,\bar T^*$	$t^*_{j,r}\,\bar T$	$\bar t_{j,r}\,T^*$	$\bar t^*_{j,r}\,T$	$\bar t^*_{j,r}\,M^*$	$t^*_{j,r}\,M^*$
$t^*_{j,r}\,\bar T^*$	$t_{j,r}\,\bar T$	$\bar t^*_{j,r}\,T^*$	$\bar t_{j,r}\,T$	$\bar t_{j,r}\,M^*$	$t_{j,r}\,M^*$
$\bar t_{j,r}\,\bar T^*$	$\bar t^*_{j,r}\,\bar T$	$t_{j,r}\,T^*$	$t^*_{j,r}\,T$	$t^*_{j,r}\,M^*$	$\bar t^*_{j,r}\,M^*$
$\bar t^*_{j,r}\,\bar T^*$	$\bar t_{j,r}\,\bar T$	$t^*_{j,r}\,T^*$	$t_{j,r}\,T$	$t_{j,r}\,M^*$	$\bar t_{j,r}\,M^*$

$$\langle\, d_{j+r+1} \,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \bar d^*_{j+r+1} \,\rangle \,=\, \langle\, d_{j+r+1} \,\rangle.$$

Всё остальное видно из той же *таблицы* **7**, в частности

$$\langle\, g_{j+r+1} \,\rangle \,=\, \langle\, \bar d_{j+r+1} \,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \bar d^*_{j+r+1} \,\rangle.$$

Итак, как итог, в дальнейшем будем различать:

1) самодвойственные операторы $\langle\, p_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar p_j \,\rangle$,

2) самосопряжённые операторы $\langle\, g_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar g_j \,\rangle$,

3) канонические четвёрки операторов $\langle\, d_j \,\rangle$, $\langle\, d^*_j \,\rangle$, $\langle\, \bar d_j \,\rangle$, $\langle\, \bar d^*_j \,\rangle$,

4) составные канонические четвёрки операторов $\langle\, t_{j,r} \,\rangle$, $\langle\, t^*_{j,r} \,\rangle$, $\langle\, \bar t_{j,r} \,\rangle$, $\langle\, \bar t^*_{j,r} \,\rangle$ ранга r.

Леммы и теоремы, рассмотренные выше, устанавливают, как изменяются указанные операторы в тех случаях, когда к ним применяются продукции из множества Q.

4.5 Сложение по модулю 2 для KFS–операторов в системе Q

Подобно тому, как это было сделано для конъюнкции и дизъюнкции, для сложения по *модулю* **2** список равенств также начнём с KFS – операторов в системе Q_2, затем этот список пополним равенствами в системе Q_1 и лишь потом их дополним равенствами в системе Q. При этом в отличие от того, как это делалось раньше, приведём равенства парами, если только такая пара не вырождается в одно равенство. Непосредственными выкладками можно убедиться в справедливости нижеследующих формул в системе Q_2:

$$\left.\begin{aligned} \langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,T\,\rangle\ &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T\,\rangle, \\ \langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,T^*\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,T^*\,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.81}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,\bar{T}\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle, \\ \langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\bar{T}^*\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}^*\,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.82}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,T\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle, \\ \langle\,\alpha_j\,T^*\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,T^*\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}^*\,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.83}$$

$$\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,\oplus\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle\;=\;\langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\oplus\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,M\,\rangle, \tag{4.84}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\ \ \oplus\langle\,\beta_j\,T^*\,\rangle\ &=\ \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{T}\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,\bar{T}^*\,\rangle, \\ \langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,T\,\rangle\ &=\ \langle\,\bar{\alpha}_j\,\bar{T}^*\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\bar{T}\,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.85}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,M\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,\bar{T}^*\,\rangle, \\ \langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,M\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}^*\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\bar{T}\,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.86}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\ \oplus\langle\,\beta_j\,M\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}\,\rangle\ \oplus\langle\,\bar{\beta}_j\,\bar{T}^*\,\rangle, \\ \langle\,\alpha_j\,T^*\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,M\,\rangle &= \langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\oplus\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,\bar{T}^*\,\rangle\oplus\langle\,\bar{\beta}_j\,\bar{T}\,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.87}$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\,\oplus\,\langle\,\beta_j\,\bar{T}^*\,\rangle\;=\;\langle\,\bar{\alpha}_j\,T\,\rangle\,\oplus\,\langle\,\bar{\beta}_j\,T^*\,\rangle. \tag{4.88}$$

Замечание 9. Каждое из пары равенств **(4.81) – (4.83)** и **(4.85) – (4.87)** может рассматриваться как результат инвертирования другого равенства, при этом процесс инвертирования может не опускаться глубже (левее) *первой* справа продукции каждого оператора. В самом деле, *второе* равенство в **(4.81)**, полученное как результат инвертирования *первого*, выглядит так:

$$\langle\, \alpha_j^* \, \bar{T}^* \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \beta_j^* \, T^* \,\rangle \,=\, \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j^* \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \beta_j^* \,\rangle \,)\,)\, T^* \,\rangle,$$

но, разумеется, что в нём можно выполнить замену α_j^* на α_j и β_j^* на β_j и тогда получим *второе* равенство из **(4.81)**. Аналогичное верно и для остальных равенств.

Если теперь дополнить систему равенств **(4.81)** – **(4.88)** ещё следующими ниже равенствами, то получим список равенств в системе Q_1:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j \, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, \bar{M} \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \bar{\beta}_j \, \bar{T}^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j \, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j \, \bar{M} \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j \, \bar{T} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.89}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j \, T \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, \bar{M} \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, \bar{T}^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j \, T^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j \, \bar{M} \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \, \bar{T} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.90}$$

$$\langle\, \alpha_j \, M \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \beta_j \, \bar{M} \,\rangle \,=\, \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{M} \,\rangle, \tag{4.91}$$

$$\langle\, \alpha_j \, \bar{M} \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \beta_j \, \bar{M} \,\rangle \,=\, \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, M \,\rangle. \tag{4.92}$$

В системе Q равенства **(4.81)** – **(4.92)** должны быть пополнены следующими равенствами над KFS – операторами:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j \, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, M^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j^* \, \bar{T}^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j \, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j^* \, M^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j^* \, \bar{T} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.93}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j \, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T} \,\rangle \,\oplus \langle\, \bar{\beta}_j^* \, \bar{T}^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j \, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j^* \, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, \bar{T}^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j^* \, \bar{T} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.94}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j \, T \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, M^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, T \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j^* \, \bar{T}^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j \, T^* \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j^* \, M^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, T^* \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j^* \, \bar{T} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.95}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j \, T \,\rangle \,\oplus \langle\, \beta_j \, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, T \,\rangle \,\oplus \langle\, \bar{\beta}_j^* \, \bar{T}^* \,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j \, T^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j^* \, \bar{M}^* \,\rangle &= \langle\, (\, (\, \langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle \,)\,)\, T^* \,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j^* \, \bar{T} \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{4.96}$$

$$\langle \alpha_j M \rangle \oplus \langle \beta_j M^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle \oplus \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j^* \rangle) \bar{T}^* \rangle, \quad (4.97)$$

$$\langle \alpha_j M \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M}^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) T \rangle \oplus \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j^* \rangle) \bar{T}^* \rangle, \quad (4.98)$$

$$\langle \alpha_j \bar{M} \rangle \oplus \langle \beta_j M^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) T \rangle \oplus \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j^* \rangle) \bar{T}^* \rangle, \quad (4.99)$$

$$\langle \alpha_j \bar{M} \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M}^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle \oplus \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j^* \rangle) \bar{T}^* \rangle, (4.100)$$

$$\langle \alpha_j M^* \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M}^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{M}^* \rangle, \qquad (4.101)$$

$$\langle \alpha_j M^* \rangle \oplus \langle \beta_j M^* \rangle = \langle \alpha_j \bar{M}^* \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M}^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) M^* \rangle . (4.102)$$

Операции $\oplus$ над KFS – операторами в том случае, когда один из операторов есть $\langle \tau \rangle$ или $\langle \bar{\tau} \rangle$, представлены в *таблице* **8**.

Таблица 8

$\oplus$	$\alpha_j T$	$\alpha_j T^*$	$\alpha_j \bar{T}$	$\alpha_j \bar{T}^*$	$\alpha_j M$	$\alpha_j \bar{M}$	$\alpha_j M^*$	$\alpha_j \bar{M}^*$
τ_j	$\bar{\alpha}_j T$	$\alpha_j \bar{T}^*$	$\bar{\alpha}_j \bar{T}$	$\alpha_j T^*$	$\bar{\alpha}_j \bar{M}$	$\bar{\alpha}_j M$	$\bar{\alpha}_j \bar{M}^*$	$\bar{\alpha}_j M^*$
$\bar{\tau}_j$	$\alpha_j \bar{T}$	$\bar{\alpha}_j T^*$	$\alpha_j T$	$\bar{\alpha}_j \bar{T}^*$	$\alpha_j \bar{M}$	$\alpha_j M$	$\alpha_j \bar{M}^*$	$\alpha_j M^*$

4.5.1 Равенства, которые следуют из общих равенств в системе Q.

Представленный выше список равенств **(4.81)** – **(4.102)** имеет общий вид. Из этого списка равенств могут быть извлечены частные равенства, как следствия из общих. Например, сравнивая равенства **(4.86)**, **(4.87)**, **(4.89)**, **(4.90)**, находим:

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \oplus \langle \beta_j M \rangle = \langle \bar{\alpha}_j T \rangle \oplus \langle \bar{\beta}_j M \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle \oplus \langle \bar{\beta}_j \bar{M} \rangle =$$
$$= \langle \alpha_j T \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M} \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle, \quad (4.103)$$

$$\langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \oplus \langle \beta_j M \rangle = \langle \bar{\alpha}_j T^* \rangle \oplus \langle \bar{\beta}_j M \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{T}^* \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M} \rangle =$$
$$= \langle \alpha_j T^* \rangle \oplus \langle \bar{\beta}_j \bar{M} \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{T} \rangle, \quad (4.104)$$

Равенства **(4.82)** и **(4.83)** дают:

$$\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{T} \rangle = \langle \alpha_j T \rangle \oplus \langle \beta_j T \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{T} \rangle, \quad (4.105)$$

$$\langle \alpha_j \bar{T}^* \rangle \oplus \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle = \langle \alpha_j T^* \rangle \oplus \langle \beta_j T^* \rangle = \langle ((\langle \alpha_j \rangle \oplus \langle \beta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle . (4.106)$$

Из равенств **(4.93)** и **(4.94)** имеем:

$$\langle\alpha_j\bar{T}\rangle\oplus\langle\beta_j M^*\rangle = \langle\bar{\alpha}_j\bar{T}\rangle\oplus\langle\bar{\beta}_j\bar{M}^*\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j\rangle)\,\bar{T}\rangle\oplus\langle\beta_j^*\bar{T}^*\rangle, \quad (4.107)$$

$$\langle\alpha_j\bar{T}^*\rangle\oplus\langle\beta_j^* M^*\rangle = \langle\bar{\alpha}_j\bar{T}^*\rangle\oplus\langle\beta_j^*\bar{M}^*\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j\rangle)\bar{T}^*\rangle\oplus\langle\beta_j^*\bar{T}\rangle. \quad (4.108)$$

Точно так же **(4.95)** и **(4.96)** дают:

$$\langle\alpha_j T\rangle\oplus\langle\beta_j M^*\rangle = \langle\bar{\alpha}_j T\rangle\oplus\langle\bar{\beta}_j\bar{M}^*\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j\rangle)\,T\rangle\oplus\langle\beta_j^*\bar{T}^*\rangle, \quad (4.109)$$

$$\langle\alpha_j T^*\rangle\oplus\langle\beta_j^* M^*\rangle = \langle\bar{\alpha}_j T^*\rangle\oplus\langle\beta_j^*\bar{M}^*\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j\rangle)\,T^*\rangle\oplus\langle\beta_j^*\bar{T}\rangle, \quad (4.110)$$

а **(4.97)** и **(4.110)** и **(4.98)** и **(4.99)** позволяют записать:

$$\langle\alpha_j M\rangle\oplus\langle\beta_j M^*\rangle = \langle\alpha_j\bar{M}\rangle\oplus\langle\beta_j\bar{M}^*\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j\rangle)\,\bar{T}\rangle \oplus \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j^*\rangle)\,\bar{T}^*\rangle, \quad (4.111)$$

$$\langle\alpha_j M\rangle\oplus\langle\beta_j\bar{M}^*\rangle = \langle\alpha_j\bar{M}\rangle\oplus\langle\beta_j M^*\rangle = \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j\rangle)\,T\rangle \oplus \langle(\langle\alpha_j\rangle\oplus\langle\beta_j^*\rangle)\,\bar{T}^*\rangle. \quad (4.112)$$

4.5.2 Равенства для $\oplus$ над KFS – операторами в краткой записи.

Равенств для $\oplus$ над KFS – операторами довольно много, и удобство их использования связано с их представлением в форме краткой и ёмкой. Такая форма имеет несколько видов `троек` продукций и мы их будем пояснять по мере их появления.

Первую группу таких соотношений составляют следующие *шесть* `троек` продукций в системе Q_1:

$$\left.\begin{array}{lll} \langle\,(\,\bar{T},\,\bar{T},\,\bar{T}\,)\,\rangle, & \langle\,(\,\bar{T}^*,\,\bar{T}^*,\,\bar{T}^*\,)\,\rangle, & \langle\,(\,M,\,M,\,M\,)\,\rangle, \\ \langle\,(\,T,\,T,\,\bar{T}\,)\,\rangle, & \langle\,(\,T^*,\,T^*,\,\bar{T}^*\,)\,\rangle, & \langle\,(\,\bar{M},\,\bar{M},\,M\,)\,\rangle. \end{array}\right\} \quad (4.113)$$

Продукции в *этих* `тройках` коммутативны, то есть в соотношениях **(4.113)** закодировано фактически **12** `троек`. А смысл *этих* `троек` таков. Если $\langle\,(\,A,\,B,\,C\,)\,\rangle$ — одна из **12**–ти `троек`, то

$$\langle\,\alpha_j\,A\,\rangle\,\oplus\,\langle\,\beta_j\,B\,\rangle\,=\,\langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\oplus\,\langle\,\beta_j\,\rangle\,)\,C\,\rangle. \quad (4.114)$$

Вторую группу составляют следующие *две* `тройки`, а *третью* группу — *шесть* `троек` продукций:

$$[\,\bar{T}^*,\,T,\,\bar{M}\,], \quad [\,\bar{T}^*,\,\bar{T},\,M\,]; \quad (4.115)$$

$$\left.\begin{array}{lll} [\,\bar{T},\,T^*;\,\bar{M}\,], & [\,T,\,T^*;\,M\,], & [\,T^*,\,M;\,\bar{T}\,], \\ [\,\bar{T},\,\bar{M};\,\bar{T}^*\,], & [\,T,\,M;\,\bar{T}^*\,], & [\,T^*,\,\bar{M};\,T\,]. \end{array}\right\} \quad (4.116)$$

Прежде всего, обращаем внимание на *две* особенности в обозначениях. В **тройках (4.115)** и **(4.116)**, в отличие от **троек (4.113)**, используются *квадратные скобки*, а в **тройках (4.116)** используются ещё и *точки с запятой.* Если *запятая* не препятствует коммутированию продукций (это в записях **(4.113)**, **(4.115)** и частично в **(4.116)**), то *точка с запятой* препятствует переходу через неё. А это значит, что как в записях **(4.115)**, так и в записях **(4.116)** закодировано по *одному и тому же* числу **троек**, а именно по **12**–ти.

Теперь о смысле *квадратных скобок*, а также о *квадратных скобках* и *точки с запятой.*

Если $[\,A,\,B,\,C\,]$ — одна из **12**–ти **троек** *второй* группы, то

$$\langle\, \alpha_j\, A \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \alpha_j\, B \,\rangle \,=\, \langle\, \alpha_j\, C \,\rangle, \tag{4.117}$$

а если $[\,A,\,B;\,C\,]$ — одна из **12**–ти **троек** *третьей* группы, то

$$\langle\, \alpha_j\, A \,\rangle \,\oplus\, \langle\, \alpha_j\, B \,\rangle \,=\, \langle\, \bar{\alpha}_j\, C \,\rangle. \tag{4.118}$$

Кроме наборов **троек** продукций **(4.113)**, **(4.115)** и **(4.116)** будем говорить о **тройке** операторов

$$\langle\,(\,\alpha_j,\,\beta_j,\,\gamma_j\,)\,\rangle, \tag{4.119}$$

для которых будем использовать такой же вид записи, что и для **троек** продукций *первой* группы, подчёркивая, с одной стороны, её коммутативность и предполагая (а здесь это самое главное), что эти операторы таковы, что пара из них *“сворачивается”* в один оператор в результате операции $\oplus$, то есть $\langle\, \alpha_j \,\rangle \oplus \langle\, \beta_j \,\rangle = \langle \gamma_j \,\rangle$.

Ниже в молчаливой форме предполагается, что продукции A, B, C принадлежат множеству Q_1. Предыдущими выкладками показано, что верна следующая

Лемма 4. Если $\langle\,(\,A,\,B,\,C\,)\,\rangle$ и верно **(4.119)**, то верно, что

$$\langle\,(\,\langle\,\alpha_j\,A\,\rangle,\;\langle\,\beta_j\,B\,\rangle,\;\langle\,\gamma_j\,C\,\rangle\,)\,\rangle. \tag{4.120}$$

Эта *лемма* не выполняется для продукций из *второй* и *третьей* групп **троек**, а именно, она не верна для пары продукций, взятых соответственно из *первой* и *второй* строк следующей последовательности:

$$\begin{array}{cccccccc|cccc} T & T^* & T & T^* & \bar{T} & \bar{T}^* & \bar{T} & \bar{T}^* & \bar{T} & \bar{T}^* & T & \bar{T}^* \\ \bar{M} & \bar{M} & M & M & \bar{M} & \bar{M} & M & M & T^* & T & T^* & \bar{T} \end{array} \tag{4.121}$$

У разделительной вертикальной черты в **(4.121)** имеется *тройной* смысл. Продукции после черты коммутативны, то есть любая их пара может поменять свои строки; к ним *приводится* любая пара из продукций до черты (об этом *приведении* чуть ниже) и все эти продукции связаны равенством **(4.88)**.

Теперь о *приведении*. Любая пара продукций из **(4.121)**, расположенная до черты, входит в *две* `тройки`, из которых *одна* из **(4.115)**, а *другая* из **(4.116)**, причём эти продукции один раз разделены *точкой с запятой*, а другой раз — нет. *Третьей* продукцией всегда является продукция из **(4.121)**, расположенная после черты.

Смысл продукций в `тройках` из **(4.115)** и **(4.116)** определяется равенствами **(4.117)** и **(4.118)**, а нам бы хотелось, чтобы операторы в левой части **(4.117)** и **(4.118)** имели вид левой части равенства **(4.114)**. Этого можно добиться (и в этом один из смыслов приведения), но кроме `троек` из **(4.115)** и **(4.116)** следует использовать и `тройки` из **(4.113)**.

Вот методика этих выкладок. Мы её рассматриваем на примере первой пары из **(4.121)**, но приём годится для любой пары до черты в силу сказанного выше.

Итак, пусть верно **(4.119)** и требуется преобразовать выражение (*привести* его):

$$\begin{aligned} \langle \alpha_j T\rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M}\rangle &= \langle (\langle \gamma_j\rangle \ \oplus \langle \beta_j\rangle)T\rangle \oplus \langle \beta_j \bar{M}\rangle = \\ = \langle \gamma_j \bar{T}\rangle \oplus \langle \beta_j T\rangle \ \oplus \langle \beta_j \bar{M}\rangle &= \langle \gamma_j \bar{T}\rangle \quad \oplus \langle \beta_j \bar{T}^*\rangle. \end{aligned}$$

В этой выкладке использовались последовательно: выражение **(4.119)** , *первая* `тройка` из *второй* строки **(4.113)** и *первая* `тройка` из **(4.115)**.

Для справок приводим результаты всех выкладок, которые рекомендуется выполнить самостоятельно, чтобы быть уверенным в их справедливости.

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j\, T\,\rangle \ \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{M}\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\,\rangle \ \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j\, T^*\,\rangle \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{M}\,\rangle &= \langle\, \bar{\gamma}_j\, \bar{T}^*\,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{T}\,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{4.122}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j\, T\,\rangle \ \oplus \langle\, \beta_j\, M\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\,\rangle \ \oplus \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j\, T^*\,\rangle \oplus \langle\, \beta_j\, M\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\,\rangle \oplus \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{T}\,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{4.123}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \ \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{M}\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\,\rangle \ \oplus \langle\, \bar{\beta}_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j\, \bar{T}^*\,\rangle \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{M}\,\rangle &= \langle\, \bar{\gamma}_j\, \bar{T}^*\,\rangle \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{T}\,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{4.124}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle \;\oplus \langle\, \beta_j\, M\,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\,\rangle \;\oplus \langle\, \beta_j\, \bar{T}^{*}\,\rangle, \\ \langle\, \alpha_j\, \bar{T}^{*}\,\rangle \oplus \langle\, \beta_j\, M\,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^{*}\,\rangle \oplus \langle\, \beta_j\, \bar{T}\,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{4.125}$$

Заметим, что правые части всех равенств **(4.122)** — **(4.125)** имеют продукции $\bar{T}$ и $\bar{T}^{*}$ (к которым и *приводим* их).

Замечание 10. Если применять методику приведения, переходя к системе Q, то есть с присоединением ещё продукций M^{*} и $\bar{M}^{*}$, то понадобилось бы использовать сопряжение на уровень α_j^{*} или (и) β_j^{*}. В этом легко убедиться по равенствам **(4.93)** — **(4.100)**. При этом сами равенства **(4.93)** — **(4.96)** могут рассматриваться уже как результат *приведения*. Разумеется, здесь можно было бы провести и более глубокие исследования.

4.6 Упрощённые правила для конъюнкции и дизъюнкции

Будем говорить, что в системе Q_0 два KFS – оператора сворачиваются (в заданной логической операции $\odot$, которая может указываться или подразумеваться) в один, если результирующий оператор имеет каноническую форму записи в системе Q_0. Эту же мысль будем выражать кратко так: два KFS – оператора имеют свёртку в $\odot$. В общем случае подразумевается **(1.24)** из *главы* **I**, но здесь будем полагать, что $\odot \in \{\, \bar{/}, \bar{\downarrow}\,\}$.

4.6.1 Конъюнкция.

Рассмотрим вопрос о свёртке в конъюнкцию KFS – операторов на системе продукций Q_2. В этой системе продукций будем говорить, что два KFS – оператора в конъюнкции согласованы, если у них нет такого столбца, в котором одна продукция T, а другая – T^{*}. Конъюнкция над согласованными KFS – операторами в системе Q_2 охватывается равенствами **(4.1)** — **(4.8)**, **(4.1*)** – **(4.8*)** и *таблицей* **1** (без последних трёх столбцов). Из перечисленных равенств видно, что проблема *свёртки* возникает лишь в случае выхода на равенства **(4.6)** или **(4.6*)**, то есть когда имеются столбцы, в которых одна продукция M, а другая T или

T^* (здесь и чуть выше мы говорим о столбцах, подразумевая табличную запись операторов, принятую в **п. 4** *главы* **III**).

Если таких столбцов нет, то проблемы *свёртки* нет, и конъюнкция над парой KFS – операторов выполняется по нижеследующему упрощённому правилу, являющемуся следствием перечисленных выше равенств за исключением равенств **(4.6)** и **(4.6*)**.

Упрощённое правило конъюнкции. Результирующий оператор пары согласованных операторов строится справа налево по столбцам так. Если обе продукции в столбце совпадают, то эта продукция сохранится и в результирующем операторе, а если только одна продукция имеет знак инвертирования, то она со своим знаком инвертирования и переносится в результирующий оператор. И это следует продолжать до тех пор, пока не обнаружится, что в некотором i – ом столбце имеем:

1) в одном операторе продукцию $\bar{T}$, а в другом $\bar{T}^*$;

2) начала обоих операторов и эти начала разные;

3) начала обоих операторов и эти начала совпадают;

4) начало только одного оператора.

Тогда в случаях **1)** и **2)** в i – ом столбце записываем ν и применяем к нему записанные справа продукции до тех пор, пока не получим τ или $\bar{\tau}$ (разумеется, это произойдёт в столбце, расположенном правее i–го, иначе просто результирующий оператор есть θ). В случае **3)** начало результирующего совпадёт с началом исходных операторов. В случае **4)** выполняем конъюнкцию по *таблице* **1** над началом одного оператора и подоператором другого (здесь имеется ввиду часть оператора от начала до i–го столбца включительно) и полученный результат становится соответствующим подоператором результирующего. При этом, если такой подоператор есть $\langle \nu \rangle$, то поступаем так же, как и в **1)** и **2)**.

Иллюстрационные примеры. Применение упрощённого правила конъюнкции (по примеру на первые три случая соответственно и два примера на четвёртый случай):

$$1) \qquad \langle \bar{/} \rangle \qquad \begin{array}{lllllll} \langle \tau\, M & \bar{T}^* & M & T & M & T^* \rangle \\ \langle \tau\, \bar{T}^* & \bar{T} & M & T & \bar{T} & T^* \rangle \\ \hline \langle & \theta & M & T & \bar{T} & T^* \rangle \end{array} = \langle \bar{\tau}\ \bar{T}\ T^* \rangle.$$

$$2)\qquad \langle\bar{/}\rangle\qquad \begin{array}{l} \langle\,\tau\ \ M\ \ T\ \ T^*\ \ T\ \ M\ \ T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau\ \ \bar T^*\ \ T\ \ \bar T^*\ \ \bar T\ \ M\ \ T\,\rangle \\ \hline \langle\,\nu\ \ \bar T^*\ \ T\ \ \bar T^*\ \ T\ \ M\ \ T\,\rangle = \langle\,\bar\tau\ \ \bar T^*\ \ \bar T\,\rangle. \end{array}$$

$$3)\qquad \langle\bar{/}\rangle\qquad \begin{array}{l} \langle\,\tau\ \ M\ \ \bar T\ \ \bar T\ \ \bar T^*\ \ T\ \ T^*\,\rangle \\ \langle\,\tau\ \ \bar T^*\ \ M\ \ \bar T\ \ T^*\ \ T\ \ T^*\,\rangle \\ \hline \langle\,\tau\ \ \bar T^*\ \ \bar T\ \ \bar T\ \ \bar T^*\ \ T\ \ T^*\,\rangle\ . \end{array}$$

$$4)\qquad \langle\bar{/}\rangle\qquad \begin{array}{lllllllll} \langle\,\tau & T & T^* & M & T & \bar T & M & T^*\,\rangle & \\ \langle & & & \tau & \bar T & \bar T & \bar T^* & T^*\,\rangle & \\ \hline \langle\,\tau & T & T^* & \bar T & \bar T & \bar T & \bar T^* & T^*\,\rangle & . \end{array}$$

$$5)\qquad \langle\bar{/}\rangle\qquad \begin{array}{llllllll} \langle\,\tau & T^* & \bar T^* & T & \bar T^* & M & T^*\,\rangle & \\ \langle & & \tau & \bar T & M & M & T^*\,\rangle & \\ \hline \langle & & \nu & \bar T & \bar T^* & M & T^*\,\rangle & = \langle\,\tau\,\rangle. \end{array}$$

4.6.2 Дизъюнкция.

Учитывая то, что дизъюнкция является операцией, двойственной конъюнкции, всё, что будет приведено ниже, является отражением этой двойственности. В частности, вопрос о свёртке в дизъюнкцию KFS – операторов на системе продукций Q_2 следует начать с определения согласованности.

Будем говорить, что два KFS – оператора в дизъюнкции согласованы, если у них нет такого столбца, в котором одна продукция $\bar{T}$, а другая $\bar{T}^*$.

Дизъюнкция над согласованными KFS – операторами в системе Q_2 охватывается равенствами **(4.27)** — **(4.34)**, **(4.27*)** – **(4.34*)** и *таблицей* **2** (без последних трёх столбцов). Из перечисленных равенств видно, что проблема свёртки возникает лишь в случае выхода на равенства **(4.32)** или **(4.32*)**, то есть когда имеются столбцы, в которых одна продукция M, а другая $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$.

Если таких столбцов нет, то проблемы свёртки для дизъюнкции нет, и дизъюнкция над парой KFS – операторов выполняется по нижеследующему упрощённому правилу, являющемуся следствием перечисленных равенств: **(4.27)** — **(4.34)** и **(4.27*)** – **(4.34*)**, за исключением равенств **(4.32)** и **(4.32*)**.

Упрощённое правило дизъюнкции. Результирующий оператор пары согласованных операторов строится справа налево по столбцам так. Если обе продукции в столбце совпадают, то эта продукция сохраняется и в результирующем операторе, а если только одна из продукций есть T (или T^*), а другая – произвольная, то эта продукция T (или T^*) переносится в результирующий оператор. И это следует продолжать до тех пор, пока не обнаружится, что в некотором i – ом столбце имеем:

1) в одном операторе продукцию T, а в другом T^*;

2) начала обоих операторов и эти начала разные;

3) начала обоих операторов и эти начала совпадают;

4) начало только одного оператора.

Тогда в случаях **1)** и **2)** в i–ом столбце записываем $\bar{\nu}$ и применяем к нему записанные справа продукции до тех пор, пока не получим τ или $\bar{\tau}$ (разумеется, это произойдёт в столбце, расположенном правее i–го, иначе просто результирующий оператор есть θ). В случае **3)** начало результирующего совпадёт с началом исходных операторов. В случае **4)** выполняем дизъюнкцию по *таблице* **2** над началом одного оператора и подоператором другого (здесь имеется ввиду часть оператора от начала до i–го столбца включительно) и полученный результат становится соответствующим подоператором результирующего. При этом, если такой подоператор есть $\langle\,\bar{\nu}\,\rangle$, то поступаем так же, как и в **1)** и **2)**.

Иллюстрационные примеры. На применение упрощённого правила дизъюнкции ниже приводим по примеру на первые три случая соответственно и два примера на четвёртый случай:

$$
1)\qquad \langle\bar{\downarrow}\rangle\qquad
\begin{array}{llllllll}
\langle\,\tau & M & T^* & M & \bar{T} & T & \bar{T}^*\,\rangle \\
\langle\,\tau & T^* & T & M & \bar{T} & M & \bar{T}^*\,\rangle \\
\hline
\langle & & \bar{\nu} & M & \bar{T} & T & \bar{T}^*\,\rangle
\end{array}
= \langle\,\tau\ T\ \bar{T}^*\,\rangle.
$$

2)
$$\langle \bar{\downarrow} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle\, \bar{\tau} \quad T^* \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad \bar{T} \quad M \quad \bar{T} \,\rangle \\ \langle\, \tau \quad M \quad \bar{T} \quad T^* \quad T \quad M \quad \bar{T} \,\rangle \\ \hline \langle\, \bar{\nu} \quad T^* \quad \bar{T} \quad T^* \quad T \quad M \quad \bar{T} \,\rangle = \langle\, \tau \;\; T^* \;\; T \;\; M \;\; \bar{T} \,\rangle. \end{array}$$

3)
$$\langle \bar{\downarrow} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle\, \bar{\tau} \quad T^* \quad M \quad \bar{T} \quad \bar{T}^* \quad T \quad T^* \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau} \quad M \quad T \quad T \quad \bar{T}^* \quad T \quad \bar{T}^* \,\rangle \\ \hline \langle\, \bar{\tau} \quad T^* \quad T \quad T \quad \bar{T}^* \quad T \quad T^* \,\rangle\ . \end{array}$$

4)
$$\langle \bar{\downarrow} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle\, \tau \quad T \quad T^* \quad M \quad \bar{T} \quad T \quad M \quad \bar{T}^* \,\rangle \\ \langle\, \qquad\qquad\qquad \tau \quad T \quad T \quad T^* \quad \bar{T}^* \,\rangle \\ \hline \langle\, \tau \quad T \quad T^* \quad T \quad T \quad T \quad T^* \quad \bar{T}^* \,\rangle\ . \end{array}$$

5)
$$\langle \bar{\downarrow} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle\, \tau \quad T^* \quad T^* \quad T \quad M \quad M \quad \bar{T}^* \,\rangle \\ \langle\, \qquad\qquad \bar{\tau} \quad \bar{T} \quad T^* \quad M \quad \bar{T}^* \,\rangle \\ \hline \langle\, \qquad\qquad \bar{\nu} \quad T \quad T^* \quad M \quad \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \bar{\tau} \,\rangle. \end{array}$$

Замечание 11. Проблема свёртки, возникающая для конъюнкции и дизъюнкции в системе Q_2, не снимается ни в системе Q_1, ни в Q. Более того, в этих системах возникают новые проблемные ситуации.

Глава 5

Система продукций, копродукций и комбинаторов

Уже в **п. 3.3** продукций Q, из которой были выделены: продукции Q_1 и продукции Q_2, составляющие соответственно *первую* и *вторую* основные системы продукций. Были выделены и базовые системы Q_3, Q_4 и Q_5.

В *главе* **IV** были изучены логические операции над KFS – операторами, построенными с использованием продукций из системы Q. В **п. 4.6** были установлены возможности свёртки в $\langle \bar{/} \rangle$ и $\langle \bar{\downarrow} \rangle$ над KFS – операторами в системе Q_2. При этом было установлено, что такие свёртки возможны, но не всегда. Более того, расширение системы Q_2 до Q_1, а затем и до Q не только не снимает возникшей проблемы, а даже порождает новые.

Пути преодоления указанной проблемы и посвещена эта *глава*, а он, кратко говоря, таков. Наряду с *продукциями* рассматриваются *композиции* продукций (которые мы в дальнейшем будем называть *копродукциями*). Копродукции по смыслу не выводят нас за пределы рассматриваемой системы продукций, но имеют другое обозначение. Иными словами, копродукции суть синонимы продукциям (то есть использован лингвистический приём: один смысл, но разное обозначение). Такой приём, как мы увидим ниже, указывает на общий подход к снятию неопределённости, которая могла бы возникнуть без этого приёма.

В отличие от копродукций, *комбинаторы* суть комбинации продукций, которые в результате дают новую продукцию, не содержащуюся в системе продукций, из которой образована эта комбинация. Таким образом, комбинаторы — это истинное расширение имеющейся системы продукций не только по форме, но и по смыслу.

Замечание 1. Комбинаторы, являющиеся расширением понятия продукции, интереснее самой продукции, в чём нам предстоит убедиться ниже. Сейчас же отметим, что если сама продукция в принципиальном смысле не очень сильно отличается от классического подхода в логике, представленного с помощью логических связок, то не понятно, как, оставаясь на уровне логических связок, можно было бы выйти на понятия, аналогичные комбинаторам. Добавим ещё, что сами комбинаторы определяют и результат логической операции над продукциями (в широком их смысле, охватывающем и копродукции и комбинаторы), попадающими под символы комбинатора.

5.1 Общая идея введения комбинаторов и копродукций

Идеальное решение, к которому мы стремимся, заключается в том, чтобы и в тех случаях, которые не подчиняются упрощённым правилам конъюнкции и дизъюнкции, получить возможность выполнять эти операции по столбцам, как в упрощённых правилах.

Иными словами, полагая, что операторы $\langle\, \alpha_j \,\rangle$ и $\langle\, \beta_j \,\rangle$ таковы, что по упрощённому правилу конъюнкции можем получить свёртку $\langle\, \gamma_j \,\rangle$, то есть

$$\langle\, \alpha_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j \,\rangle, \tag{5.1}$$

вводим систему комбинаторов

$$\{\, R,\; R^*,\; L,\; L^* \,\}, \tag{5.2}$$

налагая требование, чтобы

$$\langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \alpha_j \,\rangle, \tag{5.3}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \beta_j \,\rangle, \tag{5.4}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, \gamma_j \,\rangle, \tag{5.5}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T^* \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j\, \gamma_j \,\rangle. \tag{5.6}$$

Замечание 2. Комбинаторы R и R^* называются правыми, а комбинаторы L и L^* — левыми; такое название указывает на то, по какую сторону от γ_j в равенствах **(5.3)** — **(5.5)** записывается α_j или β_j. Для комбинаторов, кроме правого и левого, будем называть R и L комбинаторами *первого* типа, а R^* и L^* — комбинаторами *второго* типа.

Если теперь ввести аналогично систему комбинаторов для дизъюнкции, то следует полагать, что операторы $\langle\,\alpha_j\,\rangle$ и $\langle\,\beta_j\,\rangle$ таковы, что по упрощённому правилу дизъюнкции можем получить свёртку $\langle\,\gamma_j\,\rangle$, то есть

$$\langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\rangle, \tag{5.7}$$

и тогда вводим систему комбинаторов

$$\{\,\bar{R},\;\bar{R}^*,\;\bar{L},\;\bar{L}^*\,\}, \tag{5.8}$$

налагая требование, чтобы

$$\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,\bar{T}\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\bar{R}\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\alpha_j\,\rangle, \tag{5.9}$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\bar{R}^*\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\beta_j\,\rangle, \tag{5.10}$$

$$\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,\bar{T}^*\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\bar{L}\,\rangle\;=\;\langle\,\alpha_j\,\gamma_j\,\rangle, \tag{5.11}$$

$$\langle\,\alpha_j\,\bar{T}^*\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle\;=\;\langle\,\gamma_j\,\bar{L}^*\,\rangle\;=\;\langle\,\beta_j\,\gamma_j\,\rangle. \tag{5.12}$$

Замечание 3. Обращаем внимание, что сказанное в *замечании* **2** сохраняет силу и в том случае, когда комбинаторы имеют символ инвертирования, то есть для комбинаторов **(5.8)**, соответствующих комбинаторам **(5.2)**.

Равенства *первых* и *последних* частей в **(5.3)** — **(5.6)** и **(5.9)** — **(5.12)** суть иная форма записи равенств **(4.6)**, **(4.6*)** и **(4.32)**, **(4.32*)**. Их запись с помощью комбинаторов (средняя часть перечисленных выше равенств) — это стремление представить конкатенацию векторов в свёртку, при этом предполагается, что из свёртки операторов $\langle\,\gamma_j\,\rangle$, представленных в **(5.1)** или **(5.7)**, могут быть извлечены составляющие эту свёртку операторы $\langle\,\alpha_j\,\rangle$ или $\langle\,\beta_j\,\rangle$. А чтобы это возможно было осуществить, используются копродукции.

Более детально идею введения и определения системы копродукций поясним, начав рассмотрение со следующего примера:

$$\langle\,\bar{/}\,\rangle\qquad \begin{array}{l} \langle\,\tau\;M\quad\bar{T}\quad\bar{T}\quad\bar{T}^*\quad T\quad T^*\quad M\,\rangle\\ \langle\,\tau\;\bar{T}^*\quad M\quad\bar{T}\quad T^*\quad T\quad T^*\quad T\,\rangle\\ \hline \langle\;.\quad.\quad\;.\quad\;.\quad\;.\quad T\quad T^*\quad R\,\rangle \end{array} \tag{5.13}$$

Этот пример отличается от **3** – го из иллюстрационных примеров **п. 4.6.1** лишь тем, что в нём добавлен справа ещё один столбец из пары продукций, которые порождают проблему свёртки KFS – операторов в системе Q_2. Понятно, что в примере **(5.13)** вместо многоточий записать из иллюстрационного **3** – го примера выражение $\tau\,\bar{T}^*\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}^*$ мы не можем и вот почему. Истинный ответ состоит из конкатенации результирующего и первого векторов **3** – го примера:

$$\langle\,\tau\,\bar{T}^*\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}^*\,T\,T^*\,\tau\,M\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}^*\,T\,T^*\,\rangle \tag{5.14}$$

и таким образом надо не только свернуть, но и однозначно развернуть конкатенацию. А если бы мы записали указанное выражение, то развернуть по нему однозначно конкатенацию **(5.14)** не смогли бы, так как должны записать, что отображение $\gamma_j \longmapsto \alpha_j$, определяемое R на последовательности продукций для **(5.14)** имеет вид:

$$R\,:\,\tau \longmapsto \tau,\;\; \bar{T}^* \longmapsto M,\; \bar{T} \longmapsto \bar{T},\; \bar{T} \longmapsto \bar{T},\; \bar{T}^* \longmapsto \bar{T}^*,\; T \longmapsto T,\;\; T^* \longmapsto T^*. \tag{5.15}$$

Сравнивая *второй* и *пятый* члены последовательности отображений **(5.15)**, видим неоднозначность. Как указывалось выше, такого рода неопределённости мы будем снимать с помощью копродукций, являющихся синонимами продукциям. В нашем конкретном случае достаточно ввести одну копродукцию $\bar{Z}^*$, определив $R\,:\,\bar{Z}^* \longmapsto M$, тем самым изменив *второй* член последовательности отображений **(5.15)**, полагая при этом, что $\bar{Z}^*$ является синонимом для $\bar{T}^*$, что будет (и в дальнейшем тоже) записываться так:

$$\bar{Z}^* \hookrightarrow \bar{T}^*. \tag{5.16}$$

Значит, если вернуться к примеру **(5.13)**, то можем записать, что результирующим оператором будет оператор $\langle\,\tau\,\bar{Z}^*\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}^*\,T\,T^*\,R\,\rangle$, который даёт, по сказанному выше, то, что записано в **(5.14)**. Обращаем внимание, что при развёртке результирующего оператора в конкатенацию, копродукция $\bar{Z}^*$ заменена на продукцию $\bar{T}^*$ в соответствии с **(5.16)**.

Теперь этим общим идеям с иллюстрацией на частном примере придадим характер общих определений и обозначений для случая выполнения конъюнкций и дизъюнкций над согласованными операторами.

5.2 Система комбинаторов и копродукций

Для того, чтобы избежать большого количества однообразных определений с поэтапным введением соответствующих обозначений, приведём весь список определений и обозначений в виде таблиц и лишь потом объясним, как его следует понимать и как им следует пользоваться. Эти таблицы мы приводим отдельно для конъюнкции и дизъюнкции, при этом за основу взято второе подмножество основных продукций Q_2.

5.2.1 Комбинаторы и копродукции для конъюнкции.

Равенства **(5.3)** — **(5.6)** в табличной форме представлены в *таблице* **1**, которую можно назвать таблицей определения комбинаторов. В *таблицах* **2** и **3** приведены определения копродукций, диктуемые комбинаторами.

Таблица 1

1	2	3	4
M	T	M	T^*
T	M	T^*	M
R	R^*	L	L^*

Таблица 2

1	2	3	4
M	T	M	T^*
T	M	T^*	M
$\bar{I}$	$\bar{I}^*$	I	I^*

Таблица 3

1	2	3	4
M	T	M	T^*
T	M	T^*	M
$\bar{E}^*$	$\bar{E}$	E^*	E

По *раскрываемым* (определение раскрываемости комбинатора будет дано ниже) комбинаторам определения копродукций представлены в *таблице* **4**.

Таблица 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T	$\bar{T}$	T^*	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	M	T	T^*	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	T^*	$\bar{T}$	T	$\bar{T}^*$
$\bar{T}$	T	$\bar{T}^*$	T^*	M	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	T^*	T	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	T^*	$\bar{T}^*$	T
P	P^*	$\bar{P}$	$\bar{P}^*$	Z	Z^*	$\bar{Z}$	$\bar{Z}^*$	O	O^*	$\bar{O}$	$\bar{O}^*$	N	N^*	$\bar{N}$	$\bar{N}^*$

Системы синонимов копродукций таковы:

$$\left.\begin{array}{l} I,\, I^*,\, E,\, E^*,\, P,\, P^*, Z,\, Z^*,\, N,\, N^* \;\;\hookrightarrow\;\; \bar{T}, \\ \bar{I},\, \bar{I}^*,\, \bar{E},\, \bar{E}^*,\, \bar{P},\, \bar{P}^*, \bar{Z},\, \bar{Z}^*,\, \bar{N},\, \bar{N}^* \;\;\hookrightarrow\;\; \bar{T}^*. \end{array}\right\} \tag{5.17}$$

Замечание 4. Дополнением к *таблице* **4** являются тождественные отображения

$$T \longmapsto T,\;\; T^* \longmapsto T^*,\;\; \bar{T} \longmapsto \bar{T},\;\; \bar{T}^* \longmapsto \bar{T}^*,\;\; M \longmapsto M, \tag{5.18}$$

которые верны для любого из комбинаторов R, L, R^*, L^*.

5.2.2 Комбинаторы и копродукции для дизъюнкции.

Определения комбинаторов и копродукций для дизъюнкций приводятся в полном соответствии с тем, как это сделано для конъюнкций. Комбинаторы для дизъюнкции могут ещё называться отрицательными комбинаторами и они определяются равенствами **(5.9)** — **(5.12)**, которые в табличной форме представлены в *таблице* **5**, которую можно назвать таблицей определения отрицательных комбинаторов. В *таблице* **6** и **7** приведены определения копродукций дизъюнкций, диктуемые отрицательными комбинаторами.

Таблица 5

1	2	3	4
M	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$
$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	M
$\bar{R}$	$\bar{R}^*$	$\bar{L}$	$\bar{L}^*$

Таблица 6

1	2	3	4
M	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$
$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	M
I	I^*	$\bar{I}$	$\bar{I}^*$

Таблица 7

1	2	3	4
M	$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$
$\bar{T}$	M	$\bar{T}^*$	M
E^*	E	$\bar{E}^*$	$\bar{E}$

По раскрываемым отрицательным комбинаторам определения копродукций приведены в *таблице* **8**.

Таблица 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\bar{T}$	T	$\bar{T}^*$	T^*	T	M	T^*	M	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	T	T^*	$\bar{T}^*$	T	$\bar{T}$	T^*
T	$\bar{T}$	T^*	$\bar{T}^*$	M	T	M	T^*	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	T^*	T	T	$\bar{T}^*$	T^*	$\bar{T}$
$\bar{P}$	$\bar{P}^*$	P	P^*	$\bar{Z}$	$\bar{Z}^*$	Z	Z^*	$\bar{O}$	$\bar{O}^*$	O	O^*	$\bar{N}$	$\bar{N}^*$	N	N^*

Синонимы системы копродукций в дизъюнкциях таковы:

$$\left.\begin{array}{lcl} I,\, I^*,\, E,\, E^*,\, P,\, P^*, Z,\, Z^*,\, N,\, N^* & \hookrightarrow & T^*, \\ \bar{I},\, \bar{I}^*,\, \bar{E},\, \bar{E}^*,\, \bar{P},\, \bar{P}^*, \bar{Z},\, \bar{Z}^*,\, \bar{N},\, \bar{N}^* & \hookrightarrow & T. \end{array}\right\} \tag{5.19}$$

Замечание 5. Дополнением к *таблице* **8** являются тождественные отображения **(5.18)**, которые верны для любого из комбинаторов $\bar{R}$, $\bar{L}$, $\bar{R}^*$, $\bar{L}^*$.

5.2.3 Общие пояснения к таблицам определений.

В *таблицах* **1** — **8** в каждом столбце, номер которого указывается в *первой* строке каждой таблицы, во *второй* и *третьей* строках указаны продукции из множества Q_2, а в *четвёртой* указан результирующий комбинатор (это в *таблицах* **1** и **5**) или результирующая копродукция (в остальных таблицах). *Таблицу* **1**, представляющую *равенства* **(5.3)** — **(5.6)**, следует читать как систему отображений:

$$\left.\begin{array}{rl} R, L: & R \mapsto M, \ \ R^* \mapsto T, \ \ L \mapsto M, \ \ L^* \mapsto T^*; \\ R^*, L^*: & R \mapsto T, \ \ R^* \mapsto M, \ \ L \mapsto T^*, \ \ L^* \mapsto M. \end{array}\right\} \tag{5.20}$$

Аналогично *таблицу* **5**, представляющую *равенства* **(5.9)** — **(5.12)**, следует читать как систему отображений:

$$\left.\begin{array}{rl} \bar{R}, \bar{L}: & \bar{R} \mapsto M, \ \ \bar{R}^* \mapsto \bar{T}, \ \ \bar{L} \mapsto M, \ \ \bar{L}^* \mapsto \bar{T}^*; \\ \bar{R}^*, \bar{L}^*: & \bar{R} \mapsto \bar{T}, \ \ \bar{R}^* \mapsto M, \ \ \bar{L} \mapsto \bar{T}^*, \ \ \bar{L}^* \mapsto M. \end{array}\right\} \tag{5.21}$$

Таблицу **2** следует читать как систему отображений:

$$\left.\begin{array}{rl} R, L: & \bar{I} \mapsto M, \ \ \bar{I}^* \mapsto T, \ \ I \mapsto M, \ \ I^* \mapsto T^*; \\ R^*, L^*: & \bar{I} \mapsto T, \ \ \bar{I}^* \mapsto M, \ \ I \mapsto T^*, \ \ I^* \mapsto M. \end{array}\right\} \tag{5.22}$$

Таблицу **6** — как систему отображений:

$$\left.\begin{array}{rl} \bar{R}, \bar{L}: & I \mapsto M, \ \ I^* \mapsto \bar{T}, \ \ \bar{I} \mapsto M, \ \ \bar{I}^* \mapsto \bar{T}^*; \\ \bar{R}^*, \bar{L}^*: & I \mapsto \bar{T}, \ \ I^* \mapsto M, \ \ \bar{I} \mapsto \bar{T}^*, \ \ \bar{I}^* \mapsto M. \end{array}\right\} \tag{5.23}$$

Разумеется, что и для *таблиц* **3**, **4**, **7** и **8** можно выписать соответствующие отображения, но они очевидны, поскольку для *таблиц* **3** и **4** примером может служить *таблица* **2**, а для *таблиц* **7** и **8** примером — *таблица* **6**, что может быть сформулировано и так: комбинаторы $R, \bar{R}, L, \bar{L}$ *первого* (и соответственно $R^*, \bar{R}^*, L^*, \bar{L}^*$ *второго*) типа задают отображение результирующего комбинатора или копродукции в продукцию *первой* (соответственно *второй*) строки таблицы.

Теперь уместно обратить внимание на то, что в *таблицах* **1** — **3** имеются столбцы с номерами **1** — **4**, в которых **2**–я и **3**–я строки совпадают, а **4**–я строка у них разная. То же можно сказать и о *таблицах* **5** — **7**. Это не случайно: эти части таблиц отражают разные ситуации, которые будут строго оговорены ниже при формулировке правил выполнения конъюнкции и дизъюнкции над парами согласованных операторов.

5.2.4 Множества комбинаторов и копродукций.

Для того, чтобы в дальнейшем при ссылках не приводить длинные перечни комбинаторов и копродукций, условимся, что будут использоваться следующие обозначения.

Для множеств правых и левых комбинаторов:

$$K_R \rightleftharpoons \{ R, R^*, \bar{R}, \bar{R}^* \}, \quad K_L \rightleftharpoons \{ L, L^*, \bar{L}, \bar{L}^* \};$$

для множеств комбинаторов *первого* и *второго* типов:

$$K_1 \rightleftharpoons \{ R, L, \bar{R}, \bar{L} \}, \quad K_2 \rightleftharpoons \{ R^*, L^*, \bar{R}^*, \bar{L}^* \};$$

для комбинаторов конъюнкции и дизъюнкции:

$$K_K \rightleftharpoons \{ R, L, R^*, L^* \}, \quad K_D \rightleftharpoons \{ \bar{R}, \bar{L}, \bar{R}^*, \bar{L}^* \},$$

при этом множество комбинаторов:

$$K \rightleftharpoons K_R \cup K_L = K_1 \cup K_2 = K_K \cup K_D.$$

Для копродукций примем:

$$K_Q \rightleftharpoons \{ I, E, P, Z, O, N \}, \quad K_Q^* \rightleftharpoons \{ I^*, E^*, P^*, Z^*, O^*, N^* \},$$

$$\bar{K}_Q \rightleftharpoons \{ \bar{I}, \bar{E}, \bar{P}, \bar{Z}, \bar{O}, \bar{N} \}, \quad \bar{K}_Q^* \rightleftharpoons \{ \bar{I}^*, \bar{E}^*, \bar{P}^*, \bar{Z}^*, \bar{O}^*, \bar{N}^* \},$$

$$K_q \rightleftharpoons K_Q \cup K_Q^*, \quad K_{\bar{q}} \rightleftharpoons \bar{K}_Q \cup \bar{K}_Q^*, \quad Q_k \rightleftharpoons K_q \cup K_{\bar{q}}.$$

Принятая система обозначений и названий для комбинаторов позволяет нам выделить и новые подмножества комбинаторов. Например, можно говорить о правых комбинаторах конъюнкции, то есть о

$$K_R \cap K_K = \{ R, R^* \}$$

или о *второго* типа комбинаторах дизъюнкции:

$$K_2 \cap K_D = \{ \bar{R}^*, \bar{L}^* \}$$

и так далее.

Комбинаторы K и копродукции Q_k являются в определённом смысле (в смысле их использования для построения FS – операторов) обобщениями понятия продукции и часто, говоря о продукциях, будем подразумевать множество

$$Q_2 \cup K \cup Q_k \tag{5.24}$$

или даже более общее множество

$$Q \cup K \cup Q_k, \tag{5.25}$$

которое не является пределом возможного обобщения.

Там, где это важно, будет подчёркиваться, какая именно продукция имеется ввиду: продукция в узком смысле, копродукция или комбинатор.

И, наконец, примем соглашение, по которому не только для векторов будем использовать название **ИСЧ**, введённое в **п. 1.3**, но будем говорить и о **ИСЧ** продукций, копродукций и комбинаторов.

При этом запись

$$[A], \text{ где } A \in \{T, I, E, P, Z, O, N, R, L, M\},$$

будет сокращённое обозначение для **ИСЧ** продукций в широком смысле, то есть

$$[A] \rightleftharpoons \{A, A^*, \bar{A}, \bar{A}^*\}. \tag{5.26}$$

5.3 Результаты конъюнкций над операторами в расширенной системе продукций

Развивая общую идею комбинаторов и копродукций, мы показали на частном примере, что в некоторых случаях, которые не подчиняются упрощённому правилу конъюнкции, можно получить свёртку пары операторов в один, если систему продукций Q_2, в которой записана наша пара операторов, пополнить должным образом копродукциями и комбинаторами.

Теперь мы покажем, что это верно в общем случае, точнее, верна следующая

Теорема 1. Если в системе Q_2 заданы два согласованных оператора, то их конъюнкция всегда сворачивается в один оператор в расширенной системе продукций

$$Q_2 \cup Q_k \cup K_K. \tag{5.27}$$

Обоснование этой теоремы состоит в доказательстве ряда лемм, причём их доказательства имеют конструктивный характер, так что и всё обоснование *теоремы* **1** конструктивно в том смысле, что по заданным согласованным операторам мы просто указываем, как строить их конъюнктивную свёртку.

Прежде чем приводить формулировки и доказательства всех необходимых лемм, условимся о некоторых обозначениях и определениях. Произвольную m – членную последовательность (случай $m = 0$ не исключается) продукций из множества Q_2 будем по умолчанию обозначать одной литерой W, быть может, с индексом. Символ инвертирования для W будет означать инвертирование всех продукций, входящих в W, кроме продукций M, которые сохраняются неизменными. Например, если $W_i = T^* M T \bar{T} M \bar{T}^* T$, то $\bar{W}_i = \bar{T}^* M \bar{T} T M T^* \bar{T}$. Из сказанного следует, что, говоря о $\langle \alpha_j \rangle$ и $\langle \bar{\alpha}_j \rangle$, надо полагать, без умаления общности, что $\langle \alpha_j \rangle = \langle \tau_i W \rangle$ или $\langle \alpha_j \rangle = \langle \bar{\tau}_i W \rangle$, и тогда $\langle \bar{\alpha}_j \rangle = \langle \bar{\tau}_i \bar{W} \rangle$ или $\langle \bar{\alpha}_j \rangle = \langle \tau_i \bar{W} \rangle$ соответственно.

В **п. 4.6.1** мы обращали внимание на то, что проблема свёртки может возникнуть лишь в случае выхода на равенства **(4.6)** или **(4.6*)**. В тех случаях, когда она возникает, те столбцы, которые приводят к этому, называются *особыми* столбцами (сокращённо **ос**) и их счёт в операторах идёт слева направо, начиная с **1**. В таких столбцах имеем продукции M и T или T^*. Столбцы такого типа за номерами **1 — 4** имеются во всех *таблицах* **1 — 3** и в соответствии с принятыми определениями они приводят либо к комбинаторам (*таблица* **1**), либо к копродукциям $[\,I\,]$ (*таблица* **2**) и $[\,E\,]$ (*таблица* **3**). Такое различие в результате связано с тем, что *первый* выход на столбец с M и T или T^* ещё не означает, что это **ос**. Имеются исключения, то есть *фиктивные* **ос**. В самом деле, в равенствах **(4.6)** и **(4.6*)** проблемы свёртки не возникает в трёх случаях: **1)** $\langle \beta_j \rangle = \langle \alpha_j \rangle$, **2)** $\langle \beta_j \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \rangle$, **3)** $\langle \alpha_j \rangle = \langle \nu_j \rangle$.

В случае **1)** имеем:

$$\langle \alpha_j M \rangle \,\bar{/}\, \langle \alpha_j T \rangle = \langle \alpha_j M \rangle \,\bar{/}\, \langle \alpha_j T^* \rangle = \langle \alpha_j M \rangle. \tag{5.28}$$

И хотя в этом случае фактически **ос** нет, тем не менее, в этом случае условимся считать, что первым **ос** будет формально обнаруживаемый слева направо первый **ос**, поскольку это не приводит ни к какому противоречию, так как

$$\langle \alpha_j R \rangle = \langle \alpha_j R^* \rangle = \langle \alpha_j L \rangle = \langle \alpha_j L^* \rangle = \langle \alpha_j M \rangle. \tag{5.29}$$

Итак, **I** части подоператоров (в дальнейшем — это части операторов от начала до первого **ос** включительно) в рассматриваемом случае характеризуются тем, что до **ос** не требуют для своего свёртывания копродукции, и комбинатор в первом **ос** указывается по *таблице* **1** формально. Значит, верна

Лемма 1. Если подоператоры до первого формального **ОС** тождественны, то в конъюнкции первый комбинатор определяется по *таблице* **1** и имеют место равенства:

$$\frac{\begin{matrix}\langle\, \alpha_j \quad M\,\rangle\\ \langle\, \alpha_j \quad T\,\rangle\end{matrix}}{\langle\, \alpha_j \quad R\,\rangle}\ , \qquad \frac{\begin{matrix}\langle\, \alpha_j \quad T\,\rangle\\ \langle\, \alpha_j \quad M\,\rangle\end{matrix}}{\langle\, \alpha_j \quad R^*\,\rangle}\ , \qquad \frac{\begin{matrix}\langle\, \alpha_j \quad M\,\rangle\\ \langle\, \alpha_j \quad T^*\,\rangle\end{matrix}}{\langle\, \alpha_j \quad L\,\rangle}\ , \qquad \frac{\begin{matrix}\langle\, \alpha_j \quad T^*\,\rangle\\ \langle\, \alpha_j \quad M\,\rangle\end{matrix}}{\langle\, \alpha_j \quad L^*\,\rangle}\ .$$

Обращаем внимание, что на результаты в *лемме* **1** следует смотреть, имея ввиду равенства **(5.28)** и **(5.29)**.

В случае **2)** конъюнкция над **I** частями подоператоров приводит к следующим возможным вариантам:

$$\frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\\ \langle\bar\alpha_j\, T\, W\, T\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j\, \bar I\, W\, R\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\\ \langle\bar\alpha_j\, T\, W\, T^*\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j\, \bar I\, W\, L\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\, M\, W\, T\rangle\\ \langle\bar\alpha_j\, T\, W\, M\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j\, \bar I\, W\, R^*\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\, M\, W\, T^*\rangle\\ \langle\bar\alpha_j\, T\, W\, M\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j\, \bar I\, W\, L^*\rangle}\ , \tag{5.30}$$

$$\frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j MWM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j T^*WT^*\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j IWL\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j MWM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j T^*WT\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j IWR\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j MWT^*\rangle\\ \langle\bar\alpha_j T^*WM\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j IWL^*\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j MWT\rangle\\ \langle\bar\alpha_j T^*WM\rangle\end{matrix}}{\langle\alpha_j IWR^*\rangle}\ , \tag{5.31}$$

$$\frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j TWT\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j \bar I^*WR^*\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j TWT^*\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j \bar I^*WL^*\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j TWM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWT\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j \bar I^*WR\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j TWM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWT^*\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j \bar I^*WL\rangle}\ , \tag{5.32}$$

$$\frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j T^*WT^*\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j I^*WL^*\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j T^*WT\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j I^*WR^*\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j T^*WM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWT^*\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j I^*WL\rangle}\ , \quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j T^*WM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWT\rangle\end{matrix}}{\langle\bar\alpha_j I^*WR\rangle}\ . \tag{5.33}$$

Результаты конъюнкций во всех этих случаях получены формальным применением *таблиц* **1** и **2** по столбцам. При этом в результате записывалось α_j или $\bar\alpha_j$, совпадающее с тем, которое предшествует продукции M в столбце для копродукций из $[I]$.

В том, что при этом получаются правильные результаты, можно убедиться, выполнив выкладки над каждым из полученных результатов, развернув его в конкатенацию двух подоператоров в соответствии с правилом **П 1**.

П 1. Если число $*$ (*звёздочек*) на копродукциях $[I]$ и комбинаторах в первой части подоператора, разлагаемого в конкатенацию, является чётным или нечётным, то имеется соответственно отображение

$$\alpha_j \mapsto \alpha_j \qquad \text{или} \qquad \alpha_j \mapsto \bar{\alpha}_j, \tag{5.34}$$

а остальное определяется по *таблице* **2** и *формулам* **(5.3) — (5.6)**.

Примеры выкладок по проверке правильности результатов в *равенствах* **(5.30)** таковы:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_j \, \bar{I} \, W \, R \rangle &= \langle \alpha_j \, \bar{I} \, W \, \alpha_j \, M \, W \rangle = \langle \alpha_j \, \bar{T}^* \, W \, \alpha_j \, M \, W \rangle = \langle \alpha_j \, M \, W \, M \rangle \, \bar{/} \, \langle \bar{\alpha}_j \, T \, W \, T \rangle, \\
\langle \alpha_j \, \bar{I} \, W \, L \rangle &= \langle \alpha_j \, M \, W \, \alpha_j \, \bar{I} \, W \rangle = \langle \alpha_j \, M \, W \, \alpha_j \, \bar{T}^* \, W \rangle = \langle \alpha_j \, M \, W \, M \rangle \, \bar{/} \, \langle \bar{\alpha}_j \, T \, W \, T^* \rangle, \\
\langle \alpha_j \, \bar{I} \, W \, R^* \rangle &= \langle \alpha_j \, \bar{I} \, W \, \bar{\alpha}_j \, T \, W \rangle = \langle \alpha_j \, \bar{T}^* \, W \, \bar{\alpha}_j \, T \, W \rangle = \langle \alpha_j \, M \, W \, T \rangle \, \bar{/} \, \langle \bar{\alpha}_j \, T \, W \, M \rangle, \\
\langle \alpha_j \, \bar{I} \, W \, L^* \rangle &= \langle \bar{\alpha}_j \, T \, W \, \alpha_j \, \bar{I} \, W \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \, T \, W \, \alpha_j \, \bar{T}^* \, W \rangle = \langle \alpha_j \, M \, W \, T^* \rangle \, \bar{/} \, \langle \bar{\alpha}_j \, T \, W \, M \rangle.
\end{aligned}$$

Разумеется, что аналогичным образом выполнены и проверены правильности результатов в равенствах **(5.31) — (5.33)**, хотя здесь и не представлены, так как они могут служить простым упражнением для желающих. Значит, доказана

Лемма 2. Конъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, имеющими до *фиктивного* **ОС** инвертированные друг другу подоператоры, даёт оператор, начало которого $(\alpha_j$ или $\bar{\alpha}_j)$ совпадает с тем началом подоператора, который в фиктивном столбце имеет продукцию M. В фиктивном столбце результирующий оператор имеет копродукцию из $[\,I\,]$ в соответствии с *таблицей* **2** и комбинатор в **ОС** в соответствии с *таблицей* **1**. Результирующий оператор может быть развёрнут в конкатенацию двух подоператоров по *правилу* **П 1**.

А теперь случай **3)**. В этом случае конъюнкция над **I** частями подоператоров приводит к следующим возможным вариантам:

$$\frac{\langle \alpha_j \, M \, W \, M \rangle \quad \langle \nu_j \, T \, W \, T \rangle}{\langle \alpha_j \, \bar{E}^* \, W \, R \rangle}, \quad \frac{\langle \alpha_j \, M \, W \, M \rangle \quad \langle \nu_j \, T \, W \, T^* \rangle}{\langle \alpha_j \, \bar{E}^* \, W \, L \rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j \, T \, W \, T \rangle \quad \langle \alpha_j \, M \, W \, M \rangle}{\langle \alpha_j \, \bar{E} \, W \, R^* \rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j \, T \, W \, T^* \rangle \quad \langle \alpha_j \, M \, W \, M \rangle}{\langle \alpha_j \, \bar{E} \, W \, L^* \rangle}, \tag{5.35}$$

$$\frac{\langle \alpha_j\, M\, W\, T\rangle \quad \langle \nu_j\, T\, W\, M\rangle}{\langle \alpha_j\, \bar{E}^*\, W\, R^*\rangle}, \quad \frac{\langle \alpha_j\, M\, W\, T^*\rangle \quad \langle \nu_j\, T\, W\, M\rangle}{\langle \alpha_j\, \bar{E}^*\, W\, L^*\rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j\, T\, W\, M\rangle \quad \langle \alpha_j\, M\, W\, T\rangle}{\langle \alpha_j\, \bar{E}\, W\, R\rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j\, T\, W\, M\rangle \quad \langle \alpha_j\, M\, W\, T^*\rangle}{\langle \alpha_j\, \bar{E}\, W\, L\rangle}, \tag{5.36}$$

$$\frac{\langle \alpha_j\, M\, W\, M\rangle \quad \langle \nu_j\, T^*\, W\, T\rangle}{\langle \alpha_j\, E^*\, W\, R\rangle}, \quad \frac{\langle \alpha_j\, M\, W\, M\rangle \quad \langle \nu_j\, T^*\, W\, T^*\rangle}{\langle \alpha_j\, E^*\, W\, L\rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j\, T^*\, W\, T\rangle \quad \langle \alpha_j\, M\, W\, M\rangle}{\langle \alpha_j\, E\, W\, R^*\rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j\, T^*\, W\, T^*\rangle \quad \langle \alpha_j\, M\, W\, M\rangle}{\langle \alpha_j\, E\, W\, L^*\rangle}, \tag{5.37}$$

$$\frac{\langle \alpha_j\, M\, W\, T\rangle \quad \langle \nu_j\, T^*\, W\, M\rangle}{\langle \alpha_j\, E^*\, W\, R^*\rangle}, \quad \frac{\langle \alpha_j\, M\, W\, T^*\rangle \quad \langle \nu_j\, T^*\, W\, M\rangle}{\langle \alpha_j\, E^*\, W\, L^*\rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j\, T^*\, W\, M\rangle \quad \langle \alpha_j\, M\, W\, T\rangle}{\langle \alpha_j\, E\, W\, R\rangle}, \quad \frac{\langle \nu_j\, T^*\, W\, M\rangle \quad \langle \alpha_j\, M\, W\, T^*\rangle}{\langle \alpha_j\, E\, W\, L\rangle}. \tag{5.38}$$

Во всех этих случаях результаты конъюнкций получены формальным применением над столбцами *таблицы* **1** и *таблицы* **3**. В том, что при этом получаются правильные результаты, можно убедиться, выполнив выкладки над каждым из полученных результатов, развернув его в конкатенацию двух подоператоров в соответствии с нижеследующим правилом **П 2**.

П 2. Если число $*$ (*звёздочек*) на копродукциях $[\,E\,]$ и комбинаторах в первой части подоператора, разлагаемого в конкатенацию, является чётным или нечётным, то имеется соответственно отображение

$$\alpha_j \mapsto \nu_j \quad \text{или} \quad \alpha_j \mapsto \alpha_j, \tag{5.39}$$

а остальное определяется по *таблице* **3** и *равенствам* **(5.3)** — **(5.6)**.

Примеры выкладок по проверке правильности результатов в *равенствах* **(5.35)** — **(5.38)** таковы (приводятся выкладки только на *первом* из четырёх случаев):

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{E}^*\, W\, R\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar{E}^*\, W\, \alpha_j\, M\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, \alpha_j\, M\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, M\, W\, M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \nu_j\, T\, W\, T\,\rangle,$$
$$\langle\, \alpha_j\, \bar{E}^*\, W\, R^*\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar{E}^*\, W\, \nu_j\, T\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, \nu_j\, T\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, M\, W\, T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \nu_j\, T\, W\, M\,\rangle,$$
$$\langle\, \alpha_j\, E^*\, W\, R\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, E^*\, W\, \alpha_j\, M\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\, W\, \alpha_j\, M\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, M\, W\, M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \nu_j\, T^*\, W\, T\,\rangle,$$
$$\langle\, \alpha_j\, E^*\, W\, R^*\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, E^*\, W\, \nu_j\, T^*\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\, W\, \nu_j\, T^*\, W\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, M\, W\, T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\, \nu_j\, T^*\, W\, M\,\rangle.$$

Остальные случаи, разумеется, тоже проверены, но выкладки не приводятся, поскольку они могут быть легко восстановлены по приведённым примерам. Значит, доказана

Лемма 3. Конъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, имеющими до *фиктивного* **ос** (включительно) один подоператор $\langle\, \alpha_j\, M\,\rangle$, а другой подоператор $\langle\, \tau_{j\,+\,1}\,\rangle$ или $\langle\, \bar{\tau}_{j\,+\,1}\,\rangle$ (которые рассматриваются как $\langle\, \nu_j\, T^*\,\rangle$ или $\langle\, \nu_j\, T\,\rangle$), даёт результирующий оператор с началом $\langle\, \alpha_j\,\rangle$, имеющим в фиктивном столбце копродукцию из $[\,E\,]$ в в соответствии с *таблицей* **3** и комбинатор в **ос** в соответствии с *таблицей* **1**. Результирующий оператор может быть развёрнут в конкатенацию двух подоператоров по правилу **П 2**.

Исследовав особые случаи свёртки в равенствах **(4.6)** и **(4.6*)**, перед тем, как перейти к проблеме свёртки в этих равенствах, вначале изучим особенности, возникающие в связи с равенствами **(4.7)** и **(4.7*)**, а также с равенством **(4.8)**. (Напомним, что **(4.8*)** совпадает с **(4.8)**)

Итак, равенства **(4.7)** и **(4.7*)** говорят о том, что результат зависит от самого правого столбца с $\bar{T}$ и T^* или с $\bar{T}^*$ и T (такой столбец называется *условный* **ос**), в котором в соответствии с *таблицей* **4** имеем в результирующем операторе копродукцию из $[\,N\,]$. Поэтому, для первых частей операторов (в этом случае до первого **ос** включительно; первым **ос** считается следующий направо **ос** после *условного* **ос**) имеем следующие варианты:

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}\, W\, T\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N\, W\, R\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, T\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N\, W\, R^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}\, W\, T^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N\, W\, L\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, T^*\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N\, W\, L^*\rangle.}\tag{5.40}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}^*\, W\, T\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}\, W\, R\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\, T\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}\, W\, R^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}^*\, W\, T^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}\, W\, L\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\, T^*\rangle\\ \langle\beta_j\, \bar{T}^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}\, W\, L^*\rangle.}\tag{5.41}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, T\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N^*\, W\, R\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}\, W\, T\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N^*\, W\, R^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, T^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N^*\, W\, L\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}\, W\, T^*\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, N^*\, W\, L^*\rangle.}\tag{5.42}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, T\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}^*\, W\, R\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, T\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}^*\, W\, R^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, T^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}^*\, W\, L\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, T^*\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, \bar{N}^*\, W\, L^*\rangle.}\tag{5.43}$$

Формально полученные результаты выкладок во всех этих случаях **(5.40)** — **(5.43)** должны быть интерпретированы так:

$$\left.\begin{array}{l}\langle\gamma_j NWR\rangle = \langle\beta_j\bar{T}W\alpha_j T^*W\rangle,\ \ \langle\gamma_j NWR^*\rangle = \langle\beta_j\bar{T}W\beta_j\bar{T}W\rangle,\\ \langle\gamma_j NWL\rangle = \langle\alpha_j T^*W\beta_j\bar{T}W\rangle,\ \ \langle\gamma_j NWL^*\rangle = \langle\beta_j\bar{T}W\beta_j\bar{T}W\rangle.\end{array}\right\} \quad (5.44)$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle\gamma_j \bar{N}WR\rangle = \langle\beta_j\bar{T}^*W\alpha_j TW\rangle,\ \ \langle\gamma_j \bar{N}WR^*\rangle = \langle\beta_j\bar{T}^*W\beta_j\bar{T}^*W\rangle,\\ \langle\gamma_j \bar{N}WL\rangle = \langle\alpha_j TW\beta_j\bar{T}^*W\rangle,\ \ \langle\gamma_j \bar{N}WL^*\rangle = \langle\beta_j\bar{T}^*W\beta_j\bar{T}^*W\rangle.\end{array}\right\} \quad (5.45)$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle\gamma_j N^*WR\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}W\alpha_j\bar{T}W\rangle,\ \ \langle\gamma_j N^*WR^*\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}W\beta_j T^*W\rangle,\\ \langle\gamma_j N^*WL\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}W\alpha_j\bar{T}W\rangle,\ \ \langle\gamma_j N^*WL^*\rangle = \langle\beta_j T^*W\alpha_j\bar{T}W\rangle.\end{array}\right\} \quad (5.46)$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle\gamma_j \bar{N}^*WR\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}^*W\alpha_j\bar{T}^*W\rangle,\ \ \langle\gamma_j \bar{N}^*WR^*\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}^*W\beta_j TW\rangle,\\ \langle\gamma_j \bar{N}^*WL\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}^*W\alpha_j\bar{T}^*W\rangle,\ \ \langle\gamma_j \bar{N}^*WL^*\rangle = \langle\beta_j TW\alpha_j\bar{T}^*W\rangle.\end{array}\right\} \quad (5.47)$$

Интерпретация **(5.44)** – **(5.47)** — это результат прямых выкладок над операторами в вариантах **(5.40)** — **(5.43)**, который может быть сформулирован в виде правила **П 3**, которое следует ниже.

П 3. Если число $*$ (**звёздочек**) на копродукциях $[\,N\,]$ и комбинаторах в *первой* части подоператора, разлагаемого в конкатенацию, является чётным или нечётным, то имеется соответственно:

разложение $\langle\,\gamma_j\,[\,N\,]\,\rangle$ на две части в соответствии с *таблицей* **4**;

выбор и повтор *первой* (если комбинатор *первого* типа) или *второй* (если комбинатор *второго* типа) части из разложения $\langle\,\gamma_j\,[\,N\,]\,\rangle$.

Замечание 6. Чтобы лучше уяснить себе это правило, надо сопоставить сказанное в нём с результатами в развёртках **(5.44)** — **(5.47)**, так как в этом правиле сформулировано то, что формально представлено в развёртках.

Теперь можем сказать, что нами доказана следующая

Лемма 4. Конъюнкция над первыми частями пары согласованных подоператоров, имеющими до первого **ос** *условный* **ос**, даёт результирующий подоператор, получаемый в результате формального прямого применения *таблицы* **1** и *таблицы* **4**, интерпретация которой отражена в **П 3**.

Обратимся к особенностям, связанным с *равенством* **(4.8)**, которое говорит о том, что, как и в *равенствах* **(5.7)** и **(5.7*)**, результат зависит от самого правого столбца с продукциями $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$ (такой столбец будет называться *почти* **ОС**), в котором в соответствии с *таблицей* **4** имеем в результирующем операторе одну из копродукций $\bar{O}$ или $\bar{O}^*$. Поэтому, для первых частей операторов (в этом случае до первого **ОС** включительно: первым **ОС** считается следующий направо **ОС** после *почти* **ОС**) имеем следующие варианты:

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}\,W\,M\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}^*\,W\,T\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}\,W\,R\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}\,W\ \ T\,\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}^*\,W\,M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}\,W\ \ R^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}\,W\,M\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}^*\,W\,T^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}\,W\,L\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}\,W\,T^*\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}^*\,W\,M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}\,W\,L^*\rangle,} \tag{5.48}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,M\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}\,W\,T\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}^*\,W\,R\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,T\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}\,W\,M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}^*\,W\,R^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,M\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}\,W\,T^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}^*\,W\,L\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,T^*\rangle\\ \langle\beta_j\,\bar{T}\,W\,M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\,\bar{O}^*\,W\,L^*\rangle.} \tag{5.49}$$

Интерпретация полученных формальных результатов в **(5.48)** и **(5.49)** такова:

$$\left.\begin{array}{ll}\langle\gamma_j\bar{O}WR\rangle=\langle\nu_j\bar{T}W\alpha_j\bar{T}W\rangle, & \langle\gamma_j\bar{O}WR^*\rangle=\langle\nu_j\bar{T}W\beta_j\bar{T}^*W\rangle,\\ \langle\gamma_j\bar{O}WL\rangle=\langle\alpha_j\bar{T}W\nu_j\bar{T}W\rangle, & \langle\gamma_j\bar{O}WL^*\rangle=\langle\beta_j\bar{T}^*W\nu_j\bar{T}W\rangle.\end{array}\right\} \tag{5.50}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\langle\gamma_j\bar{O}^*W\,R\rangle=\langle\nu_j\bar{T}^*W\alpha_j\bar{T}^*W\rangle, & \langle\gamma_j\bar{O}^*WR^*\rangle=\langle\nu_j\bar{T}^*W\beta_j\bar{T}W\rangle,\\ \langle\gamma_j\bar{O}^*WL\rangle=\langle\alpha_j\bar{T}^*W\nu_j\bar{T}^*W\rangle, & \langle\gamma_j\bar{O}^*WL^*\rangle=\langle\beta_j\bar{T}W\nu_j\bar{T}^*W\rangle.\end{array}\right\} \tag{5.51}$$

Интерпретация **(5.50)**, **(5.51)** — результат прямых выкладок над операторами в вариантах **(5.48)**, **(5.49)**.

Таким образом, доказана нижеследующая

Лемма 5. Конъюнкция над первыми частями пары согласованных подоператоров, имеющими до первого **ОС** *почти* **ОС**, даёт результирующий подоператор, получаемый в результате формального прямого применения *таблицы* **1** и *таблицы* **4**, интерпретация которого такова. Результирующий подоператор разлагается в конкатенацию в полном соответствии с *таблицей* **1**, равенствами **(5.3)** — **(5.6)**, *таблицей* **4** и с учётом

того, что
$$\bar{O} \hookrightarrow \bar{T}, \quad \bar{O}^* \hookrightarrow \bar{T}^*, \quad \gamma_j \hookrightarrow \nu_j. \tag{5.52}$$

Теперь мы готовы перейти к равенствам **(4.6)** и **(4.6*)**, когда проблема свёртки в них действительно есть, то есть первый выход слева направо на столбец с M и T или T^* означает выход на первый **ОС**. В этом случае рассматриваем первые части подоператоров, считая, что у них начала в одном и том же столбце.

Замечание 7. Требование, чтобы начало у обоих операторов было в одном и том же столбце, предполагалось в предыдущих двух случаях, которые охвачены *леммами* **4** и **5**.

Замечание 8. Требование, чтобы у обоих операторов было общее начало, означает, что более короткий оператор должен быть удлинён, а такое удлинение можно выполнить, используя равенства
$$\langle \tau_j \rangle = \langle \nu_{j\,-1}\, T^* \rangle,\ \langle \bar{\tau}_j \rangle = \langle \nu_{j\,-1}\, T \rangle,\ \langle \nu_j \rangle = \langle \nu_{j\,-1}\, \bar{T} \rangle = \langle \nu_{j\,-1}\, \bar{T}^* \rangle = \langle \nu_{j\,-1}\, M \rangle$$
и допуская, что удлиняемый оператор может начинаться с $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$ (перед которым подразумевается начало ν, но которое не записывается). Обратим внимание, что в *случае* **3)**, рассмотренном выше, варианты наличия в столбце продукции M и τ или $\bar{\tau}$ нами уже рассмотрены, а потому такие случаи исключаются.

В рассматриваемом нами случае, разумеется, возможные варианты следования столбцов и наличие или отсутствие того или иного варианта до **ОС** безразличны в силу раздельного и независимого рассмотрения столбцов в исследуемом случае, поэтому мы приводим весь возможный перечень из *таблицы* **4**, вынося на начало столбцы **13** – **16** (как возможные начальные в соответствии с *замечанием* **8**), а в конце (*четыре* столбца) приведены в соответствии с *таблицей* **1** (как возможные варианты для **ОС**):
$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
T^* & \bar{T} & T & \bar{T}^* & T & \bar{T} & T^* & \bar{T}^* & \bar{T} & M & \bar{T}^* & M & \bar{T} & \bar{T}^* & M & T & M & T^* \\
\bar{T} & T^* & \bar{T}^* & T & \bar{T} & T & \bar{T}^* & T^* & M & \bar{T} & M & \bar{T}^* & \bar{T}^* & \bar{T} & T & M & T^* & M \\
\hline
N & N^* & \bar{N} & \bar{N}^* & P & P^* & \bar{P} & \bar{P}^* & Z & Z^* & \bar{Z} & \bar{Z}^* & \bar{O} & \bar{O}^* & R & R^* & L & L^*
\end{array} \tag{5.53}$$

Особое замечание 1. Следует иметь ввиду, что в *таблице* **4** (в **9**–ом и **10**–ом столбцах) имеем копродукции, означающие несогласованность операторов, которая может возникнуть в результате удлинения операторов: копродукция O означает, что в столбце имелись продукции T и τ или $\bar{\tau}$ и T^*, а копродукция O^* означает, что в столбце имелись продукции T^* и $\bar{\tau}$ или τ и T. Поэтому в свёртках и развёртках следует иметь ввиду, что

$$\langle \bar{/} \rangle \begin{array}{l} \langle \alpha_j \ T \rangle \\ \underline{\langle \beta_j \ T^* \rangle} \\ \langle \gamma_j \ \ O \rangle \end{array} = \langle \alpha_j \, \beta_j \rangle \, , \qquad \langle \bar{/} \rangle \begin{array}{l} \langle \alpha_j \ T^* \rangle \\ \underline{\langle \beta_j \ \ T \rangle} \\ \langle \gamma_j \ \ O^* \rangle \end{array} = \langle \beta_j \, \alpha_j \rangle \, .$$

Последнее означает, что копродукции O и O^* должны восприниматься и как комбинаторы *первого* и *второго* типа соответственно. Хотя столбец, в котором имеется результирующая копродукция O или O^*, тоже будет называться *почти* **ос**, тем не менее, сказанное в этом *замечании* не должно опускаться из виду. Как это будет выглядеть практически, мы увидим ниже на *первом* иллюстрационном примере из **5.3.2**.

Чтобы понять, что определения введены без противоречий, достаточно принять в соответствии со всем нашим стилем рассуждений, что строки A и B суть *первая* и *вторая* строки до столбцов для **ос** в **(5.53)**, то есть:

$$\begin{array}{l} A = T^* \ \bar{T} \ \ T \ \ \bar{T}^* \ T \ \ \bar{T} \ \ T^* \ \bar{T}^* \ \bar{T} \ \ M \ \bar{T}^* \ M \ \bar{T} \ \ \bar{T}^*, \\ B = \bar{T} \ \ T^* \ \bar{T}^* \ T \ \ \bar{T} \ \ T \ \ \bar{T}^* \ T^* \ M \ \bar{T} \ \ M \ \bar{T}^* \ \bar{T}^* \ \bar{T}, \end{array} \qquad (5.54)$$

а C' — это результат конъюнкции в копродукциях над соответствующими столбцами (в соответствии с *таблицей* **4**), то есть:

$$C' = N \ N^* \ \bar{N} \ \bar{N}^* \ P \ P^* \ \bar{P} \ \bar{P}^* \ Z \ Z^* \ \bar{Z} \ \bar{Z}^* \ \bar{O} \ \bar{O}^*. \qquad (5.55)$$

Замечание 9. Строка W, символизирующая тождественное преобразование, не упоминается в строках A, B и C', но (в молчаливой форме) она не исключается и это нас не должно беспокоить, поскольку W не вносит никаких неприятностей.

Переход от копродукций к продукциям в **(5.55)** по **(5.17)** и **(5.52)** даёт:

$$C = \bar{T} \ \bar{T} \ \bar{T}^* \ \bar{T}^* \ \bar{T} \ \bar{T} \ \bar{T}^* \ \bar{T}^* \ \bar{T} \ \bar{T} \ \bar{T}^* \ \bar{T}^* \ \bar{T} \ \bar{T}^*. \qquad (5.56)$$

Результат конъюнкций над подоператорами в строках A и B по столбцам (в соответствии с *равенствами* **(4.1)** — **(4.3)**, **(4.1*)** — **(4.3*)**) даёт тот же результат **(5.56)** (*равенства* **(4.4)**, **(4.5)**, **(4.4*)**, **(4.5*)** соответствуют тождественному преобразованию и в соответствии с *замечанием* **9** не исключаются). Значит верна

Лемма 6. Конъюнкция над первыми частями пары согласованных подоператоров, не имеющими *фиктивных*, *условных* и *почти* **ос**, даёт результирующий оператор, имеющий комбинатор, определяемый *таблицей* **1**, и копродукции, определяемые *таблицей* **4**. Развёртка результирующего оператора выполняется в обратной последовательности.

Замечание 10. *Лемма* **6** является обобщением *леммы* **1**.

Замечание 11. Рассуждения, предшествующие формулировке *леммы* **6**, показывают, что вместо строки W могли бы в *леммах* **2** – **5** вести рассуждения о строках A и B из **(5.54)**, включающих и W, так как видно, что особого рассмотрения требуют лишь **ос**, *фиктивные* **ос**, *условные* **ос** и *почти* **ос**.

Подтверждением *замечанию* **11** могут служить нижеследующие примеры, к которым можно применить *леммы* **3** и **2** соответственно:

$$\begin{array}{lllllll} \langle\tau & M & T & \bar{T} & T^* & M\,\rangle \\ \langle & \bar{\tau} & T & T & \bar{T}^* & T\,\rangle \\ \hline \langle\tau & \bar{E}^* & T & P^* & \bar{P} & R\,\rangle, \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \langle\bar{\tau} & M & T^* & T & T^* & T^*\,\rangle \\ \langle\tau & T^* & \bar{T}^* & \bar{T} & T^* & M\,\rangle \\ \hline \langle\bar{\tau} & I & \bar{P} & P & T^* & L^*\,\rangle. \end{array}$$

Каждый из результирующих операторов в этих примерах имеет запись в виде нижеследующей конкатенации, которая получается в результате использования тех же *таблиц* **1** – **4** и **(5.17)**:

$$\langle\,\tau\,\bar{E}^*\,T\,P^*\,\bar{P}\,R\,\rangle \;=\; \langle\,\tau\,\bar{E}^*\,T\,P^*\,\bar{P}\,\tau\,M\,T\,\bar{T}\,T^*\,\rangle \;=\; \langle\,\tau\,\bar{T}^*\,T\,\bar{T}\,\bar{T}^*\,\tau\,M\,T\,\bar{T}\,T^*\,\rangle,$$

$$\langle\,\bar{\tau}\,I\,\bar{P}\,P\,T^*\,L^*\,\rangle \;=\; \langle\,\tau\,T^*\,\bar{T}^*\,\bar{T}\,T^*\,\bar{\tau}\,I\,\bar{P}\,P\,T^*\,\rangle \;=\; \langle\,\tau\,T^*\,\bar{T}^*\,\bar{T}\,T^*\,\bar{\tau}\,\bar{T}\,\bar{T}^*\,\bar{T}\,T^*\,\rangle,$$

при этом одновременно по этим конкатенациям легко понять, что верными являются результирующие операторы свёрток.

Учитывая *замечание* **11** и обозначая результирующие копродукции строк A и B через строку C', *равенства* **(5.3)** – **(5.6)** позволяют нам утверждать, что будут верными равенства:

$$\langle\,\alpha_j\,M\,A\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,T\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,R\,C'\,\rangle, \tag{5.57}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T\,A\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,R^*\,C'\,\rangle, \tag{5.58}$$

$$\langle\,\alpha_j\,M\,A\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,T^*\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,L\,C'\,\rangle, \tag{5.59}$$

$$\langle\,\alpha_j\,T^*\,A\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,L^*\,C'\,\rangle, \tag{5.60}$$

где копродукции C' могут быть заменены и продукциями C в соответствии с **(5.17)** и **(5.52)**.

Но используя **(5.57)** и *таблицу* **1**, можем записать верные равенства:

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, M\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T\, B\, T\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, R\,\rangle, \tag{5.61}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, T\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T\, B\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, R^{*}\,\rangle, \tag{5.62}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, M\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T\, B\, T^{*}\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, L\,\rangle, \tag{5.63}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, T^{*}\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T\, B\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, L^{*}\,\rangle, \tag{5.64}$$

где уже строка C' должна быть записана только через копродукции, так как

$$\langle\gamma_j\, R\, C'\, R\rangle \;=\; \langle\gamma_j\, R\, C'\, \alpha_j\, M\, A\rangle, \quad \langle\gamma_j\, R\, C'\, R^{*}\rangle \;=\; \langle\gamma_j\, R\, C'\, \beta_j\, T\, B\rangle, \tag{5.65}$$

$$\langle\gamma_j\, R\, C'\, L\rangle \;=\; \langle\alpha_j\, M\, A\, \gamma_j\, R\, C'\rangle, \quad \langle\gamma_j\, R\, C'\, L^{*}\rangle \;=\; \langle\beta_j\, T\, B\, \gamma_j\, R\, C'\rangle. \tag{5.66}$$

Сказанное относительно **(5.57)**, разумеется, верно и для *равенств* **(5.58)** – **(5.60)**.

Самый правый комбинатор в записи результирующего оператора называется *раскрываемым.* Такое название связано с развёрткой оператора в виде конкатенации двух подоператоров, которые определяются этим комбинатором. Раскрываемый комбинатор в конъюнктивной свёртке и развёртке двух операторов играет такую же роль, что и комбинатор в первом **ОС** первой части оператора.

Завершением доказательства *теоремы* **1** является обоснованная приведёнными выше рассуждениями

Лемма 7. Конъюнкция над парой согласованных операторов даёт результирующий оператор, первая часть которого определяется *леммами* **1** – **6**, а вторая часть простым формальным применением *таблиц* **1** и **4**. Развёртка результирующего оператора выполняется применением *таблиц* **1** – **4** в обратной последовательности, а в отображениях **(5.34)** или **(5.39)**, или **П 3** число звёздочек считается в копродукциях $[I]$ или $[E]$, или $[N]$ соответственно и в раскрываемом комбинаторе.

5.3.1 Конструктивный способ формирования свёртки согласованных операторов и её интерпретация.

Теперь, используя конструктивный характер *лемм* **1** – **7**, можно *теорему* **1**, доказанную с помощью этих лемм, сформулировать в виде правила, позволяющего сворачивать конъюнкцию (строить свёртку) над парой согласованных операторов.

Правило конъюнктивной свёртки. Пусть заданы два согласованных оператора в системе Q_2, записанные столбиком (то есть выравнивание справа), над которыми выполняется конъюнкция с целью их свёртки в один оператор в расширенной системе продукций **(5.27)**. Эти операторы, если не имеют общего начала, должны быть выравнены так, как это указано в *замечании* **8** (за тем исключением, которое указано в нём). Затем определяется: имеется ли *фиктивный* **ос** и (если он есть) его тип, рассмотренный в *леммах* **2** и **3**. После этого, конъюнкция над столбцами заданных согласованных операторов выполняется чисто формально с использованием *таблиц* **1** и **4**, а в случае наличия *фиктивного* **ос**, то с использованием (в зависимости от типа) *таблиц* **2** или **3**.

Свёртка *двух* операторов, полученная по упрощённому правилу конъюнкции (*см.* **4.6.1**), не содержит **ос**. Такую свёртку будем в дальнейшем называть *тривиальной* свёрткой, сохранив название свёртки (за *нетривиальной* свёрткой), то есть за такой свёрткой, которая содержит **ос**.

Для правильной интерпретации результирующего оператора конъюнктивной свёртки следует отдавать себе отчёт, что (в соответствии с изложенным выше правилом конъюнктивной свёртки) развёртка оператора, содержащего не более одной из копродукций $[\,I\,]$, $[\,E\,]$, возможна и для неё верно

Правило интерпретации конъюнктивной свёртки. Смысл оператора свёртки вытекает из его развёртки в виде конкатенации двух операторов, из которых хотя бы *один* является оператором *тривиальной* свёртки. Если же *другой* из них является оператором свёртки, то к нему вновь может быть применён процесс развёртки и так далее до тех пор, пока не останется *ни одной* свёртки.

Каждая развёртка выполняется по раскрываемому комбинатору и *таблицам* **1 — 4**. При этом требуется однозначно различать начало развёртываемого оператора по *фиктивному* **ос**, признаком которого являются копродукции из $[\,I\,]$ или $[\,E\,]$. Для выполнения развёртки по свёртке, кроме раскрываемого комбинатора, требуется ориентироваться на самый правый из *почти* **ос** или *условных* **ос**, а если таковых нет, то на *фиктивный* **ос**. Если и *фиктивного* **ос** нет, то развёртка выполняется лишь по раскрываемому комбинатору. Во всех этих случаях используются *леммы*, то есть должны быть учтены **П 1**, **П 2**, **П 3** и особенности *почти* **ОС**. При этом, в каждой свёртке правее раскрываемого комбинатора, копродукции должны быть заменены на продукции по соответствующим соотношениям **(5.17)** и **(5.52)**. Такая замена должна быть выполнена для всех копродукций и после того, как выполнена развёртка по последнему раскрываемому комбинатору.

5.3.2 Иллюстрационные примеры к правилу конъюнктивной свёртки и её развёртки.

Начнём с конъюнкции над двумя согласованными операторами, требующими выравнивание начал (и приводящие к *особому замечанию* **1**):

$$\left.\begin{array}{l} \langle\tau \quad M \quad T^* \quad \bar T \quad M \quad T \quad T^* \quad M\rangle \\ \langle \qquad\quad \bar\tau \quad T \quad T \quad T \quad M \quad T^*\rangle \end{array}\right\} = \cfrac{\left\{\begin{array}{l} \langle\tau \quad M \quad T^* \quad \bar T \quad M \quad T \quad T^* \quad M\rangle \\ \langle\bar T \quad M \quad T \quad T \quad T \quad T \quad M \quad T^*\rangle \end{array}\right.}{\langle N \quad M \quad O^* \quad P^* \quad R \quad T \quad L^* \quad L\rangle.} \tag{5.67}$$

Развернём результирующий оператор **(5.67)**, преследуя две цели:

1) развёртка покажет, как следует понимать запись этого оператора;

2) по развёртке можно подтвердить дополнительными выкладками верность результата.

Итак:

$$\langle\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\, T\, L^*\, L\,\rangle = \langle\, \tau\, M\, T^*\, \bar T\, M\, T\, T^*\, .\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\, T\, L^*\,\rangle. \tag{5.68}$$

Замечание 12. Здесь (и в дальнейшем) точка между подоператорами является разделителем, позволяющим проще отличать один подоператор от другого: он может рассматриваться как символ конкатенации.

Развернём теперь подоператор из **(5.68)**:

$$\begin{aligned} \langle\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\, T\, L^*\,\rangle &= \langle\, \bar T\, M\, T\, T\, T\, T\, .\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\, T\,\rangle = \\ &= \langle\, \bar\tau_2\, T\, T\, T\, .\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\, T\,\rangle, \end{aligned} \tag{5.69}$$

а из **(5.69)** — подоператор до раскрываемого комбинатора:

$$\langle\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\,\rangle = \langle\, N\, M\, O^*\, P^*\, .\, T^*\, M\, T^*\, \bar T\,\rangle = \langle\, N\, M\, O^*\, \bar T\, \tau\, M\, T^*\, \bar T\,\rangle$$

и

$$\langle\, N\, M\, O^*\,\rangle = \langle\, \bar T\, M\, .\, T^*\, M\,\rangle = \langle\, \nu_1\, \tau\, M\,\rangle = \langle\, \tau\, M\, \bar T^*\,\rangle, \tag{5.70}$$

что записано с учётом *особого замечания* **1**, а поэтому:

$$\langle\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, M\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \tau\, M\, T^*\, \bar{T}\,\rangle.$$

А это значит, что **(5.69)** имеет конкатенационную запись:

$$\langle\, N\, M\, O^*\, P^*\, R\, T\, L^*\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}_2\, T\, T\, T\, (\tau\, M\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \tau\, M\, T^*\, \bar{T})\, T\,\rangle$$

и окончательно для **(5.68)** имеем:

$$\langle NMO^*P^*RTL^*L\rangle = \langle \tau MT^*\bar{T}MTT^*\; \bar{\tau}_2TTT(\tau M\bar{T}^*\bar{T}\tau MT^*\bar{T})T\rangle. \tag{5.71}$$

Замечание 13. *Круглые скобки* в подоператорах не должны нас смущать: они снимают неопределённость, так как показывают, к какому подоператору применяется продукция.

Теперь, когда мы выяснили, как следует понимать запись оператора **(5.67)**, обратимся к проверке правильности наших результатов. Начнём с проверки правильности результата **(5.70)**. Он означает в прямых выкладках:

$$\langle\, \alpha_2\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, M\, T^*\,\rangle,\;\; \langle\, \beta_2\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}_2\,\rangle,\;\; \langle\, \gamma_2\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_2\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_2\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, M\, \bar{T}^*\,\rangle.$$

Но тогда мы имеем:

$$\begin{gathered}
\langle\, \alpha_4\,\rangle = \langle\, \alpha_2\, \bar{T}\, M\,\rangle,\; \langle\, \beta_4\,\rangle = \langle\, \beta_2\, T\, T\,\rangle,\; \langle\, \gamma_4\,\rangle = \langle\, \alpha_4\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_4\,\rangle = \langle\, \alpha_2\, \bar{T}\, M\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_2\, T\, T\,\rangle = \\
= \langle\, \gamma_2\, \bar{T}\, \alpha_2\, \bar{T}\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, M\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \tau\, M\, T^*\, \bar{T}\,\rangle, \\
\langle\, \alpha_6\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_4\, T\, T^*\,\rangle,\;\; \langle\, \beta_6\,\rangle \;=\; \langle\, \beta_4\, T\, M\,\rangle,\;\; \langle\, \gamma_6\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_6\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_6\,\rangle \;= \\
= \langle\, \beta_4\, T\, \gamma_4\, T\,\rangle \;=\; \langle\, \tau_2\, T\, T\, T\, (\, \tau\, M\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \tau\, M\, T^*\, \bar{T}\,)\, T\,\rangle
\end{gathered} \tag{5.72}$$

и окончательно

$$\langle\, \gamma_7\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_7\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_7\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_6\, M\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_6\, T^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_6\, \gamma_6\,\rangle,$$

что совпадает с **(5.71)**.

Теперь в примере **(5.67)** вставим между последним и предпоследним ещё один столбец, который приводил бы к *условному* **ОС** и посмотрим, как в этом случае изменяться наши выкладки. Формально это выглядит так:

$$\left.\begin{array}{l}
\langle \tau\; M\; T^*\; \bar{T}\; M\;\;\; T\; T^*\; T^*\; M\rangle \\
\langle \qquad\;\; \bar{\tau}\;\; T\;\; T\;\;\; T\;\; M\;\; \bar{T}\;\; T^*\rangle
\end{array}\right\} \;=\; \begin{array}{c}
\left\{\begin{array}{l}
\langle \tau\;\; M\;\; T^*\;\; \bar{T}\;\; M\;\; T\;\; T^*\;\; T^*\;\; M\rangle \\
\langle \bar{T}\;\; M\;\; T\;\; T\;\; T\;\; T\;\; M\;\; \bar{T}\;\; T^*\rangle
\end{array}\right. \\ \hline
\langle N\;\; M\;\; O^*\;\; P^*\;\; R\;\; T\;\; L^*\;\; N\;\; L\rangle
\end{array} \tag{5.73}$$

и эта формальная выкладка верна и её следует понимать так:

$$\langle NMO^*P^*RTL^*NL\rangle = \langle \tau MT^*\bar{T}MTT^*T^*\bar{\tau}_2TTTM\bar{T}\rangle, \tag{5.74}$$

поскольку оператор в левой части имеет вид и разлагается:

$$\langle\, \gamma_6\, N\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_6\, T^*\, \beta_6\, \bar{T}\,\rangle.$$

Рассмотрим теперь другой пример, в котором не требуется выравнивать начала и в котором имеется *условный* **ОС**:

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau\ T\ \ M\ \ \ T\ \ T^*\ M\ \ \ T\,\rangle \\ \underline{\langle\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \tau\ \ \ M\ \ \bar{T}\ \ T^*\ \ M\,\rangle} \\ \langle\, \tau\ T\ \ E^*\ R^*\ \ N\ \ \ L\ \ R^*\,\rangle \end{array} \;=\; \langle\, \tau\, T\, E^*\, R^*\, N\, L\, \nu_1\, T^*\, M\, \bar{T}\, T^*\,\rangle\ , \tag{5.75}$$

так как на результирующий оператор следует смотреть с учётом *леммы* **7**:

$$\langle\, \gamma\, E^*\, C'\, R^*\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma\, E^*\, C'\, \nu\, T^*\, B\,\rangle.$$

Первый подоператор в **(5.75)** должен рассматриваться (в соответствии с **П 3**) так:

$$\langle\, \tau\, T\, E^*\, R^*\, N\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_3\, N\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_3\, T^*\, \beta_3\, \bar{T}\,\rangle,$$

где

$$\langle\, \tau\, T\, E^*\, R^*\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_3\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_3\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \beta_3\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \tau_2\, M\,\rangle.$$

Значит,

$$\langle\, \tau\, T\, E^*\, R^*\, N\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T\, T^*\, \tau_2\, M\, \bar{T}\,\rangle.$$

Окончательно имеем:

$$\langle\, \tau\, T\, E^*\, R^*\, N\, L\, R^*\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T\, T^*\, \tau_2\, M\, \bar{T}\, \tau_2\, M\, \bar{T}\, T^*\,\rangle.$$

В нижеследующем заключительном примере с началом $\langle\, \alpha_1\,\rangle$ и $\langle\, \bar{\alpha}_1\,\rangle$, то есть с *фиктивным* **ОС** и с *почти* **ОС** (признак $\bar{O}$) имеем результирующий оператор с развёрткой:

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau\ \ \bar{T}\, M\ \ T\ \ \bar{T}\ \ T^*\, M\, M\,\rangle \\ \underline{\ \langle\, \bar{\tau}\, T\, T^*\, T^*\, \bar{T}^*\, T^*\ \ T\ \ T^*\,\rangle} \\ \ \langle\, \tau\bar{T}\ \ I\ \ \ O\ \ \bar{O}\, T^*\ \ R\ \ \ L\,\rangle \end{array} \;=\; \langle\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\, M\, \tau\, \bar{T}\, I\, O\, \bar{O}\, T^*\, R\,\rangle, \tag{5.76}$$

так как результирующий оператор (в соответствии с *леммой* **7**) развёртывается так:

$$\langle\, \alpha_1\, I\, C\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_1\, M\, A\, \alpha_1\, I\, C\,\rangle.$$

Второй подоператор в **(5.76)** должен рассматриваться (в соответствии с *леммой* **5**) так:

$$\langle\, \gamma_3\, \bar{O}\, W\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \nu_3\, \bar{T}^*\, W\, \alpha_3\, \bar{T}\, W\,\rangle,$$

что означает:

$$\langle\, \tau\, \bar{T}\, I\, O\, \bar{O}\, T^*\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \nu_3\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\,\rangle \;=\; \langle\, \tau_5\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\,\rangle,$$

следовательно, окончательно имеем:

$$\langle\, \tau\, \bar{T}\, I\, O\, \bar{O}\, T^*\, R\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\, M\, \tau_5\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\,\rangle.$$

Разумеется, что такой же результат развёртки получили бы, ведя рассуждения несколько иначе. Например, на результирующий оператор **(5.76)** можно смотреть и так:

$$\langle\, \gamma_3\, \bar{O}\, C\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_3\, \bar{T}\, A\, \gamma_3\, \bar{O}\, C\,\rangle,$$

где

$$\langle\, \alpha_3\, \bar{T}\, A\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\, M\,\rangle$$

и есть *первый* оператор развёртки, а *второй*

$$\langle\, \gamma_3\, \bar{O}\, C\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_3\, \bar{O}\, T^*\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_3\, \bar{O}\, T^* \alpha_3\, \bar{T}\, T^*\,\rangle \;=\; \langle\, \nu_3\, \bar{T}\, T^*\, \alpha_3\, \bar{T}\, T^*\,\rangle,$$

$$\langle\, \nu_3\, \bar{T}\, T^*\,\rangle \;=\; \langle\, \tau_5\,\rangle, \quad \langle\, \alpha_3\, \bar{T}\, T^*\,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, \bar{T}\, M\, T\, \bar{T}\, T^*\,\rangle.$$

5.4 Результаты дизъюнкций над операторами в расширенной системе продукций

Теория, развитая для конъюнкций над операторами в расширенной системе продукций, может быть почти дословно повторена и для дизъюнкций, так как эти две операции являются двойственными (см. *таблицу* **5** из *главы* **I**).

Но поскольку — это всё же лишь почти дословное повторение, а, на самом деле, точнее было бы говорить об аналогии, то, учитывая некоторые особенности, например, использование отрицательных комбинаторов при том же множестве копродукций, следует всё же аккуратно изложить теорию для дизъюнкций с той же полнотой, что и для конъюнкций.

Докажем, что верна следующая

Теорема 2. Если в системе Q_2 заданы два согласованных оператора, то их дизъюнкция всегда сворачивается в один оператор в расширенной системе продукций

$$Q_2 \cup Q_k \cup K_D. \tag{5.77}$$

Обоснование этой теоремы состоит в доказательстве ряда лемм, имеющих конструктивный характер, так что и всё обоснование *теоремы* **2** становится конструктивным: по заданным согласованным операторам мы строим дизъюнктивную свёртку.

Принятое в **п. 5.3** определение для строки W сохраняет свою силу и здесь. В **п. 4.6.2** мы обращали внимание на то, что проблема свёртки для дизъюнкции может возникнуть лишь в случае выхода на равенства **(4.32)** или **(4.32*)**. В тех случаях, когда она возникает, те столбцы, которые приводят к этому, называются *особыми* столбцами в дизъюнкции (сокращённо **ос** без уточнения, когда контекстуально понятно) и их счёт в операторах идёт слева направо, начиная с **1**. В таких столбцах имеем продукции M и $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$. Столбцы такого типа за номерами **1 — 4** имеются во всех *таблицах* **5 — 7** и в соответствии с принятыми определениями они приводят либо к отрицательным комбинаторам (*таблица* **5**), либо к копродукциям $[\,I\,]$ (*таблица* **6**) и $[\,E\,]$ (*таблица* **7**). Такое различие в результате связано с тем, что *первый* выход на столбец с M и $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$ ещё не означает, что это **ос**. Имеются исключения, то есть *фиктивные* **ос**. Действительно, в равенствах **(4.32)** и **(4.32*)** проблемы свёртки не возникает в трёх случаях: **1)** $\langle\,\beta_j\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\rangle$, **2)** $\langle\,\beta_j\,\rangle = \langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle$, **3)** $\langle\,\alpha_j\,\rangle = \langle\,\bar{\nu}_j\,\rangle$.

В случае **1)** имеем:

$$\langle\,\alpha_j\, M\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\,\alpha_j\, \bar{T}\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, M\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\,\alpha_j\, \bar{T}^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, M\,\rangle. \tag{5.78}$$

И хотя в этом случае фактически **ос** нет, тем не менее, в этом случае условимся считать, что первым **ос** будет формально обнаруживаемый слева направо первый **ос**, так как это не приводит ни к какому противоречию, потому что

$$\langle\,\alpha_j\, \bar{R}\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, \bar{R}^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, \bar{L}\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, \bar{L}^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, M\,\rangle. \tag{5.79}$$

Итак, *первые* части подоператоров (это части операторов от начала до первого **ОС** включительно и в дальнейшем тоже) в рассматриваемом случае характеризуются тем, что до **ОС** не требуют для своего свёртывания копродукции, и отрицательный комбинатор в первом **ОС** указывается по *таблице* **5** формально. Значит, верна

Лемма 8. Если подоператоры до первого формального **ОС** тождественны, то в дизъюнкции первый комбинатор определяется по *таблице* **5** и имеют место равенства:

$$\begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\quad M\,\rangle\\ \langle\,\alpha_j\quad \bar T\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\quad \bar R\,\rangle\end{array}\,,\qquad \begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\quad \bar T\,\rangle\\ \langle\,\alpha_j\quad M\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\quad \bar R^*\,\rangle\end{array}\,,\qquad \begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\quad M\,\rangle\\ \langle\,\alpha_j\quad \bar T^*\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\quad \bar L\,\rangle\end{array}\,,\qquad \begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\quad \bar T^*\,\rangle\\ \langle\,\alpha_j\quad M\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\quad \bar L^*\,\rangle\end{array}\,.$$

Разумеется, что на результаты *леммы* **8** следует смотреть, имея ввиду равенства **(5.78)** и **(5.79)**.

В случае **2)** дизъюнкция над *первыми* частями подоператоров приводит к следующим возможным вариантам:

$$\begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\, M\, W\, M\,\rangle\\ \langle\,\bar\alpha_j\, \bar T\, W\, \bar T\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\, I\, W\, \bar R\,\rangle\end{array},\quad \begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\, M\, W\, M\,\rangle\\ \langle\,\bar\alpha_j\, \bar T\, W\, \bar T^*\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\, I\, W\, \bar L\,\rangle\end{array},\quad \begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\, M\, W\, \bar T\,\rangle\\ \langle\,\bar\alpha_j\, \bar T\, W\, M\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\, I\, W\, \bar R^*\,\rangle\end{array},\quad \begin{array}{c}\langle\,\alpha_j\, M\, W\, \bar T^*\,\rangle\\ \langle\,\bar\alpha_j\, \bar T\, W\, M\,\rangle\\ \hline \langle\,\alpha_j\, I\, W\, \bar L^*\,\rangle\end{array}, \tag{5.80}$$

$$\begin{array}{c}\langle\alpha_j MWM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j \bar T^* W \bar T^*\rangle\\ \hline \langle\alpha_j \bar I W \bar L\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j MWM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j \bar T^* W \bar T\rangle\\ \hline \langle\alpha_j \bar I W \bar R\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j MW\bar T^*\rangle\\ \langle\bar\alpha_j \bar T^* WM\rangle\\ \hline \langle\alpha_j \bar I W \bar L^*\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j MW\bar T\rangle\\ \langle\bar\alpha_j \bar T^* WM\rangle\\ \hline \langle\alpha_j \bar I W \bar R^*\rangle\end{array}\,, \tag{5.81}$$

$$\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar T\, W\, \bar T\,\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j\, I^* W \bar R^*\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar T W \bar T^*\,\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j\, I^*\, W \bar L^*\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j \bar T WM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MW\bar T\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j I^* W \bar R\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j \bar T WM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MW\bar T^*\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j I^* W \bar L\rangle\end{array}\,, \tag{5.82}$$

$$\begin{array}{c}\langle\alpha_j \bar T^* W \bar T^*\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j \bar I^* W \bar L^*\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j\, \bar T^* W \bar T\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MWM\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j \bar I^* W \bar R^*\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j \bar T^* WM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MW\bar T^*\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j \bar I^* W \bar L\rangle\end{array}\,,\quad \begin{array}{c}\langle\alpha_j \bar T^* WM\rangle\\ \langle\bar\alpha_j MW\bar T\rangle\\ \hline \langle\bar\alpha_j \bar I^* W \bar R\rangle\end{array}\,. \tag{5.83}$$

Результаты дизъюнкций во всех случаях вариантов **(5.80)** — **(5.83)** получены формальным применением *таблиц* **5** и **6** по столбцам.

Начало α_j или $\bar{\alpha}_j$ в результирующем операторе совпадает с началом, предшествующем продукции M в столбце для копродукций из $[I]$. В правильности результатов можно убедиться, выполнив выкладки над каждым из полученных результатов, развернув его в конкатенацию двух подоператоров в соответствии с правилом **П 4**.

П 4. Если число **звёздочек** на копродукциях $[I]$ и отрицательных комбинаторах в первой части подоператора, разлагаемого в конкатенацию, является чётным или нечётным, то имеется соответственно отображение

$$\alpha_j \mapsto \alpha_j \qquad \text{или} \qquad \alpha_j \mapsto \bar{\alpha}_j, \tag{5.84}$$

а остальное определяется по *таблице* **6** и *формулам* **(5.9)** — **(5.12)**.

Примеры выкладок по проверке правильности результатов в *равенствах* **(5.83)** таковы:

$$\langle \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W\, \bar{L}^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j\, M\, W\, \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W \rangle = \langle \bar{\alpha}_j\, M\, W\, \bar{\alpha}_j\, T\, W \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, \bar{T}^* \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\alpha}_j\, M\, W\, M \rangle,$$

$$\langle \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W\, \bar{R}^* \rangle = \langle \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W\, \bar{\alpha}_j\, M\, W \rangle = \langle \bar{\alpha}_j\, T\, W\, \bar{\alpha}_j\, M\, W \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\alpha}_j\, M\, W\, M \rangle,$$

$$\langle \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W\, \bar{L} \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, \bar{\alpha}_j\, T\, W \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, M \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\alpha}_j\, M\, W\, \bar{T}^* \rangle,$$

$$\langle \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W\, \bar{R} \rangle = \langle \bar{\alpha}_j\, \bar{I}^*\, W\, \alpha_j\, \bar{T}^*\, W \rangle = \langle \bar{\alpha}_j\, T\, W\, \alpha_j\, \bar{T}^*\, W \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, W\, M \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\alpha}_j\, M\, W\, \bar{T} \rangle.$$

Аналогичным образом выполнены и проверены результаты в равенствах **(5.80)** — **(5.82)**, хотя здесь и не приведены. Итак, доказана

Лемма 9. Дизъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, имеющими до *фиктивного* **ос** инвертированные друг другу подоператоры, даёт оператор, начало которого (α_j или $\bar{\alpha}_j$) совпадает с тем началом подоператора, который в фиктивном столбце имеет продукцию M. В фиктивном столбце результирующий оператор имеет копродукцию из $[\,I\,]$ в соответствии с *таблицей* **6** и комбинатор в **ос** в соответствии с *таблицей* **5**. Результирующий оператор может быть развёрнут в конкатенацию двух подоператоров по *правилу* **П 4**.

В случае **3)** дизъюнкция над *первыми* частями подоператоров приводит к следующим возможным вариантам:

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\bar T\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E^*\, W\,\bar R\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\bar T^*\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E^*\, W\,\bar L\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\bar T\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E\, W\,\bar R^*\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\bar T^*\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E\, W\,\bar L^*\rangle}, \tag{5.85}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E^*\, W\,\bar R^*\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T^*\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E^*\, W\,\bar L^*\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\, M\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E\, W\,\bar R\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T\, W\, M\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T^*\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\, E\, W\,\bar L\rangle}, \tag{5.86}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\,\bar T\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E^*\, W\,\bar R\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\,\bar T^*\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E^*\, W\,\bar L\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\,\bar T\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E\, W\,\bar R^*\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\,\bar T^*\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E\, W\,\bar L^*\rangle}, \tag{5.87}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E^*\, W\,\bar R^*\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T^*\rangle\\ \langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E^*\, W\,\bar L^*\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\, M\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E\, W\,\bar R\rangle},\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\bar\nu_j\,\bar T^*\, W\, M\rangle\\ \langle\alpha_j\, M\, W\,\bar T^*\rangle\end{array}}{\langle\alpha_j\,\bar E\, W\,\bar L\rangle}. \tag{5.88}$$

Во всех этих случаях результаты дизъюнкций получены формальным применением над столбцами *таблицы* **5** и *таблицы* **7**. В верности получаемых результатов можно убедиться, выполнив выкладки над каждым из полученных результатов, развернув его в конкатенацию двух подоператоров в соответствии с нижеследующим правилом **П 5**.

П 5. Если число **звёздочек** на копродукциях $[\,E\,]$ и отрицательных комбинаторах в первой части подоператора, разлагаемого в конкатенацию, является чётным или нечётным, то имеется соответственно отображение

$$\alpha_j \mapsto \bar\nu_j \quad \text{или} \quad \alpha_j \mapsto \alpha_j, \tag{5.89}$$

а остальное определяется по *таблице* **7** и *равенствам* **(5.9) — (5.12)**.

Примеры выкладок по проверке правильности результатов в *равенствах* **(5.85) — (5.88)** таковы (приводятся выкладки только на *четвёртом* случае каждого из вариантов):

$$\langle\,\alpha_j\, E\, W\,\bar L^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, M\, W\,\alpha_j\, E\, W\,\rangle = \langle\,\alpha_j\, M\, W\,\alpha_j\, T^*\, W\,\rangle = \langle\,\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\bar T^*\,\rangle\,\bar\downarrow\,\langle\,\alpha_j\, M\, W\, M\,\rangle,$$

$$\langle\,\alpha_j\, E\, W\,\bar L\,\rangle = \langle\,\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\alpha_j\, E\, W\,\rangle = \langle\,\bar\nu_j\,\bar T\, W\,\alpha_j\, T^*\, W\,\rangle = \langle\,\bar\nu_j\,\bar T\, W\, M\,\rangle\,\bar\downarrow\,\langle\,\alpha_j\, M\, W\,\bar T^*\,\rangle,$$

$$\langle \alpha_j \bar{E} W \bar{L}^* \rangle = \langle \alpha_j M W \alpha_j \bar{E} W \rangle = \langle \alpha_j M W \alpha_j T W \rangle = \langle \bar{\nu}_j \bar{T}^* W \bar{T}^* \rangle \bar{\downarrow} \langle \alpha_j M W M \rangle,$$
$$\langle \alpha_j \bar{E} W \bar{L} \rangle = \langle \bar{\nu}_j \bar{T}^* W \alpha_j \bar{E} W \rangle = \langle \bar{\nu}_j \bar{T}^* W \alpha_j T W \rangle = \langle \bar{\nu}_j \bar{T}^* W M \rangle \bar{\downarrow} \langle \alpha_j M W \bar{T}^* \rangle.$$

Разумеется, остальные случаи тоже проверены, но здесь не приводятся. Значит, доказана

Лемма 10. Дизъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, имеющими до *фиктивного* **ОС** (включительно) один подоператор $\langle \alpha_j M \rangle$, а другой подоператор $\langle \tau_{j+1} \rangle$ или $\langle \bar{\tau}_{j+1} \rangle$ (которые рассматриваются как $\langle \bar{\nu}_j \bar{T} \rangle$ или $\langle \bar{\nu}_j \bar{T}^* \rangle$, даёт результирующий оператор с началом $\langle \alpha_j \rangle$, имеющим в фиктивном столбце копродукцию из $[E]$ в в соответствии с *таблицей* **7** и отрицательный комбинатор в **ОС** в соответствии с *таблицей* **8**. Результирующий оператор может быть развёрнут в конкатенацию двух подоператоров по правилу **П 5**.

Теперь, вначале изучим особенности, возникающие в связи с *равенствами* **(4.33)** и **(4.33*)**, а также с *равенством* **(4.34)**. (Напомним, что **(4.34*)** совпадает с **(4.34)**). Потом вновь вернёмся к *равенствам* **(4.32)** и **(4.32*)** и рассмотрим их для тех случаев, когда изученных выше особенностей нет.

Итак, *равенства* **(4.33)** и **(4.33*)** говорят о том, что результат дизъюнкции зависит от самого правого столбца с T и $\bar{T}^*$ или с T^* и $\bar{T}$ (такой столбец называется *условный* **ОС**), в котором в соответствии с *таблицей* **8** имеем в результирующем операторе копродукцию из $[N]$. Поэтому, для *первых* частей операторов (в этом случае до первого **ОС** включительно: первым **ОС** считается следующий направо **ОС** после *условного* **ОС**) имеем следующие варианты:

$$\frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T^* W M \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T} W \bar{T} \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N^* W \bar{R} \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T^* W \bar{T} \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T} W M \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N^* W \bar{R}^* \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T^* W M \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T} W \bar{T}^* \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N^* W \bar{L} \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T^* W \bar{T}^* \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T} W M \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N^* W \bar{L}^* \rangle}, \tag{5.90}$$

$$\frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T W M \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T}^* W \bar{T} \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j \bar{N}^* W \bar{R} \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T\ W\ \bar{T} \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T}^* W M \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j \bar{N}^* W \bar{R}^* \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T W M \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T}^* W \bar{T}^* \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j \bar{N}^* W \bar{L} \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j T W \bar{T}^* \rangle \\ \langle \beta_j \bar{T}^* W M \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j \bar{N}^* W \bar{L}^* \rangle}, \tag{5.91}$$

$$\frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j \bar{T} W M \rangle \\ \langle \beta_j T^* W \bar{T} \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N W \bar{R} \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j\ \bar{T}\ W \bar{T} \rangle \\ \langle \beta_j T^* W M \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N W \bar{R}^* \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j \bar{T} W M \rangle \\ \langle \beta_j T^* W \bar{T}^* \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N W \bar{L} \rangle}, \quad \frac{\begin{matrix}\langle \alpha_j \bar{T} W \bar{T}^* \rangle \\ \langle \beta_j T^* W M \rangle\end{matrix}}{\langle \gamma_j N W \bar{L}^* \rangle}, \tag{5.92}$$

$$\frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,M\rangle\\ \langle\beta_j\,T\,W\,\bar{T}\rangle\end{matrix}}{\langle\gamma_j\,\bar{N}\,W\,\bar{R}\rangle,}\quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,\bar{T}\rangle\\ \langle\beta_j\,T\,W\,M\rangle\end{matrix}}{\langle\gamma_j\,\bar{N}\,W\,\bar{R}^*\rangle,}\quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,M\rangle\\ \langle\beta_j\,T\,W\,\bar{T}^*\rangle\end{matrix}}{\langle\gamma_j\,\bar{N}\,W\,\bar{L}\rangle,}\quad \frac{\begin{matrix}\langle\alpha_j\,\bar{T}^*\,W\,\bar{T}^*\rangle\\ \langle\beta_j\,T\,W\,M\rangle\end{matrix}}{\langle\gamma_j\,\bar{N}\,W\,\bar{L}^*\rangle.} \tag{5.93}$$

Результаты выкладок **(5.90)** — **(5.93)** получены формальным применением *таблиц* **5** и **8** и должны быть интерпретированы так:

$$\left.\begin{aligned}&\langle\gamma_j N^* W\bar{R}\rangle = \langle\alpha_j T^* W\alpha_j T^* W\rangle, \;\; \langle\gamma_j N^*\,W\,\bar{R}^*\rangle = \langle\alpha_j T^* W\beta_j\bar{T}W\rangle,\\ &\langle\gamma_j N^* W\bar{L}\rangle = \langle\alpha_j T^* W\alpha_j T^* W\rangle, \;\; \langle\gamma_j\,N^*\,W\,\bar{L}^*\rangle = \langle\beta_j\bar{T}W\alpha_j T^* W\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{5.94}$$

$$\left.\begin{aligned}&\langle\gamma_j\bar{N}^* W\bar{R}\rangle = \langle\alpha_j TW\alpha_j TW\rangle, \;\; \langle\gamma_j\bar{N}^* W\bar{R}^*\rangle = \langle\alpha_j TW\beta_j\bar{T}^* W\rangle,\\ &\langle\gamma_j\bar{N}^* W\bar{L}\rangle = \langle\alpha_j TW\alpha_j TW\rangle, \;\; \langle\gamma_j\bar{N}^* W\bar{L}^*\rangle = \langle\beta_j\bar{T}^* W\alpha_j TW\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{5.95}$$

$$\left.\begin{aligned}&\langle\gamma_j NW\bar{R}\rangle = \langle\beta_j T^* W\alpha_j\bar{T}W\rangle, \;\; \langle\gamma_j NW\bar{R}^*\rangle = \langle\beta_j T^* W\beta_j T^* W\rangle,\\ &\langle\gamma_j NW\bar{L}\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}W\beta_j T^* W\rangle, \;\; \langle\gamma_j NW\bar{L}^*\rangle = \langle\beta_j T^* W\beta_j T^* W\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{5.96}$$

$$\left.\begin{aligned}&\langle\gamma_j\bar{N}W\bar{R}\rangle = \langle\beta_j TW\alpha_j\bar{T}^* W\rangle, \;\; \langle\gamma_j\bar{N}W\bar{R}^*\rangle = \langle\beta_j TW\beta_j TW\rangle,\\ &\langle\gamma_j\bar{N}W\bar{L}\rangle = \langle\alpha_j\bar{T}^* W\beta_j TW\rangle, \;\; \langle\gamma_j\bar{N}W\bar{L}^*\rangle = \langle\beta_j TW\beta_j TW\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{5.97}$$

Интерпретация **(5.94)** – **(5.97)** является результатом прямых выкладок над операторами в вариантах **(5.90)** — **(5.93)**. Этот результат может быть сформулирован в виде нижеследующего правила **П 6**.

П 6. Если число **звёздочек** на копродукциях $[\,N\,]$ и отрицательных комбинаторах в *первой* части подоператора, разлагаемого в конкатенацию, является чётным или нечётным, то имеется соответственно:

разложение $\langle\,\gamma_j\,[\,N\,]\,\rangle$ на две части в соответствии с *таблицей* **8**;

выбор и повтор *первой* или *второй* части из разложения $\langle\,\gamma_j\,[\,N\,]\,\rangle$ для отрицательного комбинатора *первого* и *второго* типа соответственно.

Значит, доказана следующая

Лемма 11. Дизъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, имеющими до первого **ос** *условный* **ос**, даёт результирующий подоператор, получаемый в результате формального прямого применения *таблицы* **5** и *таблицы* **8**, интерпретация которого отражена в **П 6**.

Обратимся к особенностям, связанным с *равенством* **(4.34)**, которое говорит о том, что (как и в *равенствах* **(5.33)** и **(5.33*****)**) результат зависит от самого правого столбца с продукциями T и T^* (такой столбец будет называться *почти* **ОС**), в котором в соответствии с *таблицей* **8** имеем в результирующем операторе одну из копродукций O или O^*. Поэтому для *первых* частей операторов (в этом случае до первого **ОС** включительно; первым **ОС** считается следующий направо **ОС** после *почти* **ОС**) имеем следующие варианты:

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\ M\,\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, \bar{T}\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O\, W\, \bar{R}\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\ T\ W\ \bar{T}\,\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O\, W\, \bar{R}^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, \bar{T}^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O\, W\, \bar{L}\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T\, W\, \bar{T}^*\rangle\\ \langle\beta_j\, T^*\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O\, W\, \bar{L}^*\rangle,} \tag{5.98}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j T^* W M\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, \bar{T}\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O^*\, W\, \bar{R}\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, \bar{T}\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O^*\, W\, \bar{R}^*\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, M\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, \bar{T}^*\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O^*\, W\, \bar{L}\rangle,}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\alpha_j\, T^*\, W\, \bar{T}^*\rangle\\ \langle\beta_j\, T\, W\, M\rangle\end{array}}{\langle\gamma_j\, O^*\, W\, \bar{L}^*\rangle.} \tag{5.99}$$

Интерпретация результатов в **(5.98)** и **(5.99)**, полученных формально, такова:

$$\left.\begin{array}{ll}\langle\gamma_j O W \bar{R}\rangle = \langle\bar{\nu}_j T^*\, W \alpha_j T W\rangle, & \langle\gamma_j O W \bar{R}^*\rangle = \langle\bar{\nu}_j T^* W \beta_j T^* W\rangle,\\ \langle\gamma_j O W \bar{L}\rangle = \langle\alpha_j T W \bar{\nu}_j T^* W\rangle, & \langle\gamma_j O W \bar{L}^*\rangle = \langle\beta_j T^* W \bar{\nu}_j T^* W\rangle.\end{array}\right\} \tag{5.100}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\langle\gamma_j O^* W \bar{R}\rangle = \langle\bar{\nu}_j T W \alpha_j T^* W\rangle, & \langle\gamma_j O^* W\, \bar{R}^*\rangle = \langle\bar{\nu}_j T W\, \beta_j T W\rangle,\\ \langle\gamma_j O^* W \bar{L}\rangle = \langle\alpha_j T^* W \bar{\nu}_j T W\rangle, & \langle\gamma_j O^* W \bar{L}^*\rangle = \langle\beta_j T W \bar{\nu}_j T W\rangle.\end{array}\right\} \tag{5.101}$$

Результаты **(5.100)** и **(5.101)** получены прямыми выкладками и, таким образом, доказана нижеследующая

Лемма 12. Дизъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, имеющими до первого **ОС** *почти* **ОС**, даёт результирующий подоператор, получаемый в результате формального прямого применения *таблиц* **5** и **8**, интерпретация которого такова. Результирующий подоператор разлагается в конкатенацию в полном соответствии с *таблицей* **5**, равенствами **(5.9)** — **(5.12)**, *таблицей* **8** и с учётом того, что

$$O \hookrightarrow T, \quad O^* \hookrightarrow T^*, \quad \gamma_j \hookrightarrow \bar{\nu}_j. \tag{5.102}$$

Теперь перейдём к равенствам **(4.32)** и **(4.32*)**, когда проблема свёртки в них действительно есть, то есть первый выход слева направо на столбец с M и $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$ означает выход на первый **ОС**. В этом случае рассматриваем первые части подоператоров, считая, что у них начала в одном и том же столбце.

Замечание 14. Требование, чтобы у обоих операторов было общее начало, означает, что более короткий оператор должен быть удлинён, а такое удлинение можно выполнить, используя равенства

$$\langle\bar{\tau}_j\rangle = \langle\bar{\nu}_{j-1}\,\bar{T}^*\rangle,\ \langle\tau_j\rangle = \langle\bar{\nu}_{j-1}\,\bar{T}\rangle,\ \langle\bar{\nu}_j\rangle = \langle\bar{\nu}_{j-1}\,T\rangle = \langle\bar{\nu}_{j-1}\,T^*\rangle = \langle\bar{\nu}_{j-1}\,M\rangle$$

и допуская, что удлиняемый оператор может начинаться с T или T^* (перед которыми подразумевается начало $\bar{\nu}$, но которое не записывается). Обратим внимание, что в рассмотренном выше *случае* **3)**, варианты наличия в столбце продукции M и τ или $\bar{\tau}$ нами уже рассматривались, а поэтому такие случаи ниже исключаются. И ещё, требование общего начального столбца у обоих операторов предполагалось в предыдущих двух случаях, которые охвачены *леммами* **11** и **12**.

В исследуемом нами случае, разумеется, возможные варианты следования столбцов и наличие или отсутствие того или иного варианта **ОС** безразличны в силу раздельного и независимого рассмотрения столбцов. Поэтому приводим весь возможный перечень из *таблицы* **8**, вынося на начало столбцы **13** – **16** (как возможные начальные в соответствии с *замечанием* **14**), а в конце (*четыре* столбца) приведены в соответствии с *таблицей* **5** (как возможные варианты для **ОС**):

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\bar{T}^* & T & \bar{T} & T^* & \bar{T} & T & \bar{T}^* & T^* & T & M & T^* & M & T & T^* & M & \bar{T} & M & \bar{T}^* \\
T & \bar{T}^* & T^* & \bar{T} & T & \bar{T} & T^* & \bar{T}^* & M & T & M & T^* & T^* & T & \bar{T} & M & \bar{T}^* & M \\
\hline
\bar{N} & \bar{N}^* & N & N^* & \bar{P} & \bar{P}^* & P & P^* & \bar{Z} & \bar{Z}^* & Z & Z^* & O & O^* & \bar{R} & \bar{R}^* & \bar{L} & \bar{L}^*
\end{array} \qquad (5.103)$$

Особое замечание 2. Следует иметь ввиду, что в *таблице* **8** (в **9**–ом и **10**–ом столбцах) имеем копродукции, означающие несогласованность операторов: копродукция $\bar{O}$ означает, что в столбце имелись продукции $\bar{T}$ и $\bar{\tau}$ или τ и $\bar{T}^*$, а копродукция $\bar{O}^*$ означает, что в столбце имелись продукции $\bar{T}^*$ и τ или $\bar{\tau}$ и $\bar{T}$. Поэтому в свёртках и развёртках следует иметь ввиду, что

$$\langle \bar{\downarrow} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle\, \alpha_j \;\; \bar{T} \,\rangle \\ \underline{\langle\, \beta_j \;\; \bar{T}^* \,\rangle} \\ \langle\, \gamma_j \;\; \bar{O} \,\rangle \; = \; \langle\, \alpha_j \, \beta_j \,\rangle \; , \end{array} \qquad\qquad \langle \bar{\downarrow} \rangle \quad \begin{array}{l} \langle\, \alpha_j \;\; \bar{T}^* \,\rangle \\ \underline{\langle\, \beta_j \;\; \bar{T} \,\rangle} \\ \langle\, \gamma_j \;\; \bar{O}^* \,\rangle \; = \; \langle\, \beta_j \, \alpha_j \,\rangle \; . \end{array}$$

Последнее означает, что копродукции $\bar{O}$ и $\bar{O}^*$ должны восприниматься и как комбинаторы *первого* и *второго* типа соответственно. Хотя столбец, в котором имеется результирующая копродукция $\bar{O}$ или $\bar{O}^*$, тоже будет называться *почти* **ОС**, тем не менее, сказанное в этом *замечании* не должно опускаться из виду. Как это будет выглядеть практически, мы увидим ниже на *первом* иллюстрационном примере из **5.4.2**.

Чтобы понять, что определения введены без противоречий, достаточно принять, что строки A и B суть *первая* и *вторая* строки до столбцов для **ОС** в **(5.103)**, то есть:

$$\begin{aligned} A &= \bar{T}^* \; T \;\; \bar{T} \;\; T^* \; \bar{T} \;\; T \;\; \bar{T}^* \; T^* \; T \;\; M \; T^* \; M \; T \;\; T^*, \\ B &= T \;\; \bar{T}^* \; T^* \; \bar{T} \;\; T \;\; \bar{T} \;\; T^* \; \bar{T}^* \; M \; T \;\; M \; T^* \; T^* \; T, \end{aligned} \tag{5.104}$$

а C' — это результат дизъюнкции в копродукциях над соответствующими столбцами (в соответствии с *таблицей* **8**), то есть:

$$C' \; = \; \bar{N} \; \bar{N}^* \; N \; N^* \; \bar{P} \; \bar{P}^* \; P \; P^* \; \bar{Z} \; \bar{Z}^* \; Z \; Z^* \; O \; O^*. \tag{5.105}$$

Замечание 15. Строка W, символизирующая тождественное преобразование, не упоминается в строках A, B и C', но (в молчаливой форме) она не исключается, так как из – за неё никаких проблем возникнуть не может.

Переход от копродукций к продукциям в **(5.105)** по **(5.19)** и **(5.102)** даёт нам строку

$$C \; = \; T^* \; T^* \; T \; T \; T^* \; T^* \; T \; T \; T^* \; T^* \; T \; T \; T \; T^*. \tag{5.106}$$

Результат дизъюнкций над подоператорами в строках A и B по столбцам (в соответствии с *равенствами* **(4.27)** — **(4.29)**, **(4.27*)** — **(4.29*)**) даёт тот же результат **(5.106)** (*равенства* **(4.30)**, **(4.31)**, **(4.30*)**, **(4.31*)** соответствуют тождественному преобразованию и в соответствии с *замечанием* **15** не исключаются). Значит верна

Лемма 13. Дизъюнкция над *первыми* частями пары согласованных подоператоров, не имеющими *фиктивных*, *условных* и *почти* **ос**, даёт результирующий оператор, имеющий отрицательный комбинатор, определяемый *таблицей* **5**, и копродукции, определяемые *таблицей* **8**. Развёртка результирующего оператора выполняется в обратной последовательности.

Замечание 16. *Лемма* **13** является обобщением *леммы* **8**.

Замечание 17. Рассуждения, предшествующие формулировке *леммы* **13**, показывают, что вместо строки W в *леммах* **9** – **12** могли бы вести рассуждения о строках A и B из **(5.104)**, включающих и W, так как видно, что особого рассуждения требуют лишь **ос**, *фиктивные* **ос**, *условные* **ос** и *почти* **ос**.

Имея ввиду *замечание* **17** и обозначая результирующие копродукции для строк A и B через строку C', *равенства* **(5.9)** – **(5.12)** позволяют нам утверждать, что будут верными равенства:

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T\, B\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\,\rangle, \tag{5.107}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T\, A\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M\, B\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R^*\, C'\,\rangle, \tag{5.108}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T^*\, B\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, L\, C'\,\rangle, \tag{5.109}$$

$$\langle\, \alpha_j\, T^*\, A\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, M\, B\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, L^*\, C'\,\rangle, \tag{5.110}$$

где копродукции C' могут быть заменены продукциями C в соответствии с **(5.19)** и **(5.102)**.

Однако используя *равенство* **(5.107)** и *таблицу* **5**, можем записать верные равенства:

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, M\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T\, B\, T\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, R\,\rangle, \tag{5.111}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, T\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T\, B\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, R^*\,\rangle, \tag{5.112}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, M\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T\, B\, T^*\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, L\,\rangle, \tag{5.113}$$

$$\langle\, \alpha_j\, M\, A\, T^*\,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_j\, T\, B\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, R\, C'\, L^*\,\rangle, \tag{5.114}$$

где уже C' должна сохраняться в копродукциях, так как

$$\langle \gamma_j\, R\, C'\, R\rangle = \langle \gamma_j\, R\, C'\, \alpha_j\, M\, A\rangle,\;\; \langle \gamma_j\, R\, C'\, R^*\,\rangle = \langle \gamma_j\, R\, C'\, \beta_j\, T\, B\rangle, \tag{5.115}$$

$$\langle \gamma_j\, R\, C'\, L\rangle = \langle \alpha_j\, M\, A\, \gamma_j\, R\, C'\rangle,\;\; \langle \gamma_j\, R\, C'\, L^*\rangle = \langle \beta_j\, T\, B\, \gamma_j\, R\, C'\rangle. \tag{5.116}$$

Разумеется, что сказанное относительно **(5.107)**, верно и для *равенств* **(5.108)** – **(5.110)**.

Как в конъюнкции, так и в дизъюнкции раскрываемый комбинатор (напоминаем, что это самый правый отрицательный комбинатор в записи результирующего оператора) в дизъюнктивной свёртке и развёртке двух операторов играет такую же роль, что и отрицательный комбинатор в первом **ОС** первой части оператора.

Итак, завершением доказательства *теоремы* **2** является обоснованная приведёнными выше рассуждениями

Лемма 14. Дизъюнкция над парой согласованных операторов даёт результирующий оператор, первая часть которого определяется *леммами* **8** – **13**, а вторая часть простым формальным применением *таблиц* **5** и **8**. Развёртка результирующего оператора выполняется применением *таблиц* **5** – **8** в обратной последовательности, а в отображениях **(5.84)** или **(5.89)**, или **П 6** число **звёздочек** считается в копродукциях $[I]$, или $[E]$, или $[N]$ соответственно и в раскрываемом отрицательном комбинаторе.

5.4.1 Конструктивный способ формирования свёртки дизъюнкции двух согласованных операторов и её интерпретация.

Подобно тому, как это сделано для конъюнкции, для дизъюнкции используется конструктивный характер *лемм* **8** – **14**, чтобы *теорему* **2**, доказанную с помощью этих лемм, сформулировать в виде правила, позволяющего сворачивать дизъюнкцию (строить свёртку) над парой согласованных операторов.

Правило дизъюнктивной свёртки. Пусть заданы два согласованных оператора в системе Q_2, записанные столбиком (то есть выравненные справа), над которыми выполняется дизъюнкция с целью их свёртки в один оператор в расширенной системе продукций **(5.77)**. Эти операторы, если не имеют общего начала, должны быть выравнены так, как это указано в *замечании* **14** (за тем исключением, которое указано в нём). Затем определяется: имеется ли *фиктивный* **ОС** и (если он есть) его тип, рассмотренный в *леммах* **9** и **10**. После этого, дизъюнкция над столбцами заданных согласованных операторов выполняется чисто формально с использованием *таблиц* **5** и **8**, а в случае наличия *фиктивного* **ОС**, то с использованием (в зависимости от типа) *таблиц* **6** или **7**.

Дизъюнктивная **свёртка** *двух* операторов, полученная по упрощённому правилу дизъюнкции (*см.* **4.6.2**), не содержит **ОС**. Такую **свёртку**, как это принималось для конъюнкции, и для дизъюнкции будем в дальнейшем называть *тривиальной* **свёрткой**, сохранив название **свёртки** (за *нетривиальной* **свёрткой**), то есть за такой **свёрткой**, которая содержит **ОС**.

Для правильной интерпретации результирующего оператора дизъюнктивной свёртки следует всегда иметь ввиду, что (в соответствии с изложенным выше правилом дизъюнктивной свёртки) развёртка оператора, содержащего не более одной из копродукций $[I]$, $[E]$, возможна и для неё верно

Правило интерпретации дизъюнктивной свёртки. Смысл оператора дизъюнктивной свёртки вытекает из его развёртки в виде конкатенации двух операторов, из которых хотя бы *один* является оператором *тривиальной* дизъюнктивной свёртки. Если же *другой* из них является оператором свёртки, то к нему вновь может быть применён процесс развёртки и так далее до тех пор, пока не останется *ни одной* свёртки.

Каждая развёртка выполняется по раскрываемому комбинатору и *таблицам* **5** — **8**. При этом требуется однозначно различать начало развёртываемого оператора по *фиктивному* **ОС**, признаком которого являются копродукции из $[I]$ или $[E]$. Для выполнения развёртки по дизъюнктивной свёртке, кроме раскрываемого комбинатора, требуется ориентироваться на самый правый из *почти* **ОС** или *условных* **ОС**, а если таковых нет, то на *фиктивный* **ОС**. Если и *фиктивного* **ОС** нет, то развёртка выполняется лишь по раскрываемому комбинатору. Во всех этих случаях используются *леммы*, то есть должны быть учтены **П 4**, **П 5**, **П 6** и особенности *почти* **ОС**. При этом, в каждой свёртке правее раскрываемого комбинатора, копродукции должны быть заменены на продукции по соответствующим соотношениям **(5.19)** и **(5.102)**. Такая замена должна быть выполнена для всех копродукций и после того, как выполнена развёртка по последнему раскрываемому комбинатору.

5.4.2 Иллюстрационные примеры к правилу дизъюнктивной свёртки и её развёртки.

Найдём дизъюнкцию над двумя согласованными операторами, требующими выравнивания начал (и приводящие к *особому замечанию* **2**):

$$\left.\begin{array}{llllllll} \langle\bar\tau & M & \bar T^* & T & M & \bar T & \bar T^* & M\rangle \\ \langle & & \tau & \bar T & \bar T & \bar T & M & \bar T^*\rangle \end{array}\right\} = \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{llllllll} \langle\bar\tau & M & \bar T^* & T & M & \bar T & \bar T^* & M\rangle \\ \langle T & M & \bar T & \bar T & \bar T & \bar T & M & \bar T^*\rangle \end{array}\right. \\ \hline \langle\bar N \quad M \quad \bar O^* \quad \bar P^* \quad \bar R \quad \bar T \quad \bar L^* \quad \bar L\rangle. \end{array} \tag{5.117}$$

Оператор **(5.117)** имеет развёртку:

$$\langle\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, \bar R \bar T\, \bar L^*\, \bar L\,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau\, M\, \bar T^*\, T\, M\, \bar T\, \bar T^*\, .\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, \bar R \bar T\, \bar L^*\,\rangle.$$

Второй из подоператоров этого разложения имеет развёртку:

$$\begin{aligned} \langle\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, \bar R \bar T\, \bar L^*\,\rangle \;&=\; \langle\, T\, M\, \bar T \bar T \bar T \bar T\, .\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, \bar R \bar T\,\rangle \;= \\ &=\; \langle\, \tau_2 \bar T \bar T \bar T\, .\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, \bar R \bar T\,\rangle, \end{aligned}$$

а подоператор

$$\langle\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, \bar R\,\rangle \;=\; \langle\, \bar N\, M\, \bar O^*\, \bar P^*\, .\, \bar T^*\, M\, \bar T^*\, T\,\rangle \;=\; \langle\, \bar N\, M\, \bar O^*\, T\, \bar\tau\, M\, \bar T^*\, T\,\rangle$$

и, наконец, по особому *замечанию* **2** имеем:

$$\langle\, \bar N\, M\, \bar O^*\,\rangle \;=\; \langle\, T\, M\, .\, \bar T^*\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \bar\nu_1\, \bar\tau\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau\, M\, T^*\,\rangle.$$

Теперь найдём свёртку и развёртку операторов в дизъюнкции:

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau\, \bar T\, \bar T^*\, \bar T^*\, T^*\, \bar T^*\;\; \bar T\;\; \bar T^*\,\rangle \\ \langle\, \bar\tau\, T\, M\;\; \bar T\;\;\; T\;\; \bar T^*\, M\;\; M\,\rangle \\ \hline \langle\, \bar\tau\, T\;\; \bar I^*\;\; \bar O^*\, O^*\, \bar T^*\, \bar R^*\;\; \bar L^*\,\rangle \end{array} \;=\; \langle \bar\tau T M \bar T T \bar T^* M \bar\tau T \bar I^* \bar O^* O^* \bar T^* \bar R^* \rangle. \tag{5.118}$$

Обращаем внимание, что в результирующем операторе **(5.118)** имеем копродукцию $\bar I^*$, поскольку имеется *условный* **ОС**: начало $\langle\, \alpha_1\,\rangle$ и $\langle\, \bar\alpha_1\,\rangle$. В развёртке (по *лемме* **14**) используем равенство:

$$\langle\, \alpha_1\, \bar I^*\, C\, \bar L^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_1\, M\, B\, \alpha_1\, \bar I^*\, C\,\rangle.$$

Развёртка второго подоператора должна осуществляться (в соответствии с *леммой* **12**) с использованием равенства:

$$\langle\, \gamma_3\, O^*\, W\, \bar R^*\,\rangle \;=\; \langle\, \bar\nu_3\, T\, W\, \beta_3\, T\, W\,\rangle,$$

что означает:

$$\langle\, \bar\tau\, T\, \bar I^*\, \bar O^*\, O^*\, \bar T^*\, \bar R^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\nu_3\, T\, \bar T^*\, \bar\tau\, T\, M\, \bar T\, T\, \bar T^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau_5\, \bar\tau\, T\, M\, \bar T\, T\, \bar T^* \,\rangle.$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$\langle\, \bar\tau\, T\, \bar I^*\, \bar O^*\, O^*\, \bar T^*\, \bar R^*\, \bar L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau\, T\, M\, \bar T\, T\, \bar T^*\, M\, \bar\tau_5\, \bar\tau\, T\, M\, \bar T\, T\, \bar T^* \,\rangle. \qquad (5.119)$$

Если проверить прямыми выкладками полученный результат **(5.119)**, то оператор **(5.118)** можно представить так:

$$\langle\, \gamma_7 \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_6\, \bar T^* \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_6\, M \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_6\, \gamma_6 \,\rangle,$$

где

$$\begin{aligned}
\langle\, \gamma_6 \,\rangle \;&=\; \langle\, \alpha_6 \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_6 \,\rangle \;&=&\; \langle\, \alpha_5\, \bar T \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_5\, M \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_5\, \beta_5 \,\rangle,\\
\langle\, \gamma_5 \,\rangle \;&=\; \langle\, \alpha_5 \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_5 \,\rangle \;&=&\; \langle\, \alpha_4\, \bar T^* \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_4\, \bar T^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_4\, \bar T^* \,\rangle,\\
\langle\, \gamma_4 \,\rangle \;&=\; \langle\, \alpha_4 \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_4 \,\rangle \;&=&\; \langle\, \alpha_3\, T^* \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_3\, T \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\nu_4 \,\rangle.
\end{aligned}$$

Значит:

$$\langle\, \gamma_5 \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\nu_4\, \bar T^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau_5 \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_6 \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau_5\, \beta_5 \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_7 \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_6\, \bar\tau_5\, \beta_5 \,\rangle,$$

что вполне соответствует **(5.119)**.

Рассмотрим ещё пример с *условным* **ОС**, когда операторы имеют начало в разных столбцах, но выравнивания начал не требуется:

$$\begin{array}{l}
\langle \qquad \bar\tau\;\; M\;\; T\;\; \bar T^*\, M \,\rangle\\
\underline{\langle\, \bar\tau\, \bar T\, M\;\; \bar T\;\; \bar T^*\;\; M\;\;\; \bar T \,\rangle}\\
\langle\, \bar\tau\, \bar T\;\; \bar E\;\;\; \bar R\;\; \bar N^*\, \bar L^*\;\;\; \bar R \,\rangle
\end{array} \;=\; \langle \bar\tau \bar T \bar E \bar R \bar N^* \bar L^* \bar\nu_1 \bar T^* M T \bar T^* \rangle, \qquad (5.120)$$

так как на результирующий оператор следует смотреть с учётом *леммы* **14**, то есть как на равенство:

$$\langle\, \gamma\, \bar E\, C'\, \bar R \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma\, \bar E\, C'\, \bar\nu\, \bar T^*\, A \,\rangle.$$

Первый подоператор в **(5.120)** должен рассматриваться (в соответствии с **П 6**) так:

$$\langle\, \bar\tau\, \bar T\, \bar E\, \bar R\, \bar N^*\, \bar L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_3\, \bar N^*\, \bar L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_3\, \bar T^*\, \alpha_3\, T \,\rangle,$$

где

$$\langle\, \bar\tau\, \bar T\, \bar E\, \bar R \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_3 \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_3 \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \beta_3 \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau_2\, M \,\rangle \bar\downarrow \langle\, \bar\tau\, \bar T\, M\, \bar T \,\rangle.$$

Значит,

$$\langle\, \tau\, \bar{T}\, \bar{E}\, \bar{R}\, \bar{N}^*\, \bar{L}^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}\, M\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{\tau}_2\, M\, T \,\rangle.$$

Окончательно имеем:

$$\langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}\, \bar{E}\, \bar{R}\, \bar{N}^*\, \bar{L}^*\, \bar{R} \rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}\, M\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{\tau}_2\, M\, T\, \bar{\tau}_2\, M\, T\, \bar{T}^* \,\rangle.$$

Если и здесь выполнить проверку по той же схеме, что и в предыдущем примере, то получим:

$$\begin{aligned}
\langle\, \gamma_6 \,\rangle \;&=\; \langle\, \alpha_5\, M \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_5\, \bar{T} \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_5\, \alpha_5 \,\rangle,\\
\langle\, \gamma_5 \,\rangle \;&=\; \langle\, \alpha_5 \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_5 \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_4\, \bar{T}^* \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_4\, M \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_4\, \gamma_4 \,\rangle,\\
\langle\, \gamma_4 \,\rangle \;&=\; \langle\, \alpha_4 \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_4 \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_3\, T \,\rangle \bar{\downarrow} \langle\, \beta_3\, \bar{T}^* \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_3\, T \,\rangle.
\end{aligned}$$

Значит:

$$\langle\, \gamma_5 \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_4\, \alpha_3\, T \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_6 \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_4\, \alpha_3\, T\, \alpha_5 \,\rangle,$$

что подтверждает верность окончательного результата.

5.5 Минимальные варианты расширенной системы

Выше была построена расширенная система продукций, состоящая из продукций в узком смысле, копродукций и комбинаторов. В основании такой системы было положено *второе* подмножество основных продукций Q_2. Здесь не будем рассматривать, что необходимо сделать, чтобы расширенная система содержала первое подмножество основных продукций Q_1, а исследуем расширенные системы, построенные на базовых системах продукций Q_3 или Q_4, причём эти два случая рассмотрим раздельно. Такие системы будут называться минимальными вариантами расширенной системы.

5.5.1 Расширенная система операторов $\bar{\downarrow}$ – юнктов.

Как мы знаем (см. *теорему* **14** из *главы* **III**), для построения операторов $\bar{\downarrow}$ – юнктов нам достаточно продукций из множества Q_3. Чтобы выполнять конъюнкцию над парой согласованных операторов $\bar{\downarrow}$ – юнктов, сворачивая их в один оператор, необходимо систему продукций Q_3 пополнить копродукциями и комбинаторами. В рассматриваемом минимальном варианте расширенной системы налагается требование, чтобы начала согласованных операторов были $\langle\, \alpha_j \,\rangle$ и $\langle\, \bar{\alpha}_j \,\rangle$, где предполагается, что $\langle\, \alpha_j \,\rangle$ может равняться только $\langle\, \tau_j\, M\, M\, \ldots\, M \,\rangle$ либо $\langle\, \bar{\tau}_j\, M\, M\, \ldots\, M \,\rangle$ и тогда $\langle\, \bar{\alpha}_j \,\rangle$ должно равняться соответственно $\langle\, \bar{\tau}_j\, M\, M\, \ldots\, M \,\rangle$ либо $\langle\, \tau_j\, M\, M\, \ldots\, M \,\rangle$. Поэтому достаточно копродукции $[\, I\,]$ и $O,\, O^*$, определённых соответственно в *таблице* **2** и в **9**–ом и **10**–ом столбцах *таблицы* **4**, и комбинаторы конъюнкции K_K:

$$Q_3' \rightleftharpoons Q_3 \cup [\, I\,] \cup \{\, O,\, O^* \,\} \cup K_K = \{\, T,\, T^*,\, M,\, I,\, \bar{I},\, I^*,\, \bar{I}^*,\, O,\, O^*,\, R,\, R^*,\, L,\, L^* \,\}.$$

Эта система продукций является подмножеством к системе продукций **(5.27)**, поскольку

$$Q_3 \subset Q_2, \quad [\, I\,] \cup \{\, O,\, O^* \,\} \subset Q_k.$$

Но здесь самое главное то, что *теорема* **1** остаётся справедливой после соответствующих замен множеств Q_2 и **(5.27)** на Q_3 и Q_3', точнее верна

Теорема 3. Если в системе Q_3 заданы два согласованных оператора, то их конъюнкция всегда сворачивается в один оператор в расширенной системе продукций Q_3'.

Обоснование этой теоремы (как и *теоремы* **1**) состоит в доказательстве ряда лемм, имеющих конструктивный характер и почти всегда совпадающих с леммами, служащими для обоснования *теоремы* **1**. Поэтому обоснование и этой теоремы конструктивно, что позволяет легко строить конъюнктивную свёртку операторов. В почти совпадающих по своим формулировкам леммам предварительно требуется внести некоторые уточнения, чтобы правильно их понимать. В частности, ниже будем продолжать использовать для m – членной последовательности продукций из множества Q_3 одну литеру W, но никогда продукции из этой последовательности инвертированы не будут, так как продукции $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$ в систему Q_3 не входят. Легко понять, что *лемма* **2** сохраняет свою формулировку и доказательство. *Леммы* **1**, **3**, **4**, **5** в этом минимальном варианте не имеет смысла. Сказанное в *лемме* **6** будет относиться к случаю двух согласованных операторов, начала которых суть $\langle\, \alpha_j\, W \,\rangle$ и $\langle\, \bar{\alpha}_j\, W \,\rangle$, но при этом $m \neq 0$ и *первая* продукция в последовательности W должна быть отличной от M. Это значит, что конъюнкция таких операторов будет приводить к свёртке, которая начинается с O или O^*. Значит, в этом случае должно быть учтено *особое замечание* **1**, то есть должно учитываться, что копродукциям O и O^* предшествует $\langle\, \theta \,\rangle$. Иными словами, в *последнем* операторе развёртки копродукции O и O^* должны быть заменены на $\langle\, \theta \,\rangle$. Например:

$$\langle\bar{/}\rangle \quad \begin{array}{ccccc} \langle\,\tau & M & T & M & T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau & M & T & T & M\,\rangle \\ \hline \langle\,O^* & M & T & R & R^*\,\rangle \end{array} = \langle\, O^*\,M\,T\,R\,\bar\tau\,M\,T\,T\,\rangle = \langle\, O^*\,M\,T\,\tau\,M\,T\,\bar\tau\,M\,T\,T\,\rangle =$$

$$= \langle\, \bar\tau_2\,\tau\,M\,T\,\bar\tau\,M\,T\,T\,\rangle\ .$$

С учётом сказанного выше, *лемма* **7** сохранит свою силу и, таким образом, *теорема* **7** верна и ей можно придать вид правила.

Правило конъюнктивной свёртки в системе Q'_3. Пусть заданы *два* согласованных оператора в системе Q_3, записанные столбиком, над которыми выполняется конъюнкция с целью их свёртки в один оператор в расширенной системе продукций Q'_3. Поскольку у них всегда начала выравнены, то требуется лишь выяснить: имеется ли *фиктивный* **ос** или **ос** – ы начинаются с первого ? В случае *фиктивного* **ос** имеем копродукцию из $[\,I\,]$ (по *таблице* **2**), иначе — копродукцию O или O^* (по **9** – му и **10** – му столбцам *таблицы* **4**). Остальные копродукции свёртки определяются по **(5.18)**, а комбинаторы — по *таблице* **1**.

Интерпретация результирующей свёртки выполняется в полном соответствии с правилом интерпретации конъюнктивной свёртки из **5.3.1**.

Примеры на построение конъюнктивных свёрток согласованных операторов в системе Q'_3:

$$1)\ \begin{array}{ccccc} \langle\,\tau & T & T^* & M & T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau & M & M & T^* & T\,\rangle \\ \hline \langle\,\bar\tau & \bar I^* & L^* & L & T\,\rangle, \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{ccccc} \langle\,\bar\tau & T & M & T & M\,\rangle \\ \langle\,\tau & T & M & M & T^*\,\rangle \\ \hline \langle\,O & T & M & R^* & L\,\rangle, \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{ccccc} \langle\,\bar\tau & M & T^* & M & M\,\rangle \\ \langle\,\tau & M & M & T^* & T\,\rangle \\ \hline \langle\,\tau & M & I^* & L & R\,\rangle. \end{array}$$

Чтобы раскрыть смысл этих свёрток, приводим следующие развёртки для:

1) $\langle\,\bar\tau\,\bar I^*\,L^*\,L\,\rangle = \langle\,\tau\,T\,T^*\,\bar\tau\,\bar I^*\,L^*\,\rangle, \quad \langle\,\bar\tau\,\bar I^*\,L^*\,\rangle = \langle\,\bar\tau\,M\,\bar\tau\,\bar T^*\,\rangle;$

2) $\langle\,O\,T\,M\,R^*\,L\,\rangle = \langle\,\bar\tau\,T\,M\,T\,.\,O\,T\,M\,R^*\,\rangle, \quad \langle\,O\,T\,M\,R^*\,\rangle = \langle\,\bar\tau_1\,M\,\tau\,T\,M\,\rangle;$

3) $\langle\,\tau\,M\,I^*\,L\,R\,\rangle = \langle\,\tau\,M\,I^*\,L\,\bar\tau\,M\,T^*\,M\,\rangle, \quad \langle\,\tau\,M\,I^*\,L\,\rangle = \langle\,\bar\tau\,M\,T^*\,\tau\,M\,\bar T\,\rangle.$

5.5.2 Расширенная система операторов $\bar{/}$–юнктов.

Теперь мы можем всё то, что было рассмотрено в **5.5.1**, изложить для случая $\bar{/}$ – юнктов, поскольку мы знаем (*см. теорему* **14** из *главы* **III**), что для построения операторов $\bar{/}$ – юнктов достаточно продукций из множества Q_4. И здесь, чтобы выполнить дизъюнкцию над парой согласованных операторов $\bar{/}$ – юнктов, сворачивая их в один оператор, необходимо систему продукций Q_4 пополнить копродукциями и комбинаторами. В этом минимальном варианте расширенной системы достаточно копродукций $[\,I\,]$ и $\bar{O}, O^*$, определённых соответственно в *таблице* **6** и в **9**–ом и **10**–ом столбцах *таблицы* **8**, и комбинаторы дизъюнкции K_D:

$$Q_4' \rightleftharpoons Q_4 \cup [\,I\,] \cup \{\,\bar{O},\, \bar{O}^*\,\} \cup K_D = \{\,\bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, I,\, \bar{I},\, I^*,\, \bar{I}^*,\, \bar{O},\, \bar{O}^*,\, \bar{R},\, \bar{R}^*,\, \bar{L},\, \bar{L}^*\,\},$$

а для начал согласованных операторов $\bar{/}$ – юнктов сохранить те же требования, что и в **п. 5.5.1**.

Система продукций Q_4' является подмножеством к системе продукций **(5.77)**, так как

$$Q_4 \subset Q_2, \quad [\,I\,] \cup \{\,\bar{Q},\, \bar{Q}^*\,\} \subset Q_k.$$

И здесь самое главное то, что *теорема* **2** остаётся справедливой после соответствующих замен Q_2 и **(5.77)** на Q_4 и Q_4', точнее верна

Теорема 4. Если в системе Q_4 заданы два согласованных оператора, то их дизъюнкция всегда сворачивается в один оператор в расширенной системе продукций Q_4'.

Обоснование этой *теоремы* (как и *теоремы* **2**) состоит в доказательстве ряда лемм, имеющих конструктивный характер и почти всегда совпадающих с леммами, служащими для обоснования *теоремы* **2**. Поэтому обоснование этой *теоремы* конструктивно, что позволяет легко строить дизъюнктивную свёртку операторов. И здесь мы будем опираться на почти совпадающих по своим формулировкам леммам, поэтому вносим некоторые уточнения, понятные из предыдущего. В частности, будем продолжать использовать для m–членной последовательности продукций из множества Q_4 одну литеру W, но никогда продукции из этой последовательности инвертированы не будут, так как продукции T и T^* в систему Q_4 не входят.

Теперь легко понять, что *лемма* **9** сохраняет свою формулировку и доказательство. *Леммы* **8**, **10**, **11**, **12** в этом минимальном дизъюнктивном варианте не имеют смысла. Сказанное в *лемме* **13** будет относиться к случаю *двух* согласованных операторов, начало которых $\langle\, \alpha_j\, W\,\rangle$ и $\langle\, \bar{\alpha}_j\, W\,\rangle$, но при этом, как и раньше, $m \neq 0$ и *первая* продукция в последовательности W должна быть отличной от M. Это значит, что дизъюнкция таких операторов будет приводить к свёртке, которая начинается с $\bar{O}$ или $\bar{O}^*$. Значит, в этом случае должно быть учтено *особое* *замечание* **2**, то есть должно учитываться, что копродукциям $\bar{O}$ и $\bar{O}^*$ предшествует $\langle\,\bar{\theta}\,\rangle$. Иными словами, в последнем операторе развёртки копродукции $\bar{O}$ и $\bar{O}^*$ должны быть заменены на $\langle\,\bar{\theta}\,\rangle$. Например:

$$\langle\bar{\downarrow}\rangle\ \frac{\begin{array}{l}\langle\,\tau\ \ \bar{T}\ \ M\ \bar{T}^* M\,\rangle\\ \langle\,\bar{\tau}\ \ \bar{T}\ \ M\ \ M\ \ \bar{T}\,\rangle\end{array}}{\langle\,\bar{O}\ \ \bar{T}\ \ M\ \ \bar{L}^*\ \ \bar{R}\,\rangle} = \langle\,\bar{O}\,\bar{T}\,M\,\bar{L}^*\,\tau\,\bar{T}\,M\,\bar{T}^*\,\rangle = \langle\,\bar{\tau}\,\bar{T}\,M\,\tau_1\,M\,\tau\,\bar{T}\,M\,\bar{T}^*\,\rangle.$$

Замечание 18. Обращаем внимание на то, что если в конъюнкции имеем $\langle\,\tau\,\rangle = \langle\,\theta\,T^*\,\rangle$ и $\langle\,\bar{\tau}\,\rangle = \langle\,\theta\,T\,\rangle$, то в дизъюнкции не следует упускать, что

$$\langle\,\bar{\tau}\,\rangle = \langle\,\bar{\theta}\,\bar{T}^*\,\rangle \quad \text{и} \quad \langle\,\tau\,\rangle = \langle\,\bar{\theta}\,\bar{T}\,\rangle,$$

если даже об этом нет упоминаний.

В завершение рассуждений о *теореме* **4**, добавим, что с учётом сказанного выше, *лемма* **14** сохраняет свою силу и, таким образом, *теорема* **4** верна и ей можно придать вид

Правило дизъюнктивной свёртки в системе Q_4'. Пусть заданы два согласованных оператора в системе Q_4, записанные столбиком, над которыми выполняется дизъюнкция с целью их свёртки в один оператор в расширенной системе продукций Q_4'. Так как у них начала выравнены, то требуется лишь выяснить: имеется ли *фиктивный* **ос** или **ос** – ы начинаются с *первого* ? В случае *фиктивного* **ос** имеем продукцию из $[\,I\,]$ (по *таблице* **6**), иначе — копродукцию $\bar{O}$ или $\bar{O}^*$ (по **9** – му и **10** – му столбцам *таблицы* **8**). Остальные копродукции свёртки определяются по **(5.18)**, а комбинаторы — по *таблице* **1**.

Интерпретация результирующей дизъюнктивной свёртки выполняется в полном соответствии с правилом интерпретации дизъюнктивной свёртки из **5.4.1**.

Примеры на построение дизъюнктивных свёрток согласованных операторов в системе Q_4':

$$1)\ \frac{\begin{array}{c}\langle\,\bar{\tau}\ \ M\ \ \bar{T}^*\ \ M\ \ M\,\rangle\\ \langle\,\tau\ \ M\ \ M\ \ \bar{T}^*\ \ \bar{T}\,\rangle\end{array}}{\langle\,\tau\ \ M\ \ \bar{I}^*\ \ \bar{L}\ \ \bar{R}\,\rangle}, \qquad 2)\ \frac{\begin{array}{c}\langle\,\tau\ \ M\ \ \bar{T}\ \ M\ \ \bar{T}\,\rangle\\ \langle\,\bar{\tau}\ \ M\ \ \bar{T}\ \ \bar{T}\ \ M\,\rangle\end{array}}{\langle\,\bar{O}\ \ M\ \ \bar{T}\ \ \bar{R}\ \ \bar{R}^*\,\rangle}, \qquad 3)\ \frac{\begin{array}{c}\langle\,\tau\ \ \bar{T}\ \ \bar{T}^*\ \ M\ \ \bar{T}\,\rangle\\ \langle\,\bar{\tau}\ \ M\ \ M\ \ \bar{T}^*\ \ \bar{T}\,\rangle\end{array}}{\langle\,\bar{\tau}\ \ I^*\ \ \bar{L}^*\ \ \bar{L}\ \ \bar{T}\,\rangle}.$$

Чтобы раскрыть смысл этих свёрток, приводим следующие развёртки для:

1) $\langle \tau\, M\, \bar{I}^*\, \bar{L}\, \bar{R} \rangle = \langle \tau\, M\, \bar{I}^*\, \bar{L}\, \bar{\tau}\, M\, \bar{T}^*\, M \rangle, \quad \langle \tau\, M\, \bar{I}^*\, \bar{L} \rangle = \langle \bar{\tau}\, M\, \bar{T}^*\, \tau\, M\, T \rangle;$

2) $\langle \bar{O}\, M\, \bar{T}\, \bar{R}\, \bar{R}^* \rangle = \langle \bar{O}\, M\, \bar{T}\, \bar{R}\, \bar{\tau}\, M\, \bar{T}\, \bar{T} \rangle, \quad \langle \bar{O}\, M\, \bar{T}\, \bar{R} \rangle = \langle \tau_2\, \tau\, M\, \bar{T} \rangle;$

3) $\langle \bar{\tau}\, I^*\, \bar{L}^*\, \bar{L} \rangle = \langle \tau\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{\tau}\, I^*\, \bar{L}^* \rangle, \quad \langle \bar{\tau}\, I^*\, \bar{L}^* \rangle = \langle \tau\, M\, \bar{\tau}\, T^* \rangle.$

5.5.3 Системы, альтернативные Q'_3 и Q'_4.

В системах Q'_3 и Q'_4 содержатся копродукции $[\,I\,] \cup \{\,O,\, O^*\,\}$ и $[\,I\,] \cup \{\,\bar{O},\, \bar{O}^*\,\}$ соответственно. Однако вместо этих копродукций можно было бы использовать лишь копродукции $[\,E\,]$, то есть можно было бы рассматривать Q''_3 и Q''_4, определив их так:

$$Q''_3 \rightleftharpoons Q_3 \cup [\,E\,] \cup K_K = \{\,T,\, T^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, R,\, R^*,\, L,\, L^*\,\}.$$

$$Q''_4 \rightleftharpoons Q_4 \cup [\,E\,] \cup K_D = \{\,\bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, \bar{R},\, \bar{R}^*,\, \bar{L},\, \bar{L}^*\,\}.$$

В этих системах так же, как и в системах Q'_3 и Q'_4, можно выполнить преобразования над операторами, но преобразования в этих системах отличаются от преобразований в системах Q'_3 и Q'_4. О том, как выполнять преобразования в системе Q''_3 и для чего они нужны, мы узнаем в *главе* **VII**.

Разумеется, можно рассматривать и системы, аналогичные Q''_3 и Q''_4, но с ещё меньшим количеством копродукций, позволяющие в некоторых случаях решать задачи, не выходя за пределы указанных систем.

Примерами таких систем могут служить системы:

$$Q'''_3 \rightleftharpoons \{\,T,\, T^*,\, M,\, I,\, \bar{I},\, R,\, R^*,\, L,\, L^*\,\},$$

$$Q'''_4 \rightleftharpoons \{\,\bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, I,\, \bar{I},\, \bar{R},\, \bar{R}^*,\, \bar{L},\, \bar{L}^*\,\},$$

или системы:

$$Q^+_3 \rightleftharpoons Q''_3 \setminus \{\,R^*,\, L^*\,\} = \{\,T,\, T^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, R,\, L,\,\},$$

$$Q^+_4 \rightleftharpoons Q''_4 \setminus \{\,\bar{R}^*,\, \bar{L}^*\,\} = \{\,\bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, \bar{R},\, \bar{L},\,\}.$$

Глава 6

Интерпретация и преобразования операторов

Содержание этой главы в определённом смысле является развитием предыдущей, поскольку преобразования основаны на использовании продукций, копродукций и комбинаторов, а интерпретация используется в этой главе в широком смысле: как истолкование, объяснение и перевод на более понятный язык. Смысл такого выделения основан на том, что интерпретировать разумнее то, что в какой-то мере уже усвоено.

6.1 Интерпретация комбинаторов K_K в операторах

Определения комбинаторов K_K даны в *таблице* **1** *главы* **V**. Эти определения символически могут быть записаны и так:

$$M \bar{/} T = R, \quad T \bar{/} M = R^*, \quad M \bar{/} T^* = L, \quad T^* \bar{/} M = L^*, \tag{6.1}$$

но всегда под этими равенствами подразумеваются записи **(5.3)** — **(5.6)** и **(5.1)**, то есть

$$\left.\begin{aligned} \langle \gamma_j R \rangle &= \langle \gamma_j \alpha_j \rangle, & \langle \gamma_j R^* \rangle &= \langle \gamma_j \beta_j \rangle, \\ \langle \gamma_j L \rangle &= \langle \alpha_j \gamma_j \rangle, & \langle \gamma_j L^* \rangle &= \langle \beta_j \gamma_j \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.2}$$

где

$$\langle \alpha_j \rangle \bar{/} \langle \beta_j \rangle = \langle \gamma_j \rangle. \tag{6.3}$$

В более развёрнутом виде равенства **(6.2)** могут быть представлены так:

$$\left.\begin{aligned} \langle \gamma_j R\ R \rangle &= \langle \gamma_j R \alpha_j M \rangle, & \langle \gamma_j R^* R \rangle &= \langle \gamma_j R^* \alpha_j T \rangle, \\ \langle \gamma_j L R \rangle &= \langle \gamma_j L \alpha_j M \rangle, & \langle \gamma_j L^* R \rangle &= \langle \gamma_j L^* \alpha_j T^* \rangle, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \langle \gamma_j\, R\; L \rangle = \langle \alpha_j\, M\, \gamma_j\, R \rangle, & \langle \gamma_j\, R^*\, L \rangle = \langle \alpha_j\, T\, \gamma_j\, R^* \rangle, \\ \langle \gamma_j\, L\, L \rangle = \langle \alpha_j\, M\, \gamma_j\, L \rangle, & \langle \gamma_j\, L^*\, L \rangle = \langle \alpha_j\, T^*\, \gamma_j\, L^* \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \langle \gamma_j\, R\; R^* \rangle = \langle \gamma_j\, R\, \beta_j\, T \rangle, & \langle \gamma_j\, R^*\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, R^*\, \beta_j\, M \rangle, \\ \langle \gamma_j\, L\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, L\, \beta_j\, T^* \rangle, & \langle \gamma_j\, L^*\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, L^*\, \beta_j\, M \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \langle \gamma_j\, R\; L^* \rangle = \langle \beta_j\, T\, \gamma_j\, R \rangle, & \langle \gamma_j\, R^*\, L^* \rangle = \langle \beta_j\, M\, \gamma_j\, R^* \rangle, \\ \langle \gamma_j\, L\, L^* \rangle = \langle \beta_j\, T^*\, \gamma_j\, L \rangle, & \langle \gamma_j\, L^*\, L^* \rangle = \langle \beta_j\, M\, \gamma_j\, L^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{6.7}$$

Разумеется, что равенствам **(6.4)** — **(6.7)** можно придать и более общий вид. Для этого будем под C понимать некую строку из комбинаторов R, L, R^*, L^*, записанных в произвольной последовательности, а под A и B понимать строки из продукций T, T^*, M такой же длины, полученные из C в результате применения соответственно *первой* и *второй* строк из **(5.20)**, то есть

$$\left.\begin{array}{lll} C &=& R\,R^*\,L\,L^* \;\ldots\; L\,R\,R^*\,L^*\,, \\ A &=& M\,T\,M\,T^* \;\ldots\; M\,M\,T\,T^*\,, \\ B &=& T\,M\,T^*\,M \;\ldots\; T^*\,T\,M\,M\,. \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

В таких обозначениях равенства **(6.4)** — **(6.7)** являются одним из частных случаев следующих общих равенств:

$$\left.\begin{array}{ll} \langle \gamma_j\, C\; R \rangle = \langle \gamma_j\, C\, \alpha_j\, A \rangle, & \langle \gamma_j\, C\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, C\, \beta_j\, B \rangle, \\ \langle \gamma_j\, C\, L \rangle = \langle \alpha_j\, A\, \gamma_j\, C \rangle, & \langle \gamma_j\, C\, L^* \rangle = \langle \beta_j\, B\, \gamma_j\, C \rangle. \end{array}\right\} \tag{6.9}$$

В этом случае, когда комбинатору предшествуют копродукции, верна следующая

Теорема 1. Если комбинаторам R, $L\, R^*$, L^* предшествуют копродукции из $[\,P\,]$, $[\,Z\,]$, $[\,N\,]$, $[\,T\,]$, то верны равенства:

$$\left.\begin{array}{l} \langle \gamma_j\, P^*\, R \rangle = \langle \gamma_j\, Z\, R \rangle = \langle \gamma_j\, N^*\, R \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{T}\, R \rangle, \\ \langle \gamma_j\, \bar{P}^*\, R \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{Z}\, R \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{N}^*\, R \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{T}^*\, R \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \gamma_j\, P^*\, L \rangle = \langle \gamma_j\, Z\, L \rangle = \langle \gamma_j\, N^*\, L \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{T}\, L \rangle, \\ \langle \gamma_j\, \bar{P}^*\, L \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{Z}\, L \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{N}^*\, L \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{T}^*\, L \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.11}$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \gamma_j\, P\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, Z^*\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, N\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{T}\, R^* \rangle, \\ \langle \gamma_j\, \bar{P}\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{Z}^*\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{N}\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{T}^*\, R^* \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \gamma_j\, P\, L^* \,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, Z^*\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, N\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, L^* \,\rangle, \\ \langle\, \gamma_j\, \bar{P}\, L^* \,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{Z}^*\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{N}\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, L^* \,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Доказательство. Верность каждого из равенств **(6.10)** — **(6.13)** обосновывается прямыми выкладками. Например, для *первых* равенств из **(6.10)** выкладки таковы:

$$\langle\, \gamma_j\, P^*\, R \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, P^*\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, R \,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, Z\, R \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, Z\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, R \,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, N^*\, R \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, N^*\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, \alpha_j\, \bar{T} \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, R \,\rangle,$$

а для равенств из *второй* строки **(6.13)** — таковы:

$$\langle\, \gamma_j\, \bar{P}\, L^* \,\rangle = \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{P} \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, L^* \,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, \bar{Z}^*\, L^* \,\rangle = \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{Z}^* \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, L^* \,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, \bar{N}\, L^* \,\rangle = \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{N} \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{T}^* \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, L^* \,\rangle.$$

Выкладки для остальных равенств из **(6.10)** — **(6.13)** аналогичны, в чём следует читателю убедиться самостоятельно.

Можно упростить формулировку и обоснование *теоремы* **1**, если принять, что

$$\begin{aligned} G \;&\in\; \{\, P,\, Z^*,\, N \,\}, \qquad G^* \;\in\; \{\, P^*,\, Z,\, N^* \,\}, \\ \bar{G} \;&\in\; \{\, \bar{P},\, \bar{Z}^*,\, \bar{N} \,\}, \qquad \bar{G}^* \;\in\; \{\, \bar{P}^*,\, \bar{Z},\, \bar{N}^* \,\}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

В самом деле, используя **(6.14)**, *теореме* **1** можно придать такую формулировку.

Теорема 2. Если комбинаторам $R,\, L,\, R^*,\, L^*$ предшествуют копродукции $G,\, G^*,\, \bar{G},\, \bar{G}^*$, то верны равенства:

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \gamma_j\, G^*\, R \,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, R \,\rangle, \qquad \langle\, \gamma_j\, G^*\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, L \,\rangle, \\ \langle\, \gamma_j\, \bar{G}^*\, R \,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, R \,\rangle, \qquad \langle\, \gamma_j\, \bar{G}^*\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, L \,\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle\, \gamma_j\, G\, R^* \,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, R^* \,\rangle, \qquad \langle\, \gamma_j\, G\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, L^* \,\rangle, \\ \langle\, \gamma_j\, \bar{G}\, R^* \,\rangle \;&=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, R^* \,\rangle, \qquad \langle\, \gamma_j\, \bar{G}\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}^*\, L^* \,\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

Доказательство. Такими же прямыми выкладками можно убедиться в верности *этой* теоремы. Но предварительно следует иметь ввиду, что согласно **(5.17)** имеем:

$$G,\, G^* \hookrightarrow \bar{T}; \quad \bar{G},\, \bar{G}^* \hookrightarrow \bar{T}^*, \tag{6.17}$$

а в соответствии с *таблицей* **4** из *главы* **V**:

$$
\begin{aligned}
&R,\, L \;\;: \quad G^* \longmapsto \bar T, \qquad \bar G^* \longmapsto \bar T^*,\\
&R^*,\, L^*: \quad G \;\longmapsto \bar T, \qquad \bar G \;\longmapsto \bar T^*.
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

И тогда

$$
\begin{aligned}
\langle\, \gamma_j\, G^*\, R\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, G^*\, \alpha_j\, \bar T\,\rangle, = \langle\, \gamma_j\, \bar T\, \alpha_j\, \bar T\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T\, R\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, \bar G^*\, R\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, \bar G^*\, \alpha_j\, \bar T^*\,\rangle, = \langle\, \gamma_j\, \bar T^*\, \alpha_j\, \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T^*\, R\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, G^*\, L\,\rangle &= \langle\, \alpha_j\, \bar T\, \gamma_j\, G^*\,\rangle, = \langle\, \alpha_j\, \bar T\, \gamma_j\, \bar T\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T\, L\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, \bar G^*\, L\,\rangle &= \langle\, \alpha_j\, \bar T^*\, \gamma_j\, \bar G^*\,\rangle, = \langle\, \alpha_j\, \bar T^*\, \gamma_j\, \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T^*\, L\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, G\, R^*\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, G\, \beta_j\, \bar T\,\rangle, = \langle\, \gamma_j\, \bar T\, \beta_j\, \bar T\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T\, R^*\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, \bar G\, R^*\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, \bar G\, \beta_j\, \bar T^*\,\rangle, = \langle\, \gamma_j\, \bar T^*\, \beta_j\, \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T^*\, R^*\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, G\, L^*\,\rangle &= \langle\, \beta_j\, \bar T\, \gamma_j\, G\,\rangle, = \langle\, \beta_j\, \bar T\, \gamma_j\, \bar T\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T\, L^*\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, \bar G\, L^*\,\rangle &= \langle\, \beta_j\, \bar T^*\, \gamma_j\, \bar G\,\rangle, = \langle\, \beta_j\, \bar T^*\, \gamma_j\, \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T^*\, L^*\,\rangle.
\end{aligned}
$$

Теперь мы можем обобщить *теорему* **2**.

Теорема 3. Если комбинаторам $R,\, L,\, R^*,\, L^*$ предшествуют копродукции $G,\, \bar G,\, G^*,\, \bar G^*$, то верны равенства:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\langle\, \gamma_j\, G^* \ldots \bar G^*\, R\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, R\,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j\, G^* \ldots \bar G^*\, L\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, L\,\rangle,\\
&\langle\, \gamma_j\, G \ldots \bar G\, R^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, R^*\,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j\, G \ldots \bar G\, L^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, L^*\,\rangle,
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.19}
$$

при этом в левых частях **(6.19)** вместо $G^* \ldots \bar G^*$ может быть $\bar G^* \ldots G^*$, или $G^* \ldots G^*$, или $\bar G^* \ldots \bar G^*$, где многоточиями заменены G^* или $\bar G^*$, а вместо $G \ldots \bar G$ может быть $\bar G \ldots G$, или $G \ldots G$, или $\bar G \ldots \bar G$, где в свою очередь многоточиями заменены G или $\bar G$. Важно при этом, чтобы правые части **(6.19)** получились в результате применения **(6.18)**.

Доказательство. Прямые выкладки с применением **(6.17)** и **(6.18)** дают:

$$
\begin{aligned}
\langle\, \gamma_j\, G^* \ldots \bar G^*\, R\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, G^* \ldots \bar G^*\, \alpha_j\, \bar T \ldots \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, \alpha_j\, \bar T \ldots \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, R\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, G^* \ldots \bar G^*\, L\,\rangle &= \langle\, \alpha_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, \gamma_j\, G^* \ldots \bar G^*\,\rangle = \langle\, \alpha_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, L\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, G \ldots \bar G\, R^*\,\rangle &= \langle\, \gamma_j\, G \ldots \bar G\, \beta_j\, \bar T \ldots \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, \beta_j\, \bar T \ldots \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, R^*\,\rangle,\\
\langle\, \gamma_j\, G \ldots \bar G\, L^*\,\rangle &= \langle\, \beta_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, \gamma_j\, G \ldots \bar G\,\rangle = \langle\, \beta_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\,\rangle = \langle\, \gamma_j\, \bar T \ldots \bar T^*\, L^*\,\rangle.
\end{aligned}
$$

Кроме того, легко понять, что порядок следования G^* и $\bar{G}^*$ или G и $\bar{G}$ не важны в силу того, что по **(6.17)** и **(6.18)** замена и отображение выполняются посимвольно.

Замечание 1. Сказанное во второй части формулировки *теоремы* **3** относительно наборов копродукций $G^* \ldots \bar{G}^*$ и $G \ldots \bar{G}$ по умолчанию предполагается ниже имеющим аналогичный смысл и для записей $P \ldots \bar{P}$, $P^* \ldots \bar{P}^*$, или $Z^* \ldots \bar{Z}^*$, $Z \ldots \bar{Z}$, или $N \ldots \bar{N}$, $N^* \ldots \bar{N}^*$, или, быть может другие.

Теоремами **1** — **3** не исчерпываются все равенства, которыми связаны операторы в тех случаях, когда комбинаторам R, L, R^*, L^* предшествуют продукции из $[\,P\,]$, $[\,Z\,]$ и $[\,N\,]$. В дополнение к *этим* теоремам верна следующая ниже

Теорема 4. Если комбинаторам R, L, R^*, L^* предшествуют продукции из $[P]$, $[Z]$ и $[N]$, то верны равенства:

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\gamma_j P\ldots\bar{P}R\rangle &=& \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\alpha_j T\ldots T^*\rangle, & \langle\gamma_j P\ldots\bar{P}L\rangle &=& \langle\alpha_j T\ldots T^*\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle, \\ \langle\gamma_j P^*\ldots\bar{P}^*R^*\rangle &=& \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\beta_j T\ldots T^*\rangle, & \langle\gamma_j P^*\ldots\bar{P}^*L^*\rangle &=& \langle\beta_j T\ldots T^*\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.20}$$

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\gamma_j Z^*\ldots\bar{Z}^*R\rangle &=& \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\alpha_j M\ldots M\rangle, & \langle\gamma_j Z^*\ldots\bar{Z}^*L\rangle &=& \langle\alpha_j M\ldots M\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle, \\ \langle\gamma_j Z\ldots\bar{Z}R^*\rangle &=& \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\beta_j M\ldots M\rangle, & \langle\gamma_j Z\ldots\bar{Z}L^*\rangle &=& \langle\beta_j M\ldots M\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.21}$$

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\gamma_j N\ldots\bar{N}R\rangle &=& \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\alpha_j T^*\ldots T\rangle, & \langle\gamma_j N\ldots\bar{N}L\rangle &=& \langle\alpha_j T^*\ldots T\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle, \\ \langle\gamma_j N^*\ldots\bar{N}^*R^*\rangle &=& \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\beta_j T^*\ldots T\rangle, & \langle\gamma_j N^*\ldots\bar{N}^*L^*\rangle &=& \langle\beta_j T^*\ldots T\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle \end{array}\right\}. \tag{6.22}$$

Доказательство. В верности равенств **(6.20)** — **(6.22)** легко убедиться прямыми выкладками, но при этом следует иметь ввиду **(5.17)** и учитывать *таблицу* **4** из *главы* **V**, из которой следуют отображения:

$$\left.\begin{array}{lclllllll} R,L &:& P\longmapsto T, & \bar{P}\longmapsto T^*, & Z^*\longmapsto M, & \bar{Z}^*\longmapsto M, & N\longmapsto T^*, & \bar{N}\longmapsto T; \\ R^*,L^* &:& P^*\longmapsto T, & \bar{P}^*\longmapsto T^*, & Z\longmapsto M, & \bar{Z}\longmapsto M, & N^*\longmapsto T^*, & \bar{N}^*\longmapsto T. \end{array}\right\}. \tag{6.23}$$

Теперь достаточно пары примеров, чтобы понять верность всех остальных:

$$\langle\gamma_j Z\ldots\bar{Z}R^*\rangle \;=\; \langle\gamma_j Z\ldots\bar{Z}\beta_j M\ldots M\rangle = \langle\gamma_j\bar{T}\ldots\bar{T}^*\beta_j\, M\ldots M\rangle,$$

$$\langle\gamma_j N\ldots\bar{N}L\rangle \;=\; \langle\alpha_j T^*\ldots T\gamma_j N\ldots\bar{N}\rangle = \langle\alpha_j T^*\ldots T\gamma_j\,\bar{T}\ldots\bar{T}^*\rangle.$$

Замечание 2. Используя **(6.20)** — **(6.22)**, можно строить равенства, в которых входят копродукции и из $[\,P\,]$, и из $[\,Z\,]$, и из $[\,N\,]$. Например, мы можем не сомневаться в верности равенства:

$$\langle\,\gamma_j\,P\,Z^*\,\bar{P}\,\bar{N}\,\bar{Z}^*\,N\,R\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}^*\,\bar{T}^*\,\bar{T}^*\,\bar{T}\,\bar{T}\,\alpha_j\,T\,M\,T^*\,T\,M\,T^*\,\rangle.$$

В системе копродукций, определение которых дано в *таблице* **4** из *главы* **V**, остались копродукции $[O]$, для которых верны равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, O\, R \rangle = \langle \gamma_j\, O\, \alpha_j\, T \rangle, && \langle \gamma_j\, O\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, O\, \beta_j\, T^* \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, O^*\, R \rangle = \langle \gamma_j\, O^*\, \alpha_j\, T^* \rangle, && \langle \gamma_j\, O^*\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, O^*\, \beta_j\, T \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.24}$$

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, O\, L \rangle = \langle \alpha_j\, T\, \gamma_j\, O \rangle, && \langle \gamma_j\, O\, L^* \rangle = \langle \beta_j\, T^*\, \gamma_j\, O \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, O^*\, L \rangle = \langle \alpha_j\, T^*\, \gamma_j\, O^* \rangle, && \langle \gamma_j\, O^*\, L^* \rangle = \langle \beta_j\, T\, \gamma_j\, O^* \rangle \end{aligned}\right\}. \tag{6.25}$$

Замечание 3. Обращаем внимание, что в равенствах **(6.24)** и **(6.25)** необходимо считаться с особым *замечанием* **1** из *главы* **V**: копродукции O и O^* необходимо рассматривать и как комбинаторы.

Сказанное в *замечании* **3** означает верность следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, R\, O \rangle = \langle \alpha_j\, M\, \beta_j\, T \rangle, && \langle \gamma_j\, R^*\, O \rangle = \langle \alpha_j\, T\, \beta_j\, M \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, L\, O \rangle = \langle \alpha_j\, M\, \beta_j\, T^* \rangle, && \langle \gamma_j\, L^*\, O \rangle = \langle \alpha_j\, T^*\, \beta_j\, M \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.26}$$

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, R\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, T\, \alpha_j\, M \rangle, && \langle \gamma_j\, R^*\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, M\, \alpha_j\, T \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, L\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, T^*\, \alpha_j\, M \rangle, && \langle \gamma_j\, L^*\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, M\, \alpha_j\, T^* \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.27}$$

$$\langle \gamma_j\, C'\, O \rangle = \langle \alpha_j\, A\, \beta_j\, B \rangle, \ \ \langle \gamma_j\, C'\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, B\, \alpha_j\, A \rangle, \tag{6.28}$$

где α_j, β_j, γ_j связаны равенством **(6.3)**, а A, B, C' — определены в **(5.54)**, **(5.55)**. Обратим внимание еще на то, что

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, O\, O \rangle = \langle \alpha_j\, T\, \beta_j\, T^* \rangle, && \langle \gamma_j\, O^*\, O \rangle = \langle \alpha_j\, T^*\, \beta_j\, T \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, O\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, T^*\, \alpha_j\, T \rangle, && \langle \gamma_j\, O^*\, O^* \rangle = \langle \beta_j\, T\, \alpha_j\, T^* \rangle \end{aligned}\right\}. \tag{6.29}$$

В равенствах **(6.24)** — **(6.29)** содержатся копродукции O и O^*, но для полного охвата копродукций из $[O]$ следует добавить еще следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, \bar{O}\, R \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{O}\, \alpha_j\, \bar{T} \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}\, \bar{T}^* \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, \bar{O}^*\, R \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{O}^*\, \alpha_j\, \bar{T}^* \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, \bar{T}^* \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.30}$$

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, \bar{O}\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{O}\, \beta_j\, \bar{T}^* \rangle = \langle \beta_j\, \bar{T}^*\, \bar{T}^* \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, \bar{O}^*\, R^* \rangle = \langle \gamma_j\, \bar{O}^*\, \beta_j\, \bar{T} \rangle = \langle \beta_j\, \bar{T}\, \bar{T}^* \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.31}$$

$$\left.\begin{aligned} &\langle \gamma_j\, \bar{O}\, L \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}\, \gamma_j\, \bar{O} \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}\, \bar{T} \rangle, \\ &\langle \gamma_j\, \bar{O}^*\, L \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, \gamma_j\, \bar{O}^* \rangle = \langle \alpha_j\, \bar{T}^*\, \bar{T} \rangle \end{aligned}\right\}, \tag{6.32}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\gamma_j\,\bar O\,L^*\,\rangle &=\langle\,\beta_j\,\bar T^*\,\gamma_j\,\bar O\,\rangle = \langle\,\beta_j\,\bar T^*\,\bar T\,\rangle,\\ \langle\,\gamma_j\,\bar O^*\,L^*\,\rangle &=\langle\,\beta_j\,\bar T\,\gamma_j\,\bar O^*\,\rangle = \langle\,\beta_j\,\bar T\,\bar T\,\rangle\end{aligned}\right\}. \tag{6.33}$$

Замечание 4. В равенствах **(6.30)** — **(6.33)** учтено **(5.52)**. Имея это ввиду, указанные равенства становятся очевидными и не требуют никаких дополнительных разъяснений.

Выделенные в *таблицах* **2** и **3** *главы* **V** копродукции из $[I]$ и $[E]$ имеют определения, связанные с началами тех операторов, которые дают свёртку. А это значит, что развёртывая свёртки, мы должны следовать принятым определениям. Для копродукций $[I]$ верны равенства:

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,I\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,I^*\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T\,\alpha_j\,M\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,I^*\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,I\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T\,\bar\alpha_j\,T^*\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{6.34}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,\bar I\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar I^*\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T^*\,\alpha_j\,M\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,\bar I^*\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar I\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T^*\,\bar\alpha_j\,T\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{6.35}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,I\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,I^*\,L^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,M\,\alpha_j\,\bar T\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,I^*\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,I\,L^*\,\rangle = \langle\,\bar\alpha_j\,T^*\,\alpha_j\,\bar T\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{6.36}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,\bar I\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar I^*\,L^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,M\,\alpha_j\,\bar T^*\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,\bar I^*\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar I\,L^*\,\rangle = \langle\,\bar\alpha_j\,T\,\alpha_j\,\bar T^*\,\rangle\end{aligned}\right\}. \tag{6.37}$$

Верность равенств **(6.34)** — **(6.37)** обосновывается также, как это делалось выше: прямыми выкладками. Покажем это на примере последнего равенства из **(6.37)**:

$$\langle\,\alpha_j\,\bar I^*\,L\,\rangle = \langle\,\bar\alpha_j\,T\,\alpha_j\,\bar I^*\,\rangle = \langle\,\bar\alpha_j\,T\,\alpha_j\,\bar T^*\,\rangle, \quad \langle\,\alpha_j\,\bar I\,L^*\,\rangle = \langle\,\bar\alpha_j\,T\,\alpha_j\,\bar I\,\rangle = \langle\,\bar\alpha_j\,T\,\alpha_j\,\bar T^*\,\rangle.$$

Для копродукций $[E]$ верны равенства:

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,E\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,E^*\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T\,\tau_{j+1}\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,E^*\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,E\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T\,\alpha_j\,M\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{6.38}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,\bar E\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar E^*\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T^*\,\bar\tau_{j+1}\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,\bar E^*\,R\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar E\,R^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\bar T^*\,\alpha_j\,M\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{6.39}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,E\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,E^*\,L^*\,\rangle = \langle\,\tau_{j+1}\,\alpha_j\,\bar T\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,E^*\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,E\,L^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,M\,\alpha_j\,\bar T\,\rangle\end{aligned}\right\}, \tag{6.40}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\alpha_j\,\bar E\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar E^*\,L^*\,\rangle = \langle\,\bar\tau_{j+1}\,\alpha_j\,\bar T^*\,\rangle,\\ \langle\,\alpha_j\,\bar E^*\,L\,\rangle &=\langle\,\alpha_j\,\bar E\,L^*\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,M\,\alpha_j\,\bar T^*\,\rangle\end{aligned}\right\}. \tag{6.41}$$

Верность равенств **(6.38)** — **(6.41)** обосновывается так же, как это сделано на примере *первого* равенства из **(6.41)**:

$$\langle\, \alpha_j\, \bar{E}\, L\,\rangle \,=\, \langle\, \nu_j\, T\, \alpha_j\, \bar{E}\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{\tau}_{j+1}\, \alpha_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \quad \langle\, \alpha_j\, \bar{E}^*\, L^*\,\rangle \,=\, \langle\, \nu_j\, T\, \alpha_j\, \bar{E}^*\,\rangle \,=\, \langle\, \bar{\tau}_{j+1}\, \alpha_j\, \bar{T}^*\,\rangle.$$

Замечание 5. Все представленные выше равенства являются простыми детализациями и иллюстрациями к рассмотренной теории в *главе* **V**. Эти детализации нам необходимы для того, чтобы сделать следующий шаг в развитии понятия комбинатора и копродукции.

Замечание 6. В силу определений **(3.51)** — **(3.52)** продукций из $[M]$ для заданного вектора $\langle\, \gamma_j\,\rangle$ необходимо уметь строить векторы $\langle\, \bar{\gamma}_j\,\rangle$, $\langle\, \gamma_j^*\,\rangle$ $\langle\, \bar{\gamma}_j^*\,\rangle$. А если вектор $\langle\, \gamma_j\,\rangle$ есть оператор в системе **(5.27)** или Q_3', то построение указанных операторов должно быть изучено.

О построении инвертированных операторов в указанных системах пойдёт речь ниже, а здесь вкратце рассмотрим лишь вопрос о построении сопряжённых операторов.

Прежде всего заметим, что из равенства **(6.3)** следует равенство:

$$\langle\, \alpha_j^*\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j^*\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\,\rangle. \tag{6.42}$$

Теорема 5. Если $y_1 \,=\, \langle\, \gamma_j\, R\,\rangle$, $y_2 = \langle\, \gamma_j\, L\,\rangle$, $y_3 \,=\, \langle\, \gamma_j\, R^*\,\rangle$, $y_4 \,=\, \langle\, \gamma_j\, L^*\,\rangle$, то $y_1^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, L\,\rangle$, $y_2^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, R\,\rangle$, $y_3^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, L^*\,\rangle$, $y_4^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, R^*\,\rangle$.

Доказательство. Используя равенства **(6.2)** и учитывая **(6.42)**, получаем

$$y_1^* \,=\, \langle\, \gamma_j\, \alpha_j\,\rangle^* \,=\, \langle\, \alpha_j^*\, \gamma_j^*\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, L\,\rangle, \quad y_2^* \,=\, \langle\, \alpha_j\, \gamma_j\,\rangle^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, \alpha_j^*\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, R\,\rangle,$$

$$y_3^* \,=\, \langle\, \gamma_j\, \beta_j\,\rangle^* \,=\, \langle\, \beta_j^*\, \gamma_j^*\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, L^*\,\rangle, \quad y_4^* \,=\, \langle\, \beta_j\, \gamma_j\,\rangle^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, \beta_j^*\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, R^*\,\rangle.$$

Теперь, используя *теорему* **5**, *теоремы* **11** — **13** из *главы* **III**, мы в состоянии, быть может с использованием равенств, представленных выше, строить сопряжённые операторы в самых общих случаях.

Например:

$$\langle\, \gamma_j\, R\, R\,\rangle^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, L\, L\,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j\, L\, R^*\, R\, L^*\,\rangle^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, R\, L^*\, L\, R^*\,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, \bar{Z}\, L^*\,\rangle^* \,=\, \langle\, \beta_j\, M\, \gamma_j\, \bar{T}^*\,\rangle^* \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, \bar{T}\, \beta_j^*\, M\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, Z\, R^*\,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, P\, R^*\,\rangle^* \,=\, \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, \alpha_j\, T\,\rangle^* \,=\, \langle\, \alpha_j\, T^*\, \gamma_j^*\, \bar{T}^*\,\rangle \,=\, \langle\, \gamma_j^*\, \bar{P}\, L\,\rangle,$$

$$\langle\, \gamma_j\, I\, R\,\rangle^* \;=\; \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\, \alpha_j\, M\,\rangle^* \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, M\, \alpha_j^*\, \bar{T}^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{I}\, L\,\rangle.$$

Эти примеры являются лишь подтверждением теорем, следующих ниже.

Теорема 6. Если в записи оператора $\langle\, a\,\rangle$ использованы копродукции из $[\,I\,]$, $[\,E\,]$, $[\,P\,]$, $[\,Z\,]$, $[\,N\,]$, то в записи оператора $\langle\, a^*\,\rangle$, сопряжённого заданному оператору $\langle\, a\,\rangle$, все копродукции должны быть инвертированы.

Доказательство. В верности этой теоремы можно убедиться, используя результаты полученных выше равенств.

Например, для копродукций $[\,I\,]$ и $[\,E\,]$ могут быть использованы равенства **(6.34)** — **(6.37)** и **(6.38)** — **(6.41)** соответственно. Так, если

$$\langle\, a_1\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, I\, L\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, M\, \alpha_j\, \bar{T}^*\,\rangle, \qquad \langle\, a_2\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, I^*\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\, \bar{\alpha}_j\, T^*\,\rangle,$$

$$\langle\, a_3\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, E^*\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, \bar{T}\, \alpha_j\, M\,\rangle, \qquad \langle\, a_4\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, E\, L^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, M\, \alpha_j\, \bar{T}\,\rangle,$$

то

$$\langle\, a_1^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}\, \alpha_j^*\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{I}\, R\,\rangle, \qquad \langle\, a_2^*\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, T\, \alpha_j^*\, \bar{T}^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{I}^*\, L\,\rangle,$$

$$\langle\, a_3^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, M\, \alpha_j^*\, \bar{T}^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{E}^*\, L\,\rangle, \qquad \langle\, a_4^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{T}^*\, \alpha_j^*\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, \bar{E}\, R^*\,\rangle.$$

Для остальных копродукций, используя *теорему* **4**, имеем

$$\langle\, a\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, P\, Z^*\, N\, \bar{P}\, \bar{Z}^*\, \bar{N}\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \alpha_j\, T\, M\, T^*\, T^*\, M\, T\,\rangle,$$

$$\langle\, a^*\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j^*\, T^*\, M\, T\, T\, M\; T^*\, \gamma_j^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^*\, \bar{P}\, \bar{Z}^*\, \bar{N}\, P\, Z^*\, N\, L\,\rangle;$$

$$\langle\, b\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, P^*\, Z\, N^*\, \bar{P}^*\, \bar{Z}\, \bar{N}^*\, R^*\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \beta_j\, T\, M\, T^*\, T^*\, M\, T\,\rangle,$$

$$\langle\, b^*\,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j^*\, T^*\, M\, T\, T\, M\; T^*\, \gamma_j^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^*\, \bar{P}^*\, \bar{Z}\, \bar{N}^*\, P^*\, Z\, N^*\, L^*\,\rangle.$$

Копродукции из $[\,O\,]$ не включены в *теорему* **6**, поскольку для них верна

Теорема 7. Если в записи оператора $\langle\, a\,\rangle$ использованы копродукции из $[\,O\,]$, то в записи оператора $\langle\, a^*\,\rangle$, сопряжённого заданному оператору $\langle\, a\,\rangle$, копродукции должны быть сопряжёнными исходным. При этом сказанное остаётся справедливым для O и O^* и тогда, когда они выступают в роли комбинаторов.

Доказательство. В самом деле, в соответствии с **(6.30)** — **(6.33)** имеем:

$$\langle a_1 \rangle = \langle \gamma_j \bar{O} R \rangle = \langle \alpha_j \bar{T} \bar{T}^* \rangle, \quad \langle a_2 \rangle = \langle \gamma_j \bar{O}^* R \rangle = \langle \alpha_j \bar{T}^* \bar{T}^* \rangle,$$

$$\langle a_3 \rangle = \langle \gamma_j \bar{O} R^* \rangle = \langle \beta_j \bar{T}^* \bar{T}^* \rangle, \quad \langle a_4 \rangle = \langle \gamma_j \bar{O}^* R^* \rangle = \langle \beta_j \bar{T} \bar{T}^* \rangle,$$

значит

$$\langle a_1^* \rangle = \langle \alpha_j^* \bar{T}^* \bar{T} \rangle = \langle \gamma_j^* \bar{O}^* L \rangle, \quad \langle a_2^* \rangle = \langle \alpha_j^* \bar{T} \bar{T} \rangle = \langle \gamma_j^* \bar{O} L \rangle,$$

$$\langle a_3^* \rangle = \langle \beta_j^* \bar{T} \bar{T} \rangle = \langle \gamma_j^* \bar{O}^* L^* \rangle, \quad \langle a_4^* \rangle = \langle \beta_j^* \bar{T}^* \bar{T} \rangle = \langle \gamma_j \bar{O} L^* \rangle.$$

Используя **(6.24)** и **(6.25)** для:

$$\langle b_1 \rangle = \langle \gamma_j O R \rangle = \langle \alpha_j \beta_j \alpha_j \bar{\theta}_j \rangle, \quad \langle b_2 \rangle = \langle \gamma_j O^* R \rangle = \langle \beta_j \alpha_j \bar{\theta}_j \alpha_j \rangle,$$

$$\langle b_3 \rangle = \langle \gamma_j O R^* \rangle = \langle \alpha_j \beta_j \bar{\theta}_j \beta_j \rangle, \quad \langle b_4 \rangle = \langle \gamma_j O^* R^* \rangle = \langle \beta_j \alpha_j \beta_j \bar{\theta}_j \rangle$$

имеем

$$\langle b_1^* \rangle = \langle \bar{\theta}_j \alpha_j^* \beta_j^* \alpha_j^* \rangle = \langle \gamma_j^* O^* L \rangle, \quad \langle b_2^* \rangle = \langle \alpha_j^* \bar{\theta}_j \alpha_j^* \beta_j^* \rangle = \langle \gamma_j^* O L \rangle,$$

$$\langle b_3^* \rangle = \langle \beta_j^* \bar{\theta}_j \beta_j^* \alpha_j^* \rangle = \langle \gamma_j^* O^* L^* \rangle, \quad \langle b_4^* \rangle = \langle \bar{\theta}_j \beta_j^* \alpha_j^* \beta_j^* \rangle = \langle \gamma_j^* O L^* \rangle.$$

И наконец, по **(6.26)**, **(6.27)** и **(6.29)** получаем:

$$\langle a \rangle = \langle \gamma_j R O \rangle = \langle \alpha_j M \beta_j T \rangle, \quad \langle a^* \rangle = \langle \beta_j^* T^* \alpha_j^* M \rangle = \langle \gamma_j^* L O^* \rangle,$$

$$\langle b \rangle = \langle \gamma_j L O \rangle = \langle \alpha_j M \beta_j T^* \rangle, \quad \langle b^* \rangle = \langle \beta_j^* T \alpha_j^* M \rangle = \langle \gamma_j^* R O^* \rangle, \ \ldots,$$

$$\langle c \rangle = \langle \gamma_j O O \rangle = \langle \alpha_j T \beta_j T^* \rangle, \quad \langle c^* \rangle = \langle \beta_j^* T \alpha_j^* T^* \rangle = \langle \gamma_j^* O^* O^* \rangle,$$

$$\langle d \rangle = \langle \gamma_j O O^* \rangle = \langle \beta_j T^* \alpha_j T \rangle, \quad \langle d^* \rangle = \langle \alpha_j^* T^* \beta_j^* T \rangle = \langle \gamma_j^* O^* O \rangle.$$

6.2 Интерпретация комбинаторов K_D в операторах

Определения комбинаторов K_D даны в *таблице* **5** *главы* **V**. Эти определения символически могут быть записаны и так:

$$M \,\bar{\downarrow}\, \bar{T} = \bar{R}, \quad \bar{T} \,\bar{\downarrow}\, M = \bar{R}^*, \quad M \,\bar{\downarrow}\, \bar{T}^* = \bar{L}, \quad \bar{T}^* \,\bar{\downarrow}\, M = \bar{L}^*, \tag{6.43}$$

но всегда под этими равенствами подразумеваются равенства **(5.3)** — **(5.6)** и **(5.1)**, к обеим частям которых применено инвертирование, то есть для отрицательных комбинаторов K_D верны равенства:

$$\left.\begin{array}{llll} \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \rangle = \langle \bar{\gamma}_j \bar{\alpha}_j \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \rangle = \langle \bar{\gamma}_j \bar{\beta}_j \rangle, \\ \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \rangle = \langle \bar{\alpha}_j \bar{\gamma}_j \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \rangle = \langle \bar{\beta}_j \bar{\gamma}_j \rangle \end{array}\right\}, \tag{6.44}$$

где

$$\langle \bar{\alpha}_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\beta}_j \rangle = \langle \bar{\gamma}_j \rangle. \tag{6.45}$$

В более развёрнутом виде равенства **(6.44)** могут быть представлены так:

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \bar{R} \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \bar{\alpha}_j M \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \bar{R} \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \bar{\alpha}_j \bar{T} \rangle, \\ \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \bar{R} \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \bar{\alpha}_j M \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \bar{R} \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \bar{\alpha}_j \bar{T}^* \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.46}$$

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \bar{L} \rangle & = & \langle \bar{\alpha}_j M \bar{\gamma}_j \bar{R} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \bar{L} \rangle & = & \langle \bar{\alpha}_j \bar{T} \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \rangle, \\ \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \bar{L} \rangle & = & \langle \bar{\alpha}_j M \bar{\gamma}_j \bar{L} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \bar{L} \rangle & = & \langle \bar{\alpha}_j \bar{T}^* \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.47}$$

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \bar{R}^* \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \bar{\beta}_j \bar{T} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \bar{R}^* \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \bar{\beta}_j M \rangle, \\ \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \bar{R}^* \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \bar{\beta}_j \bar{T}^* \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \bar{R}^* \rangle & = & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \bar{\beta}_j M \rangle, \end{array}\right\} \tag{6.48}$$

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \bar{L}^* \rangle & = & \langle \bar{\beta}_j \bar{T} \bar{\gamma}_j \bar{R} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \bar{L}^* \rangle & = & \langle \bar{\beta}_j M \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \rangle, \\ \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \bar{L}^* \rangle & = & \langle \bar{\beta}_j \bar{T}^* \bar{\gamma}_j \bar{L} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \bar{L}^* \rangle & = & \langle \bar{\beta}_j M \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{6.49}$$

Теперь можно прямыми выкладками убедиться в верности равенств **(6.46)** — **(6.49)**, но (и это значительно важнее) можно заметить, что равенства **(6.46)** — **(6.49)** суть равенства $\overline{(\mathbf{6.4})}$ — $\overline{(\mathbf{6.7})}$, то есть полученные из равенств **(6.4)** — **(6.7)** в результате применения принципа инвертирования к оператору, который имеет такую формулировку.

Принцип инвертирования оператора. Инвертирование оператора означает инвертирование его комбинаторов, копродукций и продукций (за исключением его продукций из $[\,M\,]$).

Принцип инвертирования применим к любому из равенств из **6.1** и это следует из сопоставления *таблиц* **1** — **4** с соответствующими *таблицами* **5** — **8** из *главы* **V**. Поэтому ссылка на номер равенства с чертой над номером не должна приводить к недоразумению. Например, $\overline{(\mathbf{6.2})}$ — это равенства **(6.44)**, которые получены из равенств **(6.2)** в результате применения к ним принципа инвертирования оператора.

Принцип сопряжения (это *теоремы* **5** — **7** из **6.1**), применённый к инвертированным операторам, приводит к двойственным операторам. Подход здесь такой. Из равенства **(6.45)** следует равенство:

$$\langle \bar{\alpha}^*_j \rangle \bar{\downarrow} \langle \bar{\beta}^*_j \rangle = \langle \bar{\gamma}^*_j \rangle. \tag{6.50}$$

Принцип сопряжения говорит о верности равенств:

$$\left.\begin{array}{lcllcl} \langle \bar{\gamma}_j \bar{R} \rangle^* & = & \langle \bar{\gamma}^*_j \bar{L} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{R}^* \rangle^* & = & \langle \bar{\gamma}^*_j \bar{L}^* \rangle, \\ \langle \bar{\gamma}_j \bar{L} \rangle^* & = & \langle \bar{\gamma}^*_j \bar{R} \rangle, & \langle \bar{\gamma}_j \bar{L}^* \rangle^* & = & \langle \bar{\gamma}^*_j \bar{R}^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{6.51}$$

Верность *равенств* **(6.51)** обосновывается использованием *равенств* **(6.44)**:

$$\langle\, \bar{\gamma}_j\, \bar{R}\,\rangle^* \;=\; \langle\, \bar{\gamma}_j\, \bar{\alpha}_j\,\rangle^* \;=\; \langle\, \bar{\alpha}_j^*\, \bar{\gamma}_j^*\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\gamma}_j^*\, \bar{L}\,\rangle,$$

$$\langle\, \bar{\gamma}_j\, \bar{R}^*\,\rangle^* \;=\; \langle\, \bar{\gamma}_j\, \bar{\beta}_j\,\rangle^* \;=\; \langle\, \bar{\beta}_j^*\, \bar{\gamma}_j^*\,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\gamma}_j^*\, \bar{L}^*\,\rangle.$$

В итоге можем утверждать, что используя *равенства* из **6.1**, *теоремы* **11 — 13** из **III** *главы* и принципы инвертирования и сопряжения операторов, мы можем записывать новые равенства и строить инвертированные, сопряжённые и двойственные операторы к заданным исходным операторам. Поэтому мы наряду с ссылкой на номер (λ) некоторого равенства или оператора можем иметь ссылку $(\bar{\lambda})$, (λ^*) и $(\bar{\lambda}^*)$.

6.3 Интерпретация копродукций в операторах

Сопоставление между *таблицами* **1 — 4** и *таблицами* **5 — 8** *главы* **V**, которыми определены как комбинаторы (*таблицы* **1** и **5**), так и копродукции (*таблицы* **2 — 4** и **6 — 8**), показывает: если комбинаторы определены однозначно, то этого же сказать нельзя о копродукциях (их определение зависит от того, под каким из комбинаторов они находятся). Мы говорим, что копродукция находится под тем из комбинаторов, который в операторе занимает самое правое положение. Например, в операторе $\langle\, \alpha_j\, I\, P\, L\, R\,\rangle$ копродукция P находится под комбинатором R. Но когда записана развёртка этого оператора

$$\langle\, \alpha_j\, I\, P\, L\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, I\, P\, L\, \bar{\alpha}_j\, M\, T\, M\,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, I\, P\, L\, T\,\rangle \,\&\, \langle\, \bar{\alpha}_j\, M\, T\, M\, T^*\,\rangle,$$

то уже в развёртке та же копродукция находится под комбинатором L.

В связи со сказанным и учитывая то, что копродукции из $[\,O\,]$ могут играть роль и комбинаторов, то требуются соглашения, которые должны позволить снять указанную неопределённость.

6.3.1 Копродукции $[\,O\,]$ в операторах.

По отношению к копродукциям $[\,O\,]$ в операторах примем такое соглашение: если в записи оператора имеются копродукции из $[\,O\,]$, то всегда только одна (самая *правая*) из них играет роль комбинатора, а все остальные играют роль копродукций, при этом правила синонимов для копродукций, расположенных в записи оператора *правее* O или O^*, определяются соотношениями **(5.18)**, а — *правее* $\bar{O}$ или $\bar{O}^*$ — соотношениями **(5.19)**.

Обратим внимание, что в этом соглашении всегда следует иметь ввиду особое *замечание* **1** из **5.3** и особое *замечание* **2** из **5.4**.

Иллюстрационные примеры.

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \langle\, \tau\, I\, R\, L^*\, O\, \rangle = \langle\, \tau\, M\, M\, T^*\, \bar{\tau}\, T^*\, T\, M\, \rangle,\\
&2) \quad \langle\, \tau\, I\, R\, L^*\, O^*\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, T^*\, T\, M\, \tau\, M\, M\, T^*\, \rangle,\\
&3) \quad \langle\, \bar{\tau}\, \bar{I}\, \bar{R}\, \bar{L}^*\, \bar{O}\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, M\, M\, \bar{T}^*\, \tau\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, M\, \rangle,\\
&4) \quad \langle\, \bar{\tau}\, I\, \bar{R}\, \bar{L}^*\, \bar{O}^*\, \rangle = \langle\, \tau\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, M\, \bar{\tau}\, M\, M\, \bar{T}^*\, \rangle.
\end{aligned}
$$

В этих примерах $\langle\, \gamma\, \rangle = \langle\, \tau\, I\, R\, L^*\, \rangle$, $\langle\, \bar{\gamma}\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, \bar{I}\, \bar{R}\, \bar{L}^*\, \rangle$.

Поэтому

$$
\left.
\begin{aligned}
R\, :\, \langle\, \gamma\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \alpha\, \rangle = \langle\, \tau\, M\, M\, T^*\, \rangle,\\
R^*\, :\, \langle\, \gamma\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \beta\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, T^*\, T\, M\, \rangle
\end{aligned}
\right\},
$$

что следует из **(5.20)** и **(5.22)**;

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{R}\, :\, \langle\, \bar{\gamma}\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \bar{\alpha}\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, M\, M\, \bar{T}^*\, \rangle,\\
\bar{R}^*\, :\, \langle\, \bar{\gamma}\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \bar{\beta}\, \rangle = \langle\, \tau\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, M\, \rangle
\end{aligned}
\right\},
$$

что следует из **(5.21)** и **(5.23)**.

Замечание 7. Примеры **1 — 4** не могут быть пополнены операторами $\langle\, \gamma\, \bar{O}\, \rangle$, $\langle\, \gamma\, \bar{O}^*\, \rangle$ и $\langle\, \bar{\gamma}\, O\, \rangle$, $\langle\, \bar{\gamma}\, O^*\, \rangle$, так как отображения отрицательных комбинаторов под положительными и отображения положительных комбинаторов под отрицательными не определены. Преодоление указанного затруднения можно достичь лишь дополнительными определениями или соглашениями.

В тех случаях, когда над комбинаторами из $[\, O\,]$ содержатся только копродукции, ситуации, аналогичной указанной в *замечании* **7**, возникнуть не может. Например, если $\langle\, \gamma\, \rangle = \langle\, \tau\, \bar{I}\, O\, P\, \rangle$ и поскольку

$$
\left.
\begin{aligned}
R\, :\, \langle\, \gamma\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \alpha\, \rangle = \langle\, \tau\, M\, T\, T\, \rangle,\\
R^*\, :\, \langle\, \gamma\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \beta\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, T\, T^*\, \bar{T}\, \rangle
\end{aligned}
\right\},
$$

что следует из *таблиц* **2** и **4** *главы* **V**, и

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{R}\, :\, \langle\, \gamma\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \alpha_1\, \rangle = \langle\, \tau\, M\, T\, \bar{T}^*\, \rangle,\\
\bar{R}^*\, :\, \langle\, \gamma\, \rangle \ &\longmapsto\ \langle\, \beta_1\, \rangle = \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}^*\, T^*\, T^*\, \rangle
\end{aligned}
\right\},
$$

что следует из *таблиц* **6** и **8** *главы* **V**, то

$$\begin{aligned}
\langle \tau \bar{I} O P O \rangle &= \langle \tau M T T \bar{\tau} T T^* \bar{T} \rangle, \\
\langle \tau \bar{I} O P O^* \rangle &= \langle \bar{\tau} T T^* \bar{T} \tau M T T \rangle, \\
\langle \tau \bar{I} O P \bar{O} \rangle &= \langle \tau M T \bar{T}^* \bar{\tau} \bar{T}^* T^* T^* \rangle, \\
\langle \tau \bar{I} O P \bar{O}^* \rangle &= \langle \bar{\tau} \bar{T}^* T^* T^* \tau M T \bar{T}^* \rangle.
\end{aligned}$$

И, наконец, в подтверждении соглашения имеем:

$$\begin{aligned}
\langle \tau \bar{I} O P O P \bar{Z} N^* \rangle &= \langle \tau \bar{I} O P O \bar{T} \bar{T}^* \bar{T} \rangle, \\
\langle \tau \bar{I} O P \bar{O} P \bar{Z} N^* \rangle &= \langle \tau \bar{I} O P \bar{O} T^* T T^* \rangle.
\end{aligned}$$

Разумеется, что не всегда самый правый комбинатор есть комбинатор из $[O]$. Могут быть случаи, когда *правее* за комбинатором из $[O]$ имеются еще и другие комбинаторы, но такие случаи следует считать уже рассмотренными в **6.1** и **6.2** в объеме, имеющем очертания, оговорённые в *замечании* **7**, но относящиеся к комбинаторам из $[R]$ или $[L]$.

6.3.2 Копродукции $Q_k \setminus [O]$ в операторах.

В операторах копродукции играют вспомогательную роль, являясь синонимами для продукций: их неоднозначность в определениях диктует ряд требований в их использовании.

Если в записи оператора нет комбинаторов, то в записи такого оператора не могут быть и копродукции, то есть оператор может содержать лишь продукции.

Если в записи оператора после самого *правого* комбинатора K_K или K_D имеются копродукции, то эти копродукции являются синонимами продукциям, определяемыми соотношениями **(5.18)** или **(5.19)** соответственно, что означает: оператор остаётся равным исходному, если те копродукции, которые следуют за K_K или K_D будут заменены соответствующими продукциями.

Таким образом, остаётся истолковать запись оператора от самого *правого* комбинатора до *первой* справа налево копродукции из $[I]$ или из $[E]$. Строго говоря, эти случаи уже рассмотрены в **(6.34)** — **(6.37)** и **(6.38)** — **(6.41)**. Здесь остаётся лишь добавить, что указанные равенства получают такое обобщение. Чтобы его сформулировать, примем

$$
\begin{aligned}
C &= P\,P^*\,\bar P\,\bar P^*\,Z\,Z^*\,\bar Z\,\bar Z^*\,N\,N^*\,\bar N\,\bar N^*\ ,\\
A &= T\,\bar T\,T^*\,\bar T^*\,\bar T^*\,M\,T^*\,M\,T^*\,\bar T\,T\,\bar T^*\ ,\\
B &= \bar T\,T\,\bar T^*\,T^*\,M\,\bar T\,M\,\bar T^*\,\bar T\,T^*\,\bar T^*\,T\ ,\\
D &= \bar T\,\bar T\,\bar T^*\,\bar T^*\,\bar T\,\bar T\,\bar T^*\,\bar T^*\,\bar T\,\bar T\,\bar T^*\,\bar T^*\ ,
\end{aligned}
$$

при этом предполагается, что в записях для A, B, C, D можно переставлять любые столбцы или вычёркивать любые из них, или иметь неоднократные повторения любого из столбцов, важно лишь не разрушать столбцы. Символ инвертирования относится ко всей строке.

Тогда **(6.34)** — **(6.37)** могут быть переписаны так:

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,I\,C\,R\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,I\,C\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,I^*\,C\,R^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,I^*\,C\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.52}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,I^*\,C\,R\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,I^*\,C\,\bar\gamma_j\,T^*\,A\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\bar\gamma_j\,T^*\,A\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,I\,C\,R^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,I\,C\,\bar\gamma_j\,T^*\,B\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\bar\gamma_j\,T^*\,B\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.53}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,\bar I\,C\,R\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,\bar I\,C\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,R^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.54}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,R\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,\bar\gamma_j\,T\,A\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\bar\gamma_j\,T\,A\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,\bar I\,C\,R^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,\bar I\,C\,\bar\gamma_j\,T\,B\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\bar\gamma_j\,T\,B\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.55}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,I\,C\,L\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,I\,C\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,I^*\,C\,L^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,I^*\,C\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.56}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,I^*\,C\,L\,\rangle &= \langle\,\bar\gamma_j\,T^*\,A\,\gamma_j\,I^*\,C\,\rangle = \langle\,\bar\gamma_j\,T^*\,A\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,I\,C\,L\,\rangle &= \langle\,\bar\gamma_j\,T^*\,B\,\gamma_j\,I\,C\,\rangle = \langle\,\bar\gamma_j\,T^*\,B\,\gamma_j\,\bar T\,D\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.57}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,\bar I\,C\,L\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,\bar I\,C\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,L^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,\rangle = \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\rangle
\end{aligned}\right\}, \tag{6.58}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\langle\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,L\,\rangle &= \langle\,\bar\gamma_j\,T\,A\,\gamma_j\,\bar I^*\,C\,\rangle = \langle\,\bar\gamma_j\,T\,A\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,\bar I\,C\,L^*\,\rangle &= \langle\,\bar\gamma_j\,T\,B\,\gamma_j\,\bar I\,C\,\rangle = \langle\,\bar\gamma_j\,T\,B\,\gamma_j\,\bar T^*\,D\,\rangle
\end{aligned}\right\}. \tag{6.59}
$$

Замечание 8. В отличие от **(6.34)** — **(6.37)** в равенствах **(6.52)** — **(6.59)** промежуточная выкладка содержится и поэтому не требуются дополнительные обоснования: достаточно заметить, что под $\langle\,\gamma_j\,\rangle$

можно подразумевать любой оператор и, таким образом, в операторе может содержаться не одна продукция из $[\,I\,]$, а сколько угодно.

Теперь обратимся к **(6.38)** — **(6.41)** и тогда их обобщение будет выглядеть так:

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,E\,C\,R\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,E\,C\,\nu_j\,T^*\,A\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\tau_{j+1}\,A\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,E^*\,C\,R^*\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,E^*\,C\,\nu_j\,T^*\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\tau_{j+1}\,B\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.60}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,E^*\,C\,R\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,E^*\,C\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,E\,C\,R^*\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,E\,C\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.61}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,R\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,\nu_j\,T\,A\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\bar{\tau}_{j+1}\,A\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,R^*\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,\nu_j\,T\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\bar{\tau}_{j+1}\,B\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.62}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,R\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\gamma_j\,M\,A\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,R^*\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\gamma_j\,M\,B\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.63}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,E\,C\,L\,\rangle & = & \langle\,\nu_j\,T^*\,A\,\gamma_j\,E\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\tau_{j+1}\,A\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,E^*\,C\,L^*\,\rangle & = & \langle\,\nu_j\,T^*\,B\,\gamma_j\,E^*\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\tau_{j+1}\,B\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.64}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,E^*\,C\,L\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,E^*\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,E\,C\,L^*\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,E\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,\bar{T}\,D\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.65}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,L\,\rangle & = & \langle\,\nu_j\,T\,A\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\bar{\tau}_{j+1}\,A\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,L^*\,\rangle & = & \langle\,\nu_j\,T\,B\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\bar{\tau}_{j+1}\,B\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\rangle \end{array}\right\}, \tag{6.66}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \langle\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,L\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,\bar{E}^*\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,M\,A\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\rangle, \\ \langle\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,L^*\,\rangle & = & \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,\bar{E}\,C\,\rangle \;=\; \langle\,\gamma_j\,M\,B\,\gamma_j\,\bar{T}^*\,D\,\rangle \end{array}\right\}. \tag{6.67}$$

Обратим внимание на то, что сказанное в *замечании* **8** относительно копродукций из $[\,I\,]$ в полной мере сохраняет свою силу и по отношению к копродукциям из $[\,E\,]$. Больше того, в операторе $\langle\,\gamma_j\,\rangle$ может содержаться любое число как копродукций из $[\,E\,]$, так и копродукций из $[\,I\,]$.

6.4 Общая интерпретация комбинаторов

Если задуматься над *замечанием* **7**, то становится естественным желание принять такие определения, которые бы сняли указанную в *замечании* проблему. Чтобы её действительно снять, примем дополнительно к *определениям* **(6.2)** и **(6.44)** ещё следующие:

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\gamma_j\,\bar{R}\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,\bar{\alpha}_j\,\rangle, & \langle\,\gamma_j\,\bar{R}^*\,\rangle &= \langle\,\gamma_j\,\bar{\beta}_j\,\rangle,\\ \langle\,\gamma_j\,\bar{L}\,\rangle &= \langle\,\bar{\alpha}_j\,\gamma_j\,\rangle, & \langle\,\gamma_j\,\bar{L}^*\,\rangle &= \langle\,\bar{\beta}_j\,\gamma_j\,\rangle\end{aligned}\right\}. \tag{6.68}$$

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\bar{\gamma}_j\,R\,\rangle &= \langle\,\bar{\gamma}_j\,\alpha_j\,\rangle, & \langle\,\bar{\gamma}_j\,R^*\,\rangle &= \langle\,\bar{\gamma}_j\,\beta_j\,\rangle,\\ \langle\,\bar{\gamma}_j\,L\,\rangle &= \langle\,\alpha_j\,\bar{\gamma}_j\,\rangle, & \langle\,\bar{\gamma}_j\,L^*\,\rangle &= \langle\,\beta_j\,\bar{\gamma}_j\,\rangle\end{aligned}\right\}. \tag{6.69}$$

Иными словами, принятые дополнительные *определения* **(6.68)** и **(6.69)** означают, что к *таблицам* **1** – **4** присоединена *таблица* **5**, а к *таблицам* **5** – **8** — *таблица* **1** (см. *главу* **V**), или к системам отображений **(5.20)** и **(5.21)** присоединяются дополнительно отображения:

$$\left.\begin{aligned}R,\,L &: \bar{R}\mapsto M,\ \ \bar{R}^*\mapsto\bar{T},\ \ \bar{L}\mapsto M,\ \ \bar{L}^*\mapsto\bar{T}^*;\\ R^*,\,L^* &: \bar{R}\mapsto\bar{T},\ \ \bar{R}^*\mapsto M,\ \ \bar{L}\mapsto\bar{T}^*,\ \ \bar{L}^*\mapsto M.\end{aligned}\right\} \tag{6.70}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{R},\,\bar{L} &: R\mapsto M,\ \ R^*\mapsto T,\ \ L\mapsto M,\ \ L^*\mapsto T^*;\\ \bar{R}^*,\,\bar{L}^* &: R\mapsto T,\ \ R^*\mapsto M,\ \ L\mapsto T^*,\ \ L^*\mapsto M.\end{aligned}\right\} \tag{6.71}$$

Такие *доопределения* позволяют заключить, что для заданного произвольного оператора $\langle\,\gamma\,\rangle$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}R,\,L,\,\bar{R},\,\bar{L} &: \langle\,\gamma\,\rangle\mapsto\langle\,\alpha_j\,\rangle,\ \ \langle\,\bar{\gamma}_j\,\rangle\mapsto\langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle;\\ R^*,\,L^*,\,\bar{R}^*,\,\bar{L}^* &: \langle\,\gamma\,\rangle\mapsto\langle\,\beta_j\,\rangle,\ \ \langle\,\bar{\gamma}_j\,\rangle\mapsto\langle\,\bar{\beta}_j\,\rangle,\end{aligned}\right\}. \tag{6.72}$$

где операторы $\langle\,\alpha_j\,\rangle$, $\langle\,\beta_j\,\rangle$, $\langle\,\gamma_j\,\rangle$ связаны равенством **(6.3)**.

Обратим внимание на то, что равенства **(6.42)**, **(6.45)** и **(6.50)** являются следствием равенства **(6.3)**, точнее, любые *три* из указанных *четырёх* — являются следствием четвёртого. Однако, удобства ради, за основу берём пару из этой четвёрки, а именно **(6.3)** и **(6.45)** и дополняем их по аналогии следующими парами:

$$\langle\,\mu_j\,\rangle \rightleftharpoons \langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle,\quad \langle\,\bar{\mu}_j\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\bar{\beta}_j\,\rangle; \tag{6.73}$$

$$\langle\,\eta_j\,\rangle \rightleftharpoons \langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j\,\rangle,\quad \langle\,\bar{\eta}_j\,\rangle = \langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,\rangle; \tag{6.74}$$

$$\langle\,\delta_j\,\rangle \rightleftharpoons \langle\,\bar{\alpha}_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\bar{\beta}_j\,\rangle,\quad \langle\,\bar{\delta}_j\,\rangle = \langle\,\alpha_j\,\rangle\,\bar{\downarrow}\,\langle\,\beta_j\,\rangle. \tag{6.75}$$

С парой **(6.73)** связаны следующие определения:

$$\left.\begin{aligned}\langle\,\mu_j\,R\,\rangle &= \langle\,\mu_j\,\bar{\alpha}_j\,\rangle, & \langle\,\mu_j\,R^*\,\rangle &= \langle\,\mu_j\,\beta_j\,\rangle,\\ \langle\,\bar{\mu}_j\,\bar{R}\,\rangle &= \langle\,\bar{\mu}_j\,\alpha_j\,\rangle, & \langle\,\bar{\mu}_j\,\bar{R}^*\,\rangle &= \langle\,\bar{\mu}_j\,\bar{\beta}_j\,\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{6.76}$$

Замечание 9. *Определения* **(6.76)** приведены только для *правых* комбинаторов, поскольку для *левых* — записи по *правым* делаются тривиально,что будет иногда применяться и в дальнейшем.

Определения, связанные с парами **(6.74)** и **(6.75)** таковы (приводим тоже только для *правых* комбинаторов):

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\, \eta_j\, R \,\rangle &=& \langle\, \eta_j\, \alpha_j \,\rangle, & \langle\, \eta_j\, R^* \,\rangle &=& \langle\, \eta_j\, \bar\beta_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar\eta_j\, \bar R \,\rangle &=& \langle\, \bar\eta_j\, \bar\alpha_j \,\rangle, & \langle\, \bar\eta_j\, \bar R^* \,\rangle &=& \langle\, \bar\eta_j\, \beta_j \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.77}$$

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\, \delta_j\, R \,\rangle &=& \langle\, \delta_j\, \bar\alpha_j \,\rangle, & \langle\, \delta_j\, R^* \,\rangle &=& \langle\, \delta_j\, \bar\beta_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar\delta_j\, \bar R \,\rangle &=& \langle\, \bar\delta_j\, \alpha_j \,\rangle, & \langle\, \bar\delta_j\, \bar R^* \,\rangle &=& \langle\, \bar\delta_j\, \beta_j \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.78}$$

По такому же принципу, как для *определений* **(6.2)** и **(6.44)** были дополнительно присоединены *определения* **(6.68)** и **(6.69)**, можно теперь дополнительно присоединить к *определениям* **(6.76)**, **(6.77)** и **(6.78)** соответственно следующие *определения*:

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\, \mu_j\, \bar R \,\rangle &=& \langle\, \mu_j\, \alpha_j \,\rangle, & \langle\, \mu_j\, \bar R^* \,\rangle &=& \langle\, \mu_j\, \bar\beta_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar\mu_j\, R \,\rangle &=& \langle\, \bar\mu_j\, \bar\alpha_j \,\rangle, & \langle\, \mu_j\, R^* \,\rangle &=& \langle\, \bar\mu_j\, \beta_j \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.79}$$

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\, \eta_j\, \bar R \,\rangle &=& \langle\, \eta_j\, \bar\alpha_j \,\rangle, & \langle\, \eta_j\, \bar R^* \,\rangle &=& \langle\, \eta_j\, \beta_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar\eta_j\, R \,\rangle &=& \langle\, \bar\eta_j\, \alpha_j \,\rangle, & \langle\, \bar\eta_j\, R^* \,\rangle &=& \langle\, \bar\eta_j\, \bar\beta_j \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.80}$$

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \langle\, \delta_j\, \bar R \,\rangle &=& \langle\, \delta_j\, \alpha_j \,\rangle, & \langle\, \delta_j\, \bar R^* \,\rangle &=& \langle\, \delta_j\, \beta_j \,\rangle, \\ \langle\, \bar\delta_j\, R \,\rangle &=& \langle\, \bar\delta_j\, \alpha_j \,\rangle, & \langle\, \bar\delta_j\, R^* \,\rangle &=& \langle\, \bar\delta_j\, \bar\beta_j \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.81}$$

Итак, общий вывод, к которому приходим, таков. Принятые расширения позволяют фактически выполнять развёртку любого оператора, записанного в системе продукций **(5.24)**, что становится возможным благодаря *дополнениям* **(6.70)** b **(6.71)**, которые позволяют иметь отображения **(6.72)**.

6.4.1 О конъюнкции и дизъюнкции операторов.

Теперь рассмотрим множество всех операторов, записанных с использованием системы Q_2. Если над парами таких операторов выполнять конъюнкцию или дизъюнкцию, то результирующий оператор уже не всегда может быть записан в системе Q_2. Но если результирующий оператор записывать в системе **(5.24)**, то такая задача уже всегда положительно разрешима.

В том, что это действительно так, можно убедиться по *таблицам* **1** и **2**, в которых представлены конъюнкция и дизъюнкция над операторами такого типа, то есть в *таблицах* **1** и **2** предполагается, что операторы $\langle\, \alpha_j \,\rangle$ и $\langle\, \beta_j \,\rangle$ записаны в системе Q_2 и справедливы равенства **(6.3)**, **(6.43)** и **(6.73)** — **(6.75)**.

Таблица 1

$\bar{/}$	$\beta_j\, T$	$\beta_j\, T^*$	$\beta_j\, M$	$\beta_j\, \bar{T}^*$	$\beta_j\, \bar{T}$	$\bar{\beta}_j\, T$	$\bar{\beta}_j\, T^*$	$\bar{\beta}_j\, M$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}$
$\alpha_j\, T$	$\gamma_j\, T$	$\gamma_j\, O$	$\gamma_j\, R^*$	$\beta_j\, \bar{T}^*$	$\gamma_j\, \bar{T}$	$\eta_j\, T$	$\eta_j\, O$	$\eta_j\, R^*$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}^*$	$\eta_j\, \bar{T}$
$\alpha_j\, T^*$	$\gamma_j\, O^*$	$\gamma_j\, T^*$	$\gamma_j\, L^*$	$\gamma_j\, \bar{T}^*$	$\beta_j\, \bar{T}$	$\eta_j\, O^*$	$\eta_j\, T^*$	$\eta_j\, L^*$	$\eta_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}$
$\alpha_j\, M$	$\gamma_j\, R$	$\gamma_j\, L$	$\gamma_j\, M$	$\gamma_j\, \bar{T}^*$	$\gamma_j\, \bar{T}$	$\eta_j\, R$	$\eta_j\, L$	$\eta_j\, M$	$\eta_j\, \bar{T}^*$	$\eta_j\, \bar{T}$
$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\gamma_j\, \bar{T}^*$	$\gamma_j\, \bar{T}^*$	$\gamma_j\, \bar{T}^*$	ν_j	$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\eta_j\, \bar{T}^*$	$\eta_j\, \bar{T}^*$	$\eta_j\, \bar{T}^*$	ν_j
$\alpha_j\, \bar{T}$	$\gamma_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\gamma_j\, \bar{T}$	ν_j	$\gamma_j\, \bar{T}$	$\eta_j\, \bar{T}$	$\alpha_j\, \bar{T}$	$\eta_j\, \bar{T}$	ν_j	$\eta_j\, \bar{T}$
$\bar{\alpha}_j\, T$	$\mu_j\, T$	$\mu_j\, O$	$\mu_j\, R^*$	$\beta_j\, \bar{T}^*$	$\mu_j\, \bar{T}$	$\delta_j\, T$	$\delta_j\, O$	$\delta_j\, R^*$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}^*$	$\delta_j\, \bar{T}$
$\bar{\alpha}_j\, T^*$	$\mu_j\, O^*$	$\mu_j\, T^*$	$\mu_j\, L^*$	$\mu_j\, \bar{T}^*$	$\beta_j\, \bar{T}$	$\delta_j\, O^*$	$\delta_j\, T^*$	$\delta_j\, L^*$	$\delta_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}$
$\bar{\alpha}_j\, M$	$\mu_j\, R$	$\mu_j\, L$	$\mu_j\, M$	$\mu_j\, \bar{T}^*$	$\mu_j\, \bar{T}$	$\delta_j\, R$	$\delta_j\, L$	$\delta_j\, M$	$\delta_j\, \bar{T}^*$	$\delta_j\, \bar{T}$
$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\mu_j\, \bar{T}^*$	$\mu_j\, \bar{T}^*$	$\mu_j\, \bar{T}^*$	ν_j	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\delta_j\, \bar{T}^*$	$\delta_j\, \bar{T}^*$	$\delta_j\, \bar{T}^*$	ν_j
$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\mu_j\, \bar{T}$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\mu_j\, \bar{T}$	ν_j	$\mu_j\, \bar{T}$	$\delta_j\, \bar{T}$	$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\delta_j\, \bar{T}$	ν_j	$\delta_j\, \bar{T}$

Таблица 2

$\bar{\downarrow}$	$\beta_j\, T$	$\beta_j\, T^*$	$\beta_j\, M$	$\beta_j\, \bar{T}^*$	$\beta_j\, \bar{T}$	$\bar{\beta}_j\, T$	$\bar{\beta}_j\, T^*$	$\bar{\beta}_j\, M$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\beta}_j\, \bar{T}$
$\alpha_j\, T$	$\bar{\delta}_j\, T$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\delta}_j\, T$	$\alpha_j\, T$	$\bar{\delta}_j\, T$	$\bar{\mu}_j\, T$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\mu}_j\, T$	$\alpha_j\, T$	$\bar{\mu}_j\, T$
$\alpha_j\, T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\delta}_j\, T^*$	$\bar{\delta}_j\, T^*$	$\bar{\delta}_j\, T^*$	$\alpha_j\, T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\mu}_j\, T^*$	$\bar{\mu}_j\, T^*$	$\bar{\mu}_j\, T^*$	$\alpha_j\, T^*$
$\alpha_j\, M$	$\bar{\delta}_j\, T$	$\bar{\delta}_j\, T^*$	$\bar{\delta}_j\, M$	$\bar{\delta}_j\, \bar{L}$	$\bar{\delta}_j\, \bar{R}$	$\bar{\mu}_j\, T$	$\bar{\mu}_j\, T^*$	$\bar{\mu}_j\, M$	$\bar{\mu}_j\, \bar{L}$	$\bar{\mu}_j\, \bar{R}$
$\alpha_j\, \bar{T}^*$	$\beta_j\, T$	$\bar{\delta}_j\, T^*$	$\bar{\delta}_j\, \bar{L}^*$	$\bar{\delta}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\delta}_j\, \bar{O}^*$	$\bar{\beta}_j\, T$	$\bar{\mu}_j\, T^*$	$\bar{\mu}_j\, \bar{L}^*$	$\bar{\mu}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\mu}_j\, \bar{O}^*$
$\alpha_j\, \bar{T}$	$\delta_j\, T$	$\beta_j\, T^*$	$\bar{\delta}_j\, \bar{R}^*$	$\bar{\delta}_j\, \bar{O}$	$\bar{\delta}_j\, \bar{T}$	$\bar{\mu}_j\, T$	$\bar{\beta}_j\, T^*$	$\bar{\mu}_j\, \bar{R}^*$	$\bar{\mu}_j\, \bar{O}$	$\bar{\mu}_j\, \bar{T}$
$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\eta}_j\, T$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\eta}_j\, T$	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\eta}_j\, T$	$\bar{\gamma}_j\, T$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\gamma}_j\, T$	$\bar{\alpha}_j\, T$	$\bar{\gamma}_j\, T$
$\bar{\alpha}_j\, T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\eta}_j\, T^*$	$\bar{\eta}_j\, T^*$	$\bar{\eta}_j\, T^*$	$\bar{\alpha}_j\, T^*$	$\bar{\nu}_j$	$\bar{\gamma}_j\, T^*$	$\bar{\gamma}_j\, T^*$	$\bar{\gamma}_j\, T^*$	$\bar{\alpha}_j\, T^*$
$\bar{\alpha}_j\, M$	$\bar{\eta}_j\, T$	$\bar{\eta}_j\, T^*$	$\bar{\eta}_j\, M$	$\bar{\eta}_j\, \bar{L}$	$\bar{\eta}_j\, \bar{R}$	$\bar{\gamma}_j\, T$	$\bar{\gamma}_j\, T^*$	$\bar{\gamma}_j\, M$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{L}$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{R}$
$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}^*$	$\beta_j\, T$	$\bar{\eta}_j\, T^*$	$\bar{\eta}_j\, \bar{L}^*$	$\bar{\eta}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\eta}_j\, \bar{O}^*$	$\bar{\beta}_j\, T$	$\bar{\gamma}_j\, T^*$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{L}^*$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{T}^*$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{O}^*$
$\bar{\alpha}_j\, \bar{T}$	$\bar{\eta}_j\, T$	$\beta_j\, T^*$	$\bar{\eta}_j\, \bar{R}^*$	$\bar{\eta}_j\, \bar{O}$	$\bar{\eta}_j\, \bar{T}$	$\bar{\gamma}_j\, T$	$\bar{\beta}_j\, T^*$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{R}^*$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{O}$	$\bar{\gamma}_j\, \bar{T}$

Разумеется, что при формализации рассуждений необходимо иметь ввиду, что символические равенства **(6.1)** предполагают, что верны и такие символические равенства:

$$\left.\begin{array}{l} M \mathbin{\bar{/}} R = R, \;\; T \mathbin{\bar{/}} R^* = R^*, \quad M \mathbin{\bar{/}} L = L, \;\; T^* \mathbin{\bar{/}} L^* = L^*, \\ R \mathbin{\bar{/}} T = R, \quad R^* \mathbin{\bar{/}} M = R^*, \;\; L \mathbin{\bar{/}} T^* = L, \;\; L^* \mathbin{\bar{/}} M = L^*. \end{array}\right\} \tag{6.82}$$

а символические равенства **(6.43)** предполагают, что верны и такие символические равенства:

$$\left.\begin{array}{l} M \mathbin{\bar{\downarrow}} \bar{R} = \bar{R}, \;\; \bar{T} \mathbin{\bar{\downarrow}} \bar{R}^* = \bar{R}^*, \quad M \mathbin{\bar{\downarrow}} \bar{L} = \bar{L}, \;\; \bar{T}^* \mathbin{\bar{\downarrow}} \bar{L}^* = \bar{L}^*, \\ \bar{R} \mathbin{\bar{\downarrow}} \bar{T} = \bar{R}, \quad \bar{R}^* \mathbin{\bar{\downarrow}} M = \bar{R}^*, \;\; \bar{L} \mathbin{\bar{\downarrow}} \bar{T}^* = \bar{L}, \;\; \bar{L}^* \mathbin{\bar{\downarrow}} M = \bar{L}^*. \end{array}\right\} \tag{6.83}$$

Теперь представим фрагмент рассуждения. Если α_j, β_j и γ_j связаны равенством **(6.3)**, а продукции G, H, Q принадлежат множеству **(5.24)** и *таблица* **1** справедлива, то, полагая верным

$$\langle\, \alpha_j\, G \,\rangle \mathbin{\bar{/}} \langle\, \beta_j\, H \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, Q \,\rangle,$$

что означает верность **(6.72)** и

$$R,\, L \,:\, Q \,\mapsto\, G; \qquad R^*,\, L^* \,:\, Q \,\mapsto\, H,$$

имеем

$$\begin{aligned} &\langle\, \alpha_j\, G\, M \,\rangle \mathbin{\bar{/}} \langle\, \beta_j\, H\, T \,\rangle = \langle\, \alpha_j\, G\, \alpha_j\, G \,\rangle \mathbin{\bar{/}} \langle\, \beta_j\, H\, \bar{\nu}_j \,\rangle = \\ &= \langle\, \gamma_j\, Q\, \alpha_j\, G \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, Q\, R \,\rangle; \\ &\langle\, \alpha_j\, G\, T \,\rangle \mathbin{\bar{/}} \langle\, \beta_j\, H\, M \,\rangle = \langle\, \alpha_j\, G\, \bar{\nu}_j \,\rangle \mathbin{\bar{/}} \langle\, \beta_j\, H\, \beta_j\, H \,\rangle = \\ &= \langle\, \gamma_j\, Q\, \beta_j\, H \,\rangle = \langle\, \gamma_j\, Q\, R^* \,\rangle \qquad \text{и так далее}. \end{aligned}$$

Разумеется нет необходимости приводить все фрагменты (поскольку они однообразны) и быть уверенными в нашем утверждении.

По поводу справедливости *таблиц* **1** и **2**. В их верности можно убедиться прямыми выкладками, что, разумеется, может сделать при желании каждый читатель. Однако выполнять все выкладки нет никакой необходимости. Прежде всего, по *одной* из этих таблиц (любой) *вторая* пишется уверенно почти автоматически. Далее, и в одной таблице выполнять все выкладки не нужно: достаточно выполнить выкладки в одной лишь четверти. Разумеется, что и в четверти тоже незачем выполнять все выкладки, впрочем последнее требует дополнительных соображений.

Замечание 10. Имея ввиду особые *замечания* **1** и **2**, обращаем внимание на то, что в *таблицах* **1** и **2** имеются равные операторы:

$$\begin{array}{ll}
\langle\,\gamma_j\,O\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\delta_j\,\bar O\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha_j\,\beta_j\,\rangle, & \langle\,\mu_j\,O\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\eta_j\,\bar O\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\alpha_j\,\beta_j\,\rangle,\\
\langle\,\gamma_j\,O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\delta_j\,\bar O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\beta_j\,\alpha_j\,\rangle, & \langle\,\mu_j\,O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\eta_j\,\bar O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\beta_j\,\bar\alpha_j\,\rangle,\\
\langle\,\eta_j\,O\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\mu_j\,\bar O\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha_j\,\bar\beta_j\,\rangle, & \langle\,\delta_j\,O\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\gamma_j\,\bar O\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\alpha_j\,\bar\beta_j\,\rangle,\\
\langle\,\eta_j\,O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\mu_j\,\bar O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\beta_j\,\alpha_j\,\rangle, & \langle\,\delta_j\,O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\gamma_j\,\bar O^*\,\rangle\,=\,\langle\,\bar\beta_j\,\bar\alpha_j\,\rangle.
\end{array}$$

6.4.2 О расширении возможности представления и преобразования операторов.

Общая идея введения *комбинаторов* и *копродукций* (см. 5.1) хорошо известна. Эта идея позволила, в частности, расширить возможности выполнения конъюнкций, но теперь мы хотим сделать следующий шаг, а именно, иметь возможность выполнять конъюнкции над операторами, в записи которых содержатся комбинаторы (такими: $\langle\,\gamma_j\,R\,\rangle$, $\langle\,\gamma_j\,R^*\,\rangle$, $\langle\,\gamma_j\,L\,\rangle$, $\langle\,\gamma_j\,L^*\,\rangle$) и операторами в системе Q_3 (скажем, такими: $\langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle$, $\langle\,\lambda^1_j\,T\,\rangle$, $\langle\,\lambda^1_j\,T^*\,\rangle$).

Чтобы сделать следующий шаг, мы расширим список комбинаторов и копродукций, но это расширение будет выполнено с помощью индексации уде введённых комбинаторов и копродукций, о которых речь пойдёт в **6.5**. Кроме того, нам потребуется некоторая система обозначений, о которых речь пойдёт ниже.

Для операторов $\langle\,\alpha_j\,\rangle, \langle\,\beta_j\,\rangle, \langle\,\gamma_j\,\rangle$, связанных равенством **(6.3)**, и оператором $\langle\,\lambda^1_j\,\rangle$ зададим обозначения:

$$\langle\,\alpha^1_j\,\rangle\,\rightleftharpoons\,\langle\,\lambda^1_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\alpha_j\,\rangle,\quad \langle\,\beta^1_j\,\rangle\,\rightleftharpoons\,\langle\,\lambda^1_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,\rangle,\quad \langle\,\gamma^1_j\,\rangle\,\rightleftharpoons\,\langle\,\lambda^1_j\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\gamma_j\,\rangle. \tag{6.84}$$

Если комбинаторы K_K, применённые к операторам из равенства **(6.3)**, связаны соотношениями **(6.2)**, которые определяются результатами равенств **(5.3)** — **(5.6)**, то аналогичные соотношения можно записать и для равенств из определений **(6.84)**, применив к ним комбинаторы K_K:

$$\left.\begin{array}{ll}
\langle\,\lambda^1_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha^1_j\,\alpha_j\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha^1_j\,R\,\rangle, & \langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\alpha_j\,T\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha^1_j\,\lambda^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha^1_j\,R^*\,\rangle,\\
\langle\,\lambda^1_j\,T^*\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\alpha_j\,M\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha_j\,\alpha^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha_j\,L\,\rangle, & \langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\alpha_j\,T^*\,\rangle\,=\,\langle\,\lambda^1_j\,\alpha^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\alpha^1_j\,L^*\,\rangle.
\end{array}\right\} \tag{6.85}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\langle\,\lambda^1_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle\,=\,\langle\,\beta^1_j\,\beta_j\,\rangle\,=\,\langle\,\beta^1_j\,R\,\rangle, & \langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,T\,\rangle\,=\,\langle\,\beta^1_j\,\lambda^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\beta^1_j\,R^*\,\rangle,\\
\langle\,\lambda^1_j\,T^*\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,M\,\rangle\,=\,\langle\,\beta_j\,\beta^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\beta^1_j\,L\,\rangle, & \langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\beta_j\,T^*\,\rangle\,=\,\langle\,\lambda^1_j\,\beta^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\beta^1_j\,L^*\,\rangle.
\end{array}\right\} \tag{6.86}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\langle\,\lambda^1_j\,T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\gamma_j\,M\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma^1_j\,\gamma_j\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma^1_j\,R\,\rangle, & \langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\gamma_j\,T\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma^1_j\,\lambda^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma^1_j\,R^*\,\rangle,\\
\langle\,\lambda^1_j\,T^*\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\gamma_j\,M\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma_j\,\gamma^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma^1_j\,L\,\rangle, & \langle\,\lambda^1_j\,M\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\gamma_j\,T^*\,\rangle\,=\,\langle\,\lambda^1_j\,\gamma^1_j\,\rangle\,=\,\langle\,\gamma^1_j\,L^*\,\rangle.
\end{array}\right\} \tag{6.87}$$

Выше мы использовали оператор $\langle \lambda_j^1 \rangle$, а теперь для ввода обшей системы нам потребуется не один оператор, а система начальных операторов:

$$\left.\begin{array}{l} \langle \lambda_j^1 \rangle, \langle \lambda_j^2 \rangle, \langle \lambda_j^4 \rangle, \langle \lambda_j^8 \rangle, \ \ldots \ , \langle \lambda_j^{[k]} \rangle, \ \ldots \ , \\ [\,k\,] \,=\, 2^k, \quad k \,=\, 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array}\right\}. \tag{6.88}$$

Далее вводим вспомогательные операторы (для $k \,=\, 1, 2, 3, \ldots$):

$$\langle \lambda_j^{[k]+i} \rangle \rightleftharpoons \langle \lambda_j^i \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^{[k]} \rangle, \quad 1 \le i < [k]. \tag{6.89}$$

Параметр k, фигурирующий в **(6.88)** и **(6.89)**, определяет порядок системы (такие системы операторов в дальнейшем будем называть λ–системами). Увеличение порядка системы на единицу приводит к увеличению числа начальных операторов на единицу, а вспомогательных — на $[k]-1$, так что в λ–системе содержится $k+1$ начальных операторов и $\sum_{r=1}^{k}([r] \,-\, 1)$ вспомогательных операторов.

Обращаем внимание, что если порядок λ–системы равен нулю, то система имеет лишь один начальный оператор $\langle \lambda_j^1 \rangle$, а вспомогательных операторов у неё нет. В случае $k \,=\, 1$ λ–система содержит два начальных оператора: $\langle \lambda_j^1 \rangle$ и $\langle \lambda_j^2 \rangle$ и один вспомогательный: $\langle \lambda_j^3 \rangle$, при этом, согласно **(6.89)** имеем:

$$\langle \lambda_j^3 \rangle \,=\, \langle \lambda_j^1 \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^2 \rangle. \tag{6.90}$$

Для операторов равенства **(6.90)** можно записать равенства, содержащие комбинаторы K_K:

$$\left.\begin{array}{ll} \langle \lambda_j^1 M \rangle \bar{/} \langle \lambda_j^2 T \rangle = \langle \lambda_j^3 \lambda_j^1 \rangle = \langle \lambda_j^3 R \rangle, & \langle \lambda_j^1 T \rangle \bar{/} \langle \lambda_j^2 M \rangle = \langle \lambda_j^3 \lambda_j^2 \rangle = \langle \lambda_j^3 R^* \rangle, \\ \langle \lambda_j^1 M \rangle \bar{/} \langle \lambda_j^2 T^* \rangle = \langle \lambda_j^1 \lambda_j^3 \rangle = \langle \lambda_j^3 L \rangle, & \langle \lambda_j^1 T^* \rangle \bar{/} \langle \lambda_j^2 M \rangle = \langle \lambda_j^2 \lambda_j^3 \rangle = \langle \lambda_j^3 L^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{6.91}$$

Замечание 11. Обратим внимание на то, что в равенствах **(6.91)** также, как и в равенствах **(6.85)** — **(6.87)**, могли бы опустить *вторые* строки, в которых имеются *левые* комбинаторы, так как они легко восстанавливаются по *правым* комбинаторам *первых* строк. Такого рода сокращения в дальнейшем будем иногда осуществлять без всяких дополнительных замечаний.

Равенства с комбинаторами K_K для операторов λ–системы, связанных с определениями **(6.89)**, таковы (считаем $1 \le i < [k]$):

$$\left.\begin{array}{l} \langle \lambda_j^i M \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^{[k]} T \rangle \,=\, \langle \lambda_j^{[k]+i} \lambda_j^i \rangle \,=\, \langle \lambda_j^{[k]+i} R \rangle, \\ \langle \lambda_j^i T \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^{[k]} M \rangle \,=\, \langle \lambda_j^{[k]+i} \lambda_j^{[k]} \rangle \,=\, \langle \lambda_j^{[k]+i} R^* \rangle. \end{array}\right\} \tag{6.92}$$

В плане дальнейших детализаций обратим внимание, что в случае $k = 2$, система операторов **(6.88)** содержит **три** начальных оператора: $\langle \lambda_j^1 \rangle$, $\langle \lambda_j^2 \rangle$, $\langle \lambda_j^4 \rangle$, а по **(6.89)** — **четыре** вспомогательных: λ_j^3, λ_j^5, λ_j^6, λ_j^7, при этом, кроме равенства **(6.90)**, имеют место, в соответствии с **(6.89)**, следующие определения:

$$\langle \lambda_j^5 \rangle \rightleftharpoons \langle \lambda_j^1 \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 \rangle,\ \langle \lambda_j^6 \rangle \rightleftharpoons \langle \lambda_j^2 \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 \rangle,\ \langle \lambda_j^7 \rangle \rightleftharpoons \langle \lambda_j^3 \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 \rangle,$$

для которых, по **(6.92)**, равенства с комбинаторами K_K соответственно таковы:

$$\left.\begin{aligned} \langle \lambda_j^1 M \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 T \rangle &= \langle \lambda_j^5 \lambda_j^1 \rangle = \langle \lambda_j^5 R \rangle, \\ \langle \lambda_j^1 T \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 M \rangle &= \langle \lambda_j^5 \lambda_j^4 \rangle = \langle \lambda_j^5 R^* \rangle; \end{aligned}\right\} \tag{6.93}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle \lambda_j^2 M \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 T \rangle &= \langle \lambda_j^6 \lambda_j^2 \rangle = \langle \lambda_j^6 R \rangle, \\ \langle \lambda_j^2 T \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 M \rangle &= \langle \lambda_j^6 \lambda_j^4 \rangle = \langle \lambda_j^6 R^* \rangle; \end{aligned}\right\} \tag{6.94}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle \lambda_j^3 M \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 T \rangle &= \langle \lambda_j^7 \lambda_j^3 \rangle = \langle \lambda_j^7 R \rangle, \\ \langle \lambda_j^3 T \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^4 M \rangle &= \langle \lambda_j^7 \lambda_j^4 \rangle = \langle \lambda_j^7 R^* \rangle. \end{aligned}\right\} \tag{6.95}$$

Способ определения λ–системы, принятый нами, имеет свою особенность, которая состоит в следующем.

Лемма 1. Любой вектор $\langle \lambda_j^r \rangle$ из λ–системы имеет однозначное (до порядка следования членов) представление:

$$\langle \lambda_j^r \rangle = \langle \lambda_j^{[k_i]} \rangle \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^{[k_m]} \rangle \,\bar{/}\, \ldots \,\bar{/}\, \langle \lambda_j^{[k_s]} \rangle, \tag{6.96}$$

означающие, что $k_i,\, k_m,\, \ldots,\, k_s$ суть различные целые числа.

Утверждение *леммы* **1** верно, поскольку верно, что любое положительное число r имеет однозначное представление в виде

$$r = 2^{k_i} + 2^{k_m} + \ldots + 2^{k_s},$$

иными словами, в двоичной записи числа r в разрядах $k_i,\, k_m,\, \ldots,\, k_s$ имеются *единицы*, а во всех остальных разрядах — *нули*.

Правая часть равенства **(6.96)** называется *конъюнктивным разложением* вектора $\langle \lambda_j^r \rangle$. Начальные векторы λ–системы в конъюнктивном разложении имеют только *один* член, а вспомогательные — всегда больше одного члена.

Из *леммы* **1** следует, что любой вектор λ–системы в конъюнкции *инвариантен* по отношению к любому члену своего разложения, или иначе, любой вектор $\langle \lambda_j^r \rangle$ не изменится от конъюнкции на вектор, являющийся членом его разложения.

Кроме λ–системы операторов, рассмотрим ещё α, β, γ–системы операторов, определив их так (для $r = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\langle\, \alpha_j^r \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \alpha_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \lambda_j^r \,\rangle, \quad \langle\, \beta_j^r \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \beta_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \lambda_j^r \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j^r \,\rangle \rightleftharpoons \langle\, \gamma_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \lambda_j^r \,\rangle, \tag{6.97}$$

где $\langle\, \alpha_j \,\rangle$, $\langle\, \beta_j \,\rangle$, $\langle\, \gamma_j \,\rangle$ связаны соотношением **(6.3)**.

Обратим внимание, что в случае $r = 1$, определения из **(6.97)** совпадают с определениями из **(6.84)**. Кроме того, определения **(6.97)** позволяют записать равенство:

$$\langle\, \alpha_j^r \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j^r \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^r \,\rangle. \tag{6.98}$$

Легко понять, что верны и равенства:

$$\langle\, \alpha_j^r \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^r \,\rangle, \quad \langle\, \alpha_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j^r \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^r \,\rangle \tag{6.99}$$

а также из верности равенства

$$\langle\, \lambda_j^r \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \lambda_j^s \,\rangle \;=\; \langle\, \lambda_j^m \,\rangle \tag{6.100}$$

следуют равенства

$$\langle\, \alpha_j^r \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j^s \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^m \,\rangle, \quad \langle\, \alpha_j^s \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j^r \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j^m \,\rangle. \tag{6.101}$$

6.5 Индексация комбинаторов и копродукций

Расширения систем продукций могут определяться различными способами. Те расширения, которые выполнены в *главе* **V**, приведшие к появлению продукций и копродукций, могут быть продолжены в различных направлениях. Одно из этих направлений связано с индексацией комбинаторов и может быть различным и зависит от той системы, которую мы выделили как *базисную*, вводя индексацию. Выбор системы индексации зависит от решаемой задачи. Начнём с комбинаторов, связанных с расширением системы продукций Q_3.

6.5.1 Индексация комбинаторов.

Система комбинаторов, базирующаяся на продукциях системы Q_3, определена в *таблице* **1** *главы* **V**. Определённые там комбинаторы K_K, то есть $\{R, L, R^*, L^*\}$, не имеют индексы, но впредь мы будем подразумевать, что они имеют индекс **нуль**, независимо от того, записан он или нет.

Используя эти комбинаторы с индексом 0 и продукции Q_3, определим индексированные комбинаторы так, как это указано в *таблице* **3**,

Таблица 3

T	T^*	T^*	T	M	M	M	M
R_i	L_i	R_i^*	L_i^*	R_i	L_i	R_i^*	L_i^*
R_{2i+1}	L_{2i+1}	R_{2i+1}^*	L_{2i+1}^*	R_{2i+2}	L_{2i+2}	R_{2i+2}^*	L_{2i+2}^*

тем самым определена система

$$Q_7 \rightleftharpoons \{M, T, T^*, R_i, L_i, R_i^*, L_i^*\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6.102}$$

Чтобы посмотреть, как может быть использован указанный способ индексации комбинаторов, рассмотрим примеры.

6.5.2 Иллюстрационные примеры по свёртке операторов.

Конкретизацию метода индексации комбинаторов рассмотрим на такой задаче.

Пусть заданы следующие *таблицы* **4 — 6** (в них, и не только в них продукция M опущена, но она подразумевается в пустых клетках *правее* τ или $\bar{\tau}$).

В каждой из *таблиц* **4 — 6** заданы по m (где $m = 4; 4; 6$) операторов, имеющих такую структуру: первые *два* оператора согласованы и дают *исход* **1**. Резолюция этих первых двух операторов и третий оператор дают новую согласованную пару с *исходом* **1**. Резолюция над новой согласованной парой и *четвёртым* оператором дают следующую пару с *исходом* **1** и *так далее* до резолюции над $(m - 2)$–ой согласованной парой и последним оператором, которые дают $(m - 1)$–ю согласованную пару с *исходом* **1**.

Таблица 4

0	1	2	3	4	5
τ			T^*		T
$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T	
	$\bar{\tau}$		T^*	T	
		$\bar{\tau}$	T^*	T	T

Таблица 5

0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\tau}$			T		T^*			T
τ	T			T			T	
	τ	T			T^*			T
		τ	T			T	T	

Таблица 6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ				T^*		T			T
$\bar{\tau}$	T	T						T	
	τ		T		T			T	
		τ				T			T
			τ	T^*		T	T		
				$\bar{\tau}$	T	T	T		

Требуется выполнить свёртку операторов в каждой из *таблиц* **4 — 6**, считая, что над операторами каждой таблицы выполняется конъюнкция.

Если примем, что

1) последовательность операторов в таблицах не изменится и соответствует вышеприведённому описанию;

2) над каждой парой согласованных операторов с *исходом* **1** выполняется резолюция, результат которой записан под этой парой с *слева* помечается знаком $+$;

3) последний резолюционный оператор используется как пропалывающий и на прополку (*этим* оператором) проверяются все операторы таблицы, то оказывается, что для выполнения свёрток можно обойтись системой продукций Q_7, определённой в **(6.102)**.

В соответствии со сказанным чисто формальные выкладки над операторами *таблиц* **4 — 6** приводят к *таблицам* **7 — 9** соответственно, в которых добавлены *резольвентные* операторы (помеченные в *левом* столбце знаком $+$) и результаты конъюнкций (размещённые под чертой). В самом *правом* столбце *таблиц* **7 — 9** `чертой` помечены операторы,

Таблица 7

	0	1	2	3	4	5	
	τ			T^*		T	3
	$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T		2
+		τ	T^*	T^*	T	T	–
		$\bar{\tau}$		T^*	T		1
+			τ	T^*	T	T	–
			$\bar{\tau}$	T^*	T	T	–
+				τ	T	T	1
		R^*		T^*	T	R	2
	R^*	R_1^*	L^*	L	T	R_2	3
	R_1^*	R_4^*	L_2^*	L_1	R	R_5	4

Таблица 8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	$\bar{\tau}$			T		T^*			T	6
	τ	T			T			T		5
+		$\bar{\tau}$		T	T	T^*		T	T	4
		τ	T			T^*			T	3
+			$\bar{\tau}$	T	T	T^*		T	T	2
			τ	T			T	T		1
+				$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T	T	1
			L^*	T	R	L	T	T	R	2
			L_1^*	T	R_1	L_1	R	T	R_1	3
		L^*	L_3^*	R	R_4	L_3	R_2	R	R_3	4
		L_1^*	L_8^*	R_1	R_9	L_7	R_6	R_1	R_7	5
	L^*	L_3^*	L_{18}^*	R_4	R_{19}	L_{16}	R_{14}	R_3	R_{16}	6
	L_1^*	L_8^*	L_{38}^*	R_9	R_{40}	L_{33}	R_{30}	R_8	R_{33}	7

поглощённые последним *резолюционным* оператором (оператором, записанным непосредственно над чертой). Под чертой записаны результирующие операторы конъюнкций над операторами с одинаковыми номерами s (в самом *правом* столбце). Такие операторы дают в результате оператор с номером $s+1$, который вступает в конъюнкцию с оператором над чертой с таким же номером. Самый *последний* оператор каждой таблицы — это результирующий оператор свёртки для всех операторов таблицы.

Таблица 9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	τ				T^*		T			T	9
	$\bar{\tau}$	T	T						T		8
$+$		$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T	7
		τ		T		T			T		6
$+$			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T	5
			τ				T			T	4
$+$				$\bar{\tau}$	T^*	T	T		T	T	3
				τ	T^*		T	T			2
$+$					τ	T	T	T	T	T	–
					$\bar{\tau}$	T	T	T			1
$+$						$\bar{\tau}$	T	T	T	T	1
					R^*	T	T	T	R	R	2
				L^*	R_1^*	R	T	T	R_2	R_2	3
				L_1^*	R_3^*	R_1	T	R	R_5	R_5	4
			L^*	L_4^*	R_8^*	R_4	T	R_2	R_{12}	R_{11}	5
			L_1^*	L_9^*	R_{17}^*	R_9	T	R_6	R_{25}	R_{23}	6
		L^*	L_4^*	L_{19}^*	R_{36}^*	R_{19}	R	R_{14}	R_{51}	R_{48}	7
		L_1^*	L_9^*	L_{40}^*	R_{73}^*	R_{40}	R_1	R_{30}	R_{103}	R_{97}	8
	R^*	L_3^*	L_{19}^*	L_{82}^*	R_{148}^*	R_{82}	R_4	R_{62}	R_{207}	R_{196}	9
	R_1^*	L_8^*	L_{40}^*	L_{166}^*	R_{297}^*	R_{166}	R_9	R_{126}	R_{416}	R_{393}	10

Рассмотренные примеры, подчинённые указанным выше требованиям, позволяют понять, что в итоговых таблицах (а нашем случае — это *таблицы* **7 — 8**), в *первой* их половине (то есть над чертой), в каждом столбце содержатся либо:

1) только продукции M;

2) только продукции T и M;

3) только продукции T^* и M;

4) по одной продукции T, а все остальные суть только T^* и M;

5) по одной продукции T^*, а все остальные — только T и M.

Такова спецификация столбцов любой таблицы. (Здесь уместно обратить внимание, что в начале оператора мы пишем $\bar{\tau}$ вместо T и τ — вместо T^*).

Указанная спецификация позволяет сделать заключение, что верна следующая очевидная

Теорема 8. В результирующих операторах (в операторах под чертой) в столбцах содержатся соответственно либо:

1) только продукции M;

2) только продукции T и индексированные комбинаторы R;

3) только продукции T^* и индексированные комбинаторы L;

4) только индексированные комбинаторы R^*;

5) только индексированные комбинаторы L^*,

при этом индексация всех указанных комбинаторов выполняется в соответствии с *таблицей* **3** (представленной выше) и *таблицей* **1** из *главы* **V**.

Замечание 12. Разумеется, что свёртку операторов, которую мы выполнили в системе Q_7, могли бы выполнить и в одной из систем:

$$Q_8 \rightleftharpoons \{\, M,\, T,\, T^*,\, R_i,\, L_i,\, \bar{E}_i,\, E_i \,\}, \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, . \tag{6.103}$$

$$Q_9 \rightleftharpoons \{\, M,\, T,\, T^*,\, R_i,\, L_i,\, \bar{I}_i^*,\, I_i^* \,\}, \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, . \tag{6.104}$$

где для Q_8 используются столбцы **2** и **4** из *таблицы* **3** из *главы* **V** и нижеследующая *таблица* **10**, а для Q_9 — столбцы **2** и **4** из *таблицы* **2** из *главы* **V** и нижеследующая *таблица* **11**, при этом определения для R_i, L_i из **(6.103)** и **(6.104)** сохраняют свои определения, данные в *таблице* **3**.

Таблица 10

T^*	T	M	M
$\bar{E}_i$	E_i	$\bar{E}_i$	E_i
$\bar{E}_{2i+1}$	E_{2i+1}	$\bar{E}_{2i+2}$	E_{2i+2}

Таблица 11

T^*	T	M	M
$\bar{I}_i^*$	I_i^*	$\bar{I}_i^*$	I_i^*
$\bar{I}_{2i+1}^*$	I_{2i+1}^*	$\bar{I}_{2i+2}^*$	I_{2i+2}^*

Замечание 13. В системах Q_8 и Q_9 мы вышли за пределы индексаций комбинаторов и определили индексацию копродукций, хотя и не всех.

6.5.3 Конъюнктивная развёртка операторов.

Выполнить развёртку операторов, записанных в системе Q_7, в виде конъюнкции операторов, которая приводит к разворачиваемому оператору, можно с использованием этой же *таблицы* **1** из *главы* **V** и *таблицы* **3**.

В самом деле, если оператор имеет один из видов:

$$\langle\, \gamma_j\, R_{2i+1} \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j\, L_{2i+1} \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j\, R_{2i+2} \,\rangle, \quad \langle\, \gamma_j\, L_{2i+2} \,\rangle, \tag{6.105}$$

то мы знаем, что каждый из этих операторов получается однозначно как результат конъюнкции между операторами, точнее

$$\left.\begin{array}{rcl} \langle\, \gamma_j\, R_{2i+1} \,\rangle & = & \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta_j\, R_i \,\rangle, \\ \langle\, \gamma_j\, L_{2i+1} \,\rangle & = & \langle\, \alpha_j\, T^* \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta_j\, L_i \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.106}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \langle\, \gamma_j\, R_{2i+2} \,\rangle & = & \langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta_j\, R_i \,\rangle, \\ \langle\, \gamma_j\, L_{2i+2} \,\rangle & = & \langle\, \alpha_j\, M \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta_j\, L_i \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.107}$$

при этом в записях операторов $\langle\, \gamma_j \,\rangle, \langle\, \alpha_j \,\rangle, \langle\, \beta_j \,\rangle,$ удовлетворяющих равенству **(6.3)**, комбинаторы $R^*_{2i+1},\ L^*_{2i+1},\ R^*_{2i+2},\ L^*_{2i+2}$ раскрываются (в соответствии с *таблицей* **3**) так:

$$\left.\begin{array}{rcl} \langle\, \gamma^1_j\, R^*_{2i+1} \,\rangle & = & \langle\, \alpha^1_j\, T^* \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta^1_j\, R^*_i \,\rangle, \\ \langle\, \gamma^1_j\, L^*_{2i+1} \,\rangle & = & \langle\, \alpha^1_j\, T \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta^1_j\, L^*_i \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.108}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \langle\, \gamma^1_j\, R^*_{2i+2} \,\rangle & = & \langle\, \alpha^1_j\, M \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta^1_j\, R^*_i \,\rangle, \\ \langle\, \gamma^1_j\, L^*_{2i+2} \,\rangle & = & \langle\, \alpha^1_j\, M \,\rangle \;\; \bar{/} \;\; \langle\, \beta^1_j\, L^*_i \,\rangle. \end{array}\right\} \tag{6.109}$$

Замечание 14. Случаи неиндексированных (с индексом *нуль*) комбинаторов не упоминаются, так как они уже рассматривались достаточно подробно.

В иллюстрации к сказанному, теперь рассмотрим следующие примеры конъюнктивных развёрток:

$$\langle\, R^*_1\, R^*_4\, L^*_2\, L_1\, R\, R_5 \,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, M\, M\, T^*\, M\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, R^*\, R^*_1\, L^*\, L\, T\, R_2 \,\rangle,$$

$$\langle\, R^* \, R_1 \, L^* \, L \, T \, R_2 \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau} \, T^* \, T^* \, M \, T \, M \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, R^* \, M \, T^* \, T \, R \,\rangle,$$

$$\langle\, R^* \, M \, T^* \, T \, R \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau} \, M \, T^* \, T \, M \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau \, T \, T \,\rangle.$$

В верности этих развёрток можно убедиться по *таблице* **7**.

6.5.4 Индексация копродукций и комбинаторов.

Индексация копродукций, введённая при определении систем Q_8 и Q_9, не носила необходимый характер, поскольку в системе Q_7 сформулированная выше задача решена и решение подтверждены таблицами. Но теперь чуть изменим задачу, потребовав разбить каждую из верхних частей *таблиц* **7** — **9** на *две* подтаблицы и свернуть каждую из подтаблиц. Разумеется, что здесь требуется сформулировать: как следует разбивать верхние части таблиц ?

Имея ввиду определённые задачи (которые необходимо уметь решать), мы сформулируем требование разбивать таблицы так.

В каждой из таблиц имеется последний (вначале эту роль играет *резолюционный*) оператор. Этот оператор заносится во *вторую* подтаблицу, а в *первую* подтаблицу переносим все те операторы из таблицы, которые в начальном столбце последнего оператора (записанного во второй *подтаблице*) имеют одноимённые с ним продукции. Затем, в таблице берём (если есть, иначе процесс разбивки закончен) следующий (снизу вверх) оператор, который ещё не попал ни в одну из подтаблиц, и он далее сыграет ту же роль, что и *резолюционный*, то есть будет определён во *вторую* подтаблицу и своим началом определит новую порцию операторов в *первую* подтаблицу и *так далее*.

Таблица 12

0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{\tau}$			T		T^*			T
τ	T			T			T	
	$\bar{\tau}$		T	T	T^*		T	T
		$\bar{\tau}$	T	T	T^*		T	T
		τ	T			T	T	

Таблица 13

0	1	2	3	4	5	6	7	8
	τ	T			T^*			T
			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T	T

Таблица 14

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{\tau}$	T	T						T	
	$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T
	τ		T		T			T	
		$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T
			$\bar{\tau}$	T^*	T	T		T	T
				$\bar{\tau}$	T	T	T		

Таблица 15

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ				T^*		T			T
		τ				T			T
			τ	T^*		T	T		
					$\bar{\tau}$	T	T	T	T

Результаты выделения описанным способом *первых* и *вторых* подтаблиц представлены в таблицах: **12** и **13** (для *таблицы* **8**), **14** и **15** (для *таблицы* **9**).

По системе Q_7 свёртку операторов во *вторых* подтаблицах (в нашем случае — это *таблицы* **13** и **15**) можно выполнить, но система Q_7 для выполнения свёрток в *первых* подтаблицах (в нашем случае — это *таблицы* **12** и **14**) не всегда пригодна. А поскольку необходимо решать задачи по свёртке любых подтаблиц из таблиц со столбцами, имеющими спецификации, описанные в **6.5.2**, то определим такую систему

$$Q_{10} \rightleftharpoons \{\, M, T, T^*, R_i, L_i, R_i^*, L_i^*, E_i, \bar{E}_i, I_i, \bar{I}_i \,\}, \quad i = 0, 1, 2, , \ldots, \tag{6.110}$$

где индексация комбинаторов определена в *таблице* **16**, а индексация копродукций — в *таблице* **17**, при этом в стартовом (в *первом* снизу в подтаблице) операторе (и стартовой продукции) имеют место синонимы:

$$T \hookrightarrow R, \qquad T^* \hookrightarrow L; \tag{6.111}$$

$$\bar{\tau} \hookrightarrow \bar{E}, \qquad \tau \hookrightarrow E; \tag{6.112}$$

$$\bar{\tau} \hookrightarrow \bar{I}, \qquad \tau \hookrightarrow I. \tag{6.113}$$

Таблица 16

T	T^*	T	T^*	M	M	M	M	T	T^*
R_i	L_i	R_i^*	L_i^*	R_i	L_i	R_i^*	L_i^*	M	M
R_{2i+1}	L_{2i+1}	R_{2i+1}^*	L_{2i+1}^*	R_{2i+2}	L_{2i+2}	R_{2i+2}^*	L_{2i+2}^*	R^*	L^*

Таблица 17

T	T^*	M	M	T^*	T	M	M
$\bar{E}_i$	E_i	$\bar{E}_i$	E_i	$\bar{I}_i$	I_i	$\bar{I}_i$	I_i
$\bar{E}_{2i+1}$	E_{2i+1}	$\bar{E}_{2i+2}$	E_{2i+2}	$\bar{I}_{2i+1}$	I_{2i+1}	$\bar{I}_{2i+2}$	I_{2i+2}

Учитывая то, что T и T^* в начале оператора суть $\bar{\tau}$ и τ, необходимо пояснить: как следует выполнять выбор синонимов из **(6.111) — (6.113)** ? Строго говоря, такой выбор зависит от некоторого соглашения, а оно у нас таково.

Таблица 18

0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\bar{\tau}$			T		T^*			T	4
τ	T			T			T		3
	$\bar{\tau}$		T	T	T^*		T	T	2
		$\bar{\tau}$	T	T	T^*		T	T	1
		τ	T			T	T		0
		I	R			R	R		1
		I_1	R_1	R^*	L^*	R_2	R_1	R^*	2
	$\bar{E}$	I_4	R_3	R_1^*	L_1^*	R_6	R_3	R_1^*	3
I	$\bar{E}_1$	I_{10}	R_8	R_3^*	L_4^*	R_{14}	R_7	R_4^*	4
I_1	$\bar{E}_3$	I_{22}	R_{18}	R_7^*	L_{10}^*	R_{30}	R_{15}	R_{10}^*	5

Таблица 19

0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	τ	T			T^*			T	1
			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T	T	0
			$\bar{E}$	R	L	R	R	R	1
	$\bar{E}$	R	$\bar{E}_2$	R_2	L_1	R_2	R_2	R_1	2

Первый (снизу) оператор таблицы (в самом правом столбце он помечен **0** (`нулем`)), записанный в системе Q_3, переписываем в оператор в системе Q_{10} (он под чертой, в самом *правом* столбце помечен 1), при этом продукции M сохраняют своё значение; для продукций T и T^* выполняются замены по **(6.111)**, а для начальных продукций $\bar{\tau}$ или τ используются **(6.112)**, если содержание столбца совпадает с перечнем **2)** или **3)**, и — **(6.113)**, если содержание совпадает с перечнем **4)** или **5)**. Указанные перечни относятся к представленной в **6.5.2** спецификации.

Таблица 20

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\bar{\tau}$	T	T						T		5
	$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T	4
	τ		T		T			T		3
		$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T	2
			$\bar{\tau}$	T^*	T	T		T	T	1
				$\bar{\tau}$	T	T	T			0
				$\bar{I}$	R	R	R			1
			$\bar{E}$	$\bar{I}_1$	R_1	R_1	R_2	R^*	R^*	2
		$\bar{E}$	$\bar{E}_1$	$\bar{I}_3$	R_3	R_3	R_6	R_1^*	R_1^*	3
	I	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_3$	$\bar{I}_8$	R_7	R_8	R_{14}	R_3^*	R_4^*	4
	I_1	$\bar{E}_5$	$\bar{E}_8$	$\bar{I}_{17}$	R_{16}	R_{17}	R_{30}	R_7^*	R_9^*	5
$\bar{E}$	I_3	$\bar{E}_{11}$	$\bar{E}_{18}$	$\bar{I}_{36}$	R_{34}	R_{36}	R_{62}	R_{15}^*	R_{20}^*	6

Таблица 21

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ				T^*		T			T	3
		τ				T			T	2
			τ	T^*		T	T			1
					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	0
					$\bar{E}$	R	R	R	R	1
			E	L	$\bar{E}_2$	R_1	R_1	R_2	R_2	2
		E	E_2	L_2	$\bar{E}_6$	R_3	R_4	R_6	R_5	3
E		E_2	E_6	L_5	$\bar{E}_{14}$	R_7	R_{10}	R_{14}	R_{11}	4

Затем, полагая, что операторы сворачиваемой таблицы имеют в самом *правом* столбце последовательные номера, начинающиеся с *нуля* и возрастающие вверх по строкам таблицы, выполняем последовательные свёртки (над *двумя* операторами с номерами s), приписывая им номер $s+1$, при этом в столбцах от начала более короткого оператора и до его конца действия над столбцами выполняются в соответствии с *таблицами* **16** и **17**, а *левее* указанного начала над той частью более длинного оператора выполняется такое же стартовое преобразование продукций (точнее: их замена на комбинаторы и копродукции), какое мы выполняем над стартовым оператором (оператором с номером **0**).

Результаты свёрток *таблиц* **12** — **15** представлены в *таблицах* **18** — **21** соответственно.

Развёртки следует выполнять как процесс, обратный свёрткам. Например,

$$\langle\, \bar{E}\, I_4\, R_3\, R_1^*\, L_1^*\, R_6\, R_3\, R_1^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}\, M\, T\, T\, T^*\, M\, T\, T \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, I_1\, R_1\, R^*\, L^*\, R_2\, R_1\, R^* \,\rangle,$$

$$\langle\, I_1\, R_1\, R^*\, L^*\, R_2\, R_1\, R^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}\, T\, T\, T^*\, M\, T\, T \,\rangle\, \overline{/}\, \langle\, I\, R\, M\, M\, R\, R\, M \,\rangle,$$

$$\langle\, I\, R\, M\, M\, R\, R\, M \,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, M\, T\, T\, M \,\rangle.$$

В верности этих развёрток можно убедиться по *таблице* **18** (*см.* строки **0** — **3** этой таблицы).

Замечание 15. Очень важно иметь ввиду, что когда мы указываем систему, в которой сворачиваем и разворачиваем операторы, то должны всегда помнить об определениях (таблицах определений) данной системы, так как эти определения различны для разных систем.

Глава 7

Проблема выполнимости

Началом этой главы является **п. 4** *главы* **III**, с которого следует начать чтение. Ниже рассмотрим способ нахождения выполняющих наборов задачи **ВЫП**, если они есть, или покажем, что задача выполняющих наборов не имеет, то есть противоречива.

Алгоритм, который позволяет это сделать, состоит в том, что над **таблицей задачи ВЫП** выполняется анализ. В процессе анализа фиксируются некоторые **исходы**. По этим **исходам** из таблицы выделяется подтаблица, над которой аналогичный анализ с фиксацией исходов должен быть повторён с выделением новой подтаблицы и так далее. Этот процесс может прерываться для того, чтобы выполнить преобразование над парой согласованных операторов, или, если в этом процессе имеется выход на **исход**, который говорит о том, что решение есть и его можно построить по полученной системе исходов. Затем анализ может быть продолжен.

Он завершится, когда другие выполняющие наборы не нужны или таблица противоречива, при этом таблица может стать противоречивой после извлечения из неё выполняющих наборов с последующим её преобразованием, исключающим эти наборы.

Теперь детализируем сказанное, уточнив каждый из упомянутых выше пунктов.

7.1 Метод решения задачи ВЫП

В дальнейшем вместо того, чтобы говорить "**таблица задачи ВЫП**" для краткости будем говорить просто "**таблица ВЫП**" или ещё короче — "**таблица**". Итак, полагаем, что **таблица ВЫП** имеет n столбцов и

m строк. Для нумерации столбцов будут использоваться две служебные строки: одна **(I)** с неизменными номерами от **0** до **n - 1**, указывающая на номер столбца в анализируемой **таблице**, а другая **(II)**, расположенная над ней, с собственными номерами столбцов, то есть при перестановке столбцов (всегда переставляется весь столбец таблицы) переставляются и номера в этой строке. Над этими двумя служебными строками располагается третья служебная строка **(III)**, в которой будут указываться исходы анализа таблицы, о чём будет говориться ниже.

Замечание 1. В тех случаях, когда в **таблице** столбцы не переставляются, **II** служебная строка может опускаться.

7.1.1 Анализ таблицы задачи ВЫП.

Сущность анализа **таблицы** заключается в выделении ведущего столбца, изучении его содержания, выделении подтаблицы, над которой продолжаем анализ. Начальным ведущим столбцом является весь самый *правый* столбец **таблицы**, то есть столбец с номером **n - 1**.

Хотя в **таблице ВЫП** все строки содержат KFS – операторы в системе Q_3, но поскольку над операторами **таблицы** будут выполняться преобразования, которые выводят за указанную систему и укладываются в систему Q_2, то анализ будет касаться KFS – операторов в системе Q_2.

При анализе ведущего столбца фиксируем один из *шести* возможных исходов, зависящих от перечня продукций, составляющих этот столбец. Проверка должна осуществляться в указанной ниже последовательности до первого ответа “да” на вопросы:

содержится ли в ведущем столбце с номером k

1) хотя бы по одной клетке с

а) τ и $\bar{\tau}$;

б) $\bar{\tau}$ и $\bar{T}$;

в) τ и $\bar{T}^*$;

г) $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$;

2) только клетки с

а) $\bar{\tau}$ и T;

б) T;

3) только клетки с

а) τ и T^*;
б) T^*;

4) хотя бы одна клетка с
а) $\bar{\tau}$, но имеются клетки с T^* или (и) M;
б) $\bar{T}^*$;
при этом в подисходах **а)** и **б)** могут быть или не быть продукции T;

5) хотя бы одна клетка с
а) τ, но имеются клетки с T или (и) M;
б) $\bar{T}$;
при этом в подисходах **а)** и **б)** могут быть или не быть продукции T^*;

6) во всех клетках
а) имеются только продукции M;
б) не имеет место ни один из предыдущих исходов и подисходов.

Результаты анализа (номера исходов) записываются в **III** служебную строку, если этот номер не **6**. В том случае, когда имеется исход **6 а)** в **III** служебную строку записываем M, а в случае **6 б)** записываем T или T^* (строго говоря, выбор является произвольным, но лучше выбирать ту из продукций, которая в ведущем столбце имеет большее вхождение, если на этот счёт не имеются дополнительные указания или рекомендации).

Перед тем как перейти к анализу столбца с номером $k-1$ (к такому анализу переходим лишь в том случае, когда номер исхода для k–го столбца больше **3**), произведём разбивку таблицы, условно исключив из неё строки (строка считается условно исключённой, если в служебном столбце против неё указан номер ведущего столбца из **I** служебной строки) в соответствии с номером исхода, а именно, для исходов с номером:

4) исключаются строки с продукциями $\bar{\tau}$ и T,

5) исключаются строки с продукциями τ и T^*,

6) в случае **а)** никаких строк не исключается, а в случае **б)** исключаются строки с той продукцией, которая выбрана в служебной строке, соответствующей этому исходу.

Замечание 2. В перечне исходов имеются литеры, которые подразумеваются, когда указывается лишь номер без уточнения.

Анализ начинается со столбца с номером **n - 1**, а заканчивается (или прерывается) по достижению столбца с номером исхода **2)** или **3)**, когда имеется выполнимость решаемой задачи. В случае выхода на исход **1)** над парой согласованных операторов, обеспечившие исход **1)**, выполняется преобразование, которое приводит: **1)** либо к переходу на столбец, расположенный правее анализируемого, и с которого продолжается анализ; **2)** либо к оператору $\langle \nu \rangle$, означающий противоречивость `задачи` **ВЫП**, представленной в `таблице`. В случае выполнимости выполняющий набор (наборы) строится (строятся) по **III** служебной строке.

7.1.2 Дополнительные результаты анализа таблицы задачи ВЫП.

По **III** служебной строке, начинающейся с исходов **2)** или **3)** и заполненной символами из множества $\{4, 5, T, T^*, M\}$, строится оператор, сопоставляя перечисленным символам начальные продукции τ или $\bar{\tau}$ и продукции T^*, T и M так:

$$\begin{bmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & T, & T^*, & M \\ \tau, & \bar{\tau}, & T^*, & T, & T^*, & T, & M \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

Построенный таким образом оператор является оператором искомого $\bar{\downarrow}$–юнкта. Оператор $\bar{/}$–юнкта, выполнимый на `таблице` **ВЫП**, получается из оператора искомого $\bar{\downarrow}$–юнкта в результате инвертирования последнего, то есть в результате инвертирования всех продукций оператора искомого $\bar{\downarrow}$–юнкта, кроме продукции M. Этот оператор $\bar{/}$–юнкта и даёт выполняющие наборы.

Разумеется, что выполняющие наборы можно строить и непосредственно по **III** служебной строке так: подобно **(7.1)** сопоставим:

$$\begin{bmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & T, & T^* \\ \bar{\theta}, & \theta, & \bar{\theta}, & \theta, & \bar{\theta}, & \theta \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

Разряды в **III** служебной строке левее исходов **2)** или **3)** и занятые продукцией M (пусть имеется t таковых разрядов) являются независимыми и поэтому им могут сопоставляться как в θ, так и $\bar{\theta}$ (это даёт не один, а 2^t выполняющих наборов).

Например. Пусть $n = 10$, а **III** служебная строка имеет один из видов:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \ & \ & \ & 2 & T & 5 & 4 & T^* & 5 & T \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \ & 3 & 4 & T^* & T & 5 & T & M & 5 & T^* \\ \hline \end{array}\,. \tag{7.3}$$

Тогда операторами искомых $\overline{\downarrow}$–юнктов будут соответственно:

$$\langle\, \tau_3\, T^*\, T\, T^*\, T\, T\, T^* \,\rangle, \quad \langle\, \bar{\tau}_1\, T^*\, T\, T^*\, T\, T^*\, M\, T\, T \,\rangle, \tag{7.4}$$

а операторами выполнимых $\overline{/}$–юнктов будут операторы:

$$\langle\, \bar{\tau}_3\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}^* \,\rangle, \quad \langle\, \tau_1\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, M\, \bar{T}\, \bar{T} \,\rangle. \tag{7.5}$$

В каждом из операторов **(7.5)** содержатся выполняющие наборы **таблицы ВЫП**, по которой получены соответствующие служебные строки **(7.3)**. В самом деле, операторы **(7.5)** могут рассматриваться как результаты переводов $\overline{/}$–юнктов в KFS–операторы:

$$x_4 \,\overline{/}\, x_5 \,\overline{/}\, \bar{x}_6 \,\overline{/}\, x_7 \,\overline{/}\, \bar{x}_8 \,\overline{/}\, \bar{x}_9 \,\overline{/}\, x_{10} \;\simeq\; \langle \bar{\tau}_3\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}^* \rangle,$$

$$\bar{x}_2 \,\overline{/}\, x_3 \,\overline{/}\, \bar{x}_4 \,\overline{/}\, x_5 \,\overline{/}\, \bar{x}_6 \,\overline{/}\, x_7 \,\overline{/}\, \bar{x}_9 \,\overline{/}\, \bar{x}_{10} \;\simeq\; \langle \tau_1\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, M\, \bar{T}\, \bar{T} \rangle$$

в соответствии с *леммой* **2** и *теоремой* **14** из *главы* **III**.

Те наборы, на которых выполнены $\overline{/}$–юнкты, будут наборами, на которых только не выполнены искомые $\overline{\downarrow}$–юнкты. Значит, если оператором искомого $\overline{\downarrow}$–юнкта пополнить таблицу и повторно решить задачу, то найдём (если имеются) ещё выполняющие наборы или получим противоречивую таблицу.

Замечание 3. На самом деле, вместо того, чтобы пополнять таблицу, разумнее поступить так: над построенным оператором искомого $\overline{\downarrow}$–юнкта и одним из операторов таблицы, который является согласованным с искомым оператором и приводит к *исходу* **1**, должна быть выполнена $\overline{/}$–юнкция, которая приведёт к преобразованию этой пары операторов и которой должна быть пополнена таблица, о чём сказано подробнее ниже. К сказанному следует добавить, что в тех случаях, когда имеется выход на *исход* **2** или **3**, вызванные тем, что в анализируемом столбце имеются только клетки с T или только клетки с T^* соответственно, мы строим искомый дизъюнкт, который с одним из операторов, приведшим к *исходу* **2** или **3**, даёт пару согласованных операторов, которая тоже должна быть рассогласована, а поэтому продолжение анализа после рассогласования может приводить либо к *исходу* **1**, либо к *исходу* **2** или **3**, позволяющие строить новый искомый дизъюнкт.

7.1.3 Преобразование пары согласованных операторов в $\overline{/}$–юнкции.

При анализе **таблицы ВЫП** могут быть выходы на *исходы* **1**. В таких исходах как минимум имеются два согласованных оператора, которые приводят к такому исходу. Иногда $\bar{/}$–юнкция такой пары согласованных операторов может быть свёрнута в один оператор с использованием упрощённого правила $\bar{/}$–юнкции из **4.6.1**. Но такое не всегда возможно. Когда оно не возможно, осуществляется процесс, называемый **рассогласованием**.

Преобразование $\bar{/}$–юнкции пары согласованных операторов в $\bar{/}$–юнкцию некоторого числа попарно несогласованных операторов, называется **преобразованием рассогласования**. На процессе *рассогласования* остановимся подробнее.

По *теореме* **1** (или правилу конъюнктивной свёртки) из *главы* **V** может быть найдена свёртка согласованных операторов, дающих *исход* **1**. Свёртка этих операторов, точнее *подоператор свёртки* (от начала до самого правого комбинатора) в соответствии с **(5.3)** — **(5.6)** может иметь одну из записей:

$$\langle\, \gamma_j\, R \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \alpha_j \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \alpha_j\, T^* \,\rangle, \tag{7.6}$$

$$\langle\, \gamma_j\, R^* \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, \beta_j \,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \beta_j\, T^* \,\rangle, \tag{7.7}$$

$$\langle\, \gamma_j\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, \gamma_j \,\rangle \;=\; \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \gamma_j\, T^* \,\rangle, \tag{7.8}$$

$$\langle\, \gamma_j\, L^* \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j\, \gamma_j \,\rangle \;=\; \langle\, \beta_j\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \gamma_j\, T^* \,\rangle. \tag{7.9}$$

В правых частях **(7.6)** — **(7.9)** имеем $\bar{/}$–юнкцию двух несогласованных операторов. Несогласованность идёт по столбцу, в котором имелся комбинатор. Если в подоператорах $\langle\, \gamma_j \,\rangle$ в равенствах **(7.6)** — **(7.9)** имеются комбинаторы, то процесс развёртки может быть продолжен, как это показано в равенствах **(7.6)** — **(7.9)** и при этом понятно, что попарная несогласованность может быть обеспечена. Число операторов полной развёртки равно $\rho + 1$, где ρ — число комбинаторов в свёртке операторов.

Например:

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau \quad T \;\; M \;\; T^* \;\; M \;\; M \,\rangle \\ \underline{\langle\, \bar{\tau} \quad \bar{T} \;\; \bar{T}^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle} \\ \langle\, O^* \;\; P \;\; \bar{Z}^* \;\; T^* \;\; L \;\;\; L \,\rangle \end{array} \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T^*\, M\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau\, T\, M\, T^*\, T\, T^* \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_3\, T^*\, T^* \,\rangle,$$

так как

$$\langle\, O^*\, P\, \bar{Z}^*\, T^*\, L\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T^*\, M\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, O^*\, P\, \bar{Z}^*\, T^*\, L\, T^* \,\rangle,$$

$$\langle\, O^*\, P\, \bar{Z}^*\, T^*\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T^*\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, O^*\, P\, \bar{Z}^*\, T^*\, T^* \,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T\, M\, T^*\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_3\, T^* \,\rangle.$$

$$
\begin{array}{l}
\langle \bar{\tau}\ \ T\ T\ M\ \ T\ \ \bar{T}\ \ T^{*} \rangle \\
\langle \tau\ \ T\ \bar{T}\ \ T\ \ M\ M\ M \rangle \\
\hline
\langle O\ T\ \ P\ \ R\ \ R^{*}\ \ Z\ \ L^{*} \rangle
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\\
= \langle \tau T \bar{T} T M M T \rangle \overline{/} \langle \bar{\tau}_1 \bar{T} T T \bar{T} T^{*} \rangle \overline{/} \\
\quad \overline{/}\ \langle \bar{\tau} T T T^{*} T \bar{T} T^{*} \rangle \overline{/} \langle \tau T \bar{T} T^{*} \bar{T} T^{*} \rangle,
\end{array}
$$

так как

$$
\begin{aligned}
\langle O T P R R^{*} Z L^{*} \rangle &= \langle \tau T \bar{T} T M M T \rangle \overline{/} \langle O T P R R^{*} \bar{T} T^{*} \rangle, \\
\langle O T P R R^{*} \rangle &= \langle O T P R T \rangle \overline{/} \langle \tau T \bar{T} T T^{*} \rangle, \\
\langle O T P R \rangle &= \langle O T P T \rangle \overline{/} \langle \bar{\tau} T T T^{*} \rangle = \langle \bar{\tau}_1 \bar{T} T \rangle \overline{/} \langle \bar{\tau} T T T^{*} \rangle.
\end{aligned}
$$

7.1.4 Шаги алгоритма преобразований таблицы задачи ВЫП.

Преобразования над таблицей совершаются с целью решения **задачи ВЫП**, то есть с целью нахождения выполняющих наборов (если они есть) или обнаружения противоречивости **таблицы ВЫП**. Они заключаются в выполнении $\overline{/}$–юнкции над согласованными операторами или в рассогласовании пар согласованных операторов, дающих *исход* **1**.

Решение задачи начинается с анализа $(n-1)$–го, то есть самого правого столбца **таблицы** с целью определения номера исхода и заполнении **III** служебной строки и столбца в полном соответствии с **п 1.1**. Выход на *исход* **2** или **3** означает выполнимость и выполняющий оператор строится в полном соответствии с **п 1.2**. Выход на *исход* **1** требует преобразования над парой согласованных операторов, которое может выполняться по упрощённому правилу $\overline{/}$–юнкции или (когда такое невозможно) должно выполняться рассогласование в соответствии с **п 1.3**, требующее безусловного исключения согласованных операторов и включения в таблицу результирующих операторов рассогласования.

При этом включённые операторы требуют корректировки **III** служебной строки и служебного столбца. Эта корректировка должна приводить к тому, что некоторые указатели **III** служебной строки и столбца стираются и анализ продолжается со столбца, расположенного правее столбца, в котором был зафиксирован *исход* **1**.

Замечание 4. В тех случаях, когда для *задачи* **ВЫП** разыскиваются все выполняющие операторы, будем говорить, что находим решение *задачи* **ВЫП** с полным предъявлением (сокращённо: **ВЫП** с **ПП**).

7.1.5 Простые иллюстрационные примеры.

Прежде чем рассматривать более сложные вопросы, связанные с *задачей* **ВЫП**, рассмотрим её решение в рамках изложенной методики на примерах задач, представленных в *таблицах* **1** и **2** *главы* **III**. При выполнении выкладок и преобразований мы придерживаемся такого способа записи результатов этих выкладок и преобразований.

Поскольку из таблицы надо удалять и вписывать операторы, то безусловное удаление операторов в служебном столбце помечается “–” (*чертой*), а вписывание операторов производится в конец таблицы. В памяти компьютера на место безусловно удалённых операторов можно записывать вносимые в таблицу операторы. Условное исключение (как в служебной строке, так и в столбце) помечается указателем. Указатель в служебном столбце помечается “*” (*звёздочкой*), если он внесён против оператора по достижению его начала. Поскольку в служебных строке и столбце приходится как вписывать, так и вычёркивать указатели, то в таблице приводятся варианты этих состояний. Те указатели, которые сохранили свои значения, в последующих вариантах отмечены **жирным** шрифтом.

Теперь перейдём к пояснению выкладок. В *таблице* **1**, в первом варианте, в служебной строке имеем *исход* **1** в нулевом столбце. А это означает, что над парой операторов, имеющих указатели 0^*, выполняем выкладку:

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau \quad T^* \; M \;\; M \;\; M \,\rangle \\ \underline{\langle\, \bar{\tau} \quad T^* \; M \; T^* \;\; T \,\rangle} \\ \langle\, O^* \; T^* \; M \;\;\, L \quad R \,\rangle \end{array} = \langle\, \tau\, T^*\, M\, T\, T \,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \tau_1\, M\, T^*\, T \,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \tau\, T^*\, M\, M\, T^* \,\rangle,$$

так как

$$\langle\, O^*\, T^*\, M\, L\, R \,\rangle \;=\; \langle\, O^*\, T^*\, M\, L\, \tau\, T^*\, M\, M \,\rangle = \langle\, O^*\, T^*\, M\, L\, T \,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \tau\, T^*\, M\, M\, T^* \,\rangle,$$

$$\langle\, O^*\, T^*\, M\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \tau\, T^*\, M\, .\, O^*\, T^*\, M \,\rangle = \langle\, \tau\, T^*\, M\, T \,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \tau_1\, M\, T^* \,\rangle.$$

Но второй оператор развёртки и оператор `таблицы`, помеченный указателем 1^*, дают *исход* **1**, а это значит, что мы выполняем преобразование:

Таблица 1

	1	5	**T**	**4**						6
1	4	T	T	4					5	
	1	5	**5**	$\mathbf{T}^*$				4		
1	4	T	5	$\mathbf{T}^*$			3			
1	5	4	**T**	$\mathbf{T}^*$		2				
1	4	T^*	T	T^*	1					
0	1	2	3	4	$\bar{/}$					
τ	T	M	M	M		0^*	–	–	–	–
τ	T^*	M	M	M	0^*	–	–	–	–	–
$\bar\tau$	T^*	M	T	M	3	**3**	0^*	–	–	–
$\bar\tau$	T	T^*	M	M	2	0^*	–	–	–	–
$\bar\tau$	T^*	M	M	T^*	4	**4**	**4**	**4**	0^*	–
$\bar\tau$	T^*	M	T^*	T	0^*	–	–	–	–	–
	$\bar\tau$	T	M	M	1^*	–	–	–	–	–
τ	T^*	M	T	T		3	0^*	–	–	–
τ	T^*	M	M	T^*		4	**4**	**4**	0^*	–
	$\bar\tau$	T	T	T		3	2	1^*	–	–
	τ	$\bar{T}^*$	T^*	T		1^*	–	–	–	–
	$\bar\tau$	T	M	T^*		4	**4**	**4**	2	1^*
τ	T	T	M	M			2		2	
	$\bar\tau$	T^*	$\bar{T}$	T			1^*	–	–	–
	$\bar\tau$	T^*	M	T^*			4	**4**	1^*	–
$\bar\tau$	T^*	M	T	T^*				4	3	**3**
	τ	$\bar{T}$	$\bar{T}$	T				1^*	–	–
				$\bar\tau$					4^*	$\mathbf{4}^*$
	τ	$\bar{T}$	M	T^*						1^*

$$
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau_1 \;\; T \;\; M \;\; M \,\rangle \\
\langle\, \tau_1 \; M \; T^* \;\; T \,\rangle \\
\hline
\langle\, \tau_1 \;\; \bar{I}^* \;\; L \;\; R \,\rangle
\end{array}
= \langle \tau_1\, \bar{I}^*\, L\, \bar\tau_1\, T\, M \rangle = \langle \bar\tau_1\, T\, T\, T \rangle \,\bar{/}\, \langle \tau_1\, \bar{T}^*\, T^*\, T \rangle \,\bar{/}\, \langle \bar\tau_1\, T\, M T^* \,\rangle,
$$

так как

$$
\langle\, \tau_1\, \bar{I}^*\, L \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau_1\, T\, \tau_1\, \bar{I}^* \,\rangle \;=\; \langle\, \bar\tau_1\, T\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_1\, \bar{T}^*\, T^* \,\rangle .
$$

В результате из `таблицы` безусловно удаляются **три** оператора (см. *второй* вариант служебного столбца) и включаются *пять* (*два* из первой развёртки и *три* из второй).

Во втором варианте служебного столбца вновь имеем *два* оператора, помеченные 0^* и *один* оператор с указателем 1^*. Это даёт:

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau \quad T\ M\ M\ M\, \rangle \\ \underline{\langle\, \bar\tau \quad T\ T^*\ M\ M\, \rangle} \\ \langle\, O^*\ T\ \ L\ \ M\ M\, \rangle \end{array} = \langle\, \tau\, T\, T\, M\, M\, \rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar\tau_1\, T^*\, M\, M\, \rangle,$$

$$\begin{array}{l} \langle\, \bar\tau_1\ T^*\ M\ M\, \rangle \\ \underline{\langle\, \tau_1\ \bar T^*\ T^*\ \ T\, \rangle} \\ \langle\, \bar\tau_1\ T^*\ \ I\ \ \ R\, \rangle \end{array} = \langle\, \bar\tau_1\, T^*\, \bar T\, T \rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar\tau_1\, T^*\, M\, T^*\, \rangle.$$

Значит, из `таблицы` вновь вычёркиваются **три** оператора, а вписываются **три**.

Ниже мы приводим дальнейшие выкладки, не приводя столь подробные пояснения. Просто надо проследить всё по *таблице* **1**, из которой видно, что именно такие выкладки следует выполнить.

$$\begin{array}{l} \langle\, \bar\tau\ \ T^*\ M\ T\ M\, \rangle \\ \underline{\langle\, \tau\ \ T^*\ M\ T\ \ T\, \rangle} \\ \langle\, O\ T^*\ M\ T\ \ R\, \rangle \end{array} = \langle\, \tau_1\, M\, T\, T\, \rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar\tau\, T^*\, M\, T\, T^*\, \rangle,$$

$$\begin{array}{l} \langle\, \tau_1\ M\ T\ T\, \rangle \\ \underline{\langle\, \bar\tau_1\ T^*\ \bar T\ T\, \rangle} \\ \langle\, \tau_1\ \ I\ \ P\ T\, \rangle \end{array} = \langle\, \tau_1\, \bar T\, \bar T\, T \rangle.$$

$$\begin{array}{l} \langle\, \bar\tau_1\ T\ T\ T\, \rangle \\ \underline{\langle\, \tau_1\ \bar T\ \bar T\ T\, \rangle} \\ \langle\, \qquad\quad \bar\tau_4\, \rangle\ . \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \langle\, \bar\tau\ T^*\ M\ M\ T^*\, \rangle \\ \underline{\langle\, \tau\ T^*\ M\ M\ T^*\, \rangle} \\ \langle\quad \tau_1\ M\ M\ T^*\, \rangle\ , \end{array} \qquad \begin{array}{l} \langle\, \tau_1\ M\ M\ T^*\, \rangle \\ \underline{\langle\, \bar\tau_1\ T^*\ M\ T^*\, \rangle} \\ \langle\, \tau_1\ \ I\ \ M\ T^*\, \rangle \end{array} = \langle\, \tau_1\, \bar T\, M\, T^* \rangle.$$

$$\begin{array}{l} \langle\, \bar\tau_1\ T\ \ M\ \ T^*\,\rangle \\ \langle\, \tau_1\ \bar T\ \ M\ \ T^*\,\rangle \\ \hline \langle\, \qquad\qquad \tau_4\,\rangle\ . \end{array}$$

А так как $\langle\,\bar\tau_4\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\,\tau_4\,\rangle = \langle\,\nu\,\rangle$, то *таблица* **1** противоречива.

Сейчас перейдём к решению задачи, представленной в *таблице* **2** *главы* **III**. Преобразования над этой таблицей представлены в *таблице* **2**, следующей ниже.

Из вариантов служебной строки *таблицы* **2** видно, что искомыми дизъюнктами являются:

$$\begin{array}{r} \langle\bar\tau_2\ \ T^*\ \ \ T\ \ T^*\ T^*\,\rangle, \\ \langle\bar\tau_1\ \ \ T\ \ \ \ T^*\ \ T^*\ T^*\ T^*\,\rangle, \\ \langle\tau\ \ T^*\ \ \ T\ \ \ \ T^*\ \ T^*\ T^*\ T^*\,\rangle, \\ \langle\bar\tau\ \ \ M\ \ \ T^*\ \ \ T\ \ \ T^*\ T^*\ T^*\,\rangle, \\ \langle\bar\tau\ \ \ T\ \ \ \ T\ \ \ \ T\ \ \ T^*\ T^*\ T^*\,\rangle, \\ \langle\bar\tau_3\ \ T\ \ \ T\ \ T^*\,\rangle, \\ \langle\,\tau\ \ M\ \ \ T\ \ \ \ T^*\ \ \ T\ \ \ T\ \ T^*\,\rangle. \end{array} \tag{7.10}$$

Этими дизъюнктами не исчерпывается весь список искомых дизъюнктов, поскольку в этом иллюстрационном примере мы не разыскиваем решение **задачи ВЫП** с **ПП**. Можно было бы остановиться и на первом искомом дизъюнкте, а такое излишество может быть объяснено желанием шире проиллюстрировать выкладки при выполнении преобразований. А они в той части, которая представлена в *таблице* **2**, такие:

$$\begin{array}{l} \langle\,\tau_2\ \ T^*\ M\ \ M\ \ T^*\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_2\ \ T^*\ \ T\ \ T^*\ T^*\,\rangle \\ \hline \langle\,O^*\ T^*\ \ R\ \ \ L\ \ T^*\,\rangle \end{array} = \langle\,\tau_2\,T^*\,M\,T\,T^*\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\,\tau_3\,T\,T^*\,T^*\,\rangle \,\bar{/}\, \langle\,\tau_2\,T^*\,T^*\,T^*\,T^*\,\rangle,$$

$$\begin{array}{l} \langle\,\tau_3\ T\ T^*\ T^*\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_3\ T\ T^*\ T^*\,\rangle \\ \hline \langle\quad \bar\tau_4\ T^*\ T^*\,\rangle\ . \end{array}$$

Эти выкладки соответствуют первому варианту служебных строки и столбца. Ниже выкладки для каждого из вариантов отделяются *точкой с запятой*.

Таблица 2

2	M	5	4	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}$								8
			3	T^*	5	$\mathbf{T}$							7	
1	4	**5**	**5**	**4**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$						6		
3	T^*	5	**5**	**4**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$					5			
3	M	T	5	**4**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$				4				
2	4	**5**	$\mathbf{T}$	**4**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$			3					
	3	5	T	4	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$		2						
		3	4	T^*	T	T	1							
0	1	2	3	4	5	6	$\bar{/}$							
$\bar\tau$	M	T	T^*	M	T	M	5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	3	0^*
$\bar\tau$	T^*	T	M	T^*	M	M	4	1	–	–	–	–	–	–
			$\bar\tau$	T	T^*	T^*	3^*	–	–	–	–	–	–	–
τ	M	M	T	T^*	M	M	4	3	**3**	0^*	–	–	–	–
	τ	T^*	M	M	T	T	6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
		τ	T^*	M	M	T^*	2^*	–	–	–	–	–	–	–
				τ	T	T	6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
				$\bar\tau$	T^*	T	6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
		τ	T^*	M	T	T^*		5	**5**	**5**	**5**	**5**	3	–
		τ	T^*	T^*	T^*	T^*		2^*	$\mathbf{2}^*$	–	–	–	–	–
				$\bar\tau$	T^*	T^*		4^*	$\mathbf{4}^*$	$\mathbf{4}^*$	$\mathbf{4}^*$	$\mathbf{4}^*$	–	–
$\bar\tau$	T^*	T	M	T^*	M	T			6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**
$\bar\tau$	T^*	T	M	T^*	T	T^*			5	**5**	**5**	**5**	4	**4**
$\bar\tau$	T^*	T	T	T^*	T^*	T^*			3	2	1	0^*	–	–
$\bar\tau$	$\bar{T}^*$	T	T^*	T^*	T^*	T^*			0^*	–	–	–	–	–
			τ	T^*	T^*	T^*				3^*	$\mathbf{3}^*$	$\mathbf{3}^*$	–	–
τ	M	M	T	T^*	M	T					6	**6**	**6**	**6**
τ	M	M	T	T^*	T	T^*					5	**5**	4	**4**
τ	M	$\bar{T}$	T	T^*	T^*	T^*					0^*	–	–	–
τ	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	T	T^*	T^*	T^*						0^*	–	–
					τ	T^*							5^*	$\mathbf{5}^*$
		τ	$\bar{T}^*$	T	T	T^*								2^*
		τ	T^*	T^*	T	T^*								4

$$
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau \;\; T^* \;\; T \;\; M \;\; T^* \;\; M \;\; M \,\rangle \\
\langle\, \quad\;\; \bar\tau_1 \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \bar E \;\; O^* \;\; T \;\; L \;\; T^* \;\; L \;\; L \,\rangle
\end{array}
= \langle\, \bar\tau\, T^*\, T\, M\, T^*\, M\, T \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar\tau\, T^*\, T\, M\, T^*\, T\, T^* \,\rangle \,\overline{/}
$$

$$
\overline{/}\;\; \langle\, \bar\tau\, T^*\, T\, T\, T^*\, T^*\, T^* \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar\tau\, \bar T^*\, T\, T^*\, T^*\, T^*\, T^* \,\rangle;
$$

$$
\begin{array}{l}
\langle\, \tau \;\; T^* \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \bar\tau \;\; \bar T^* \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \qquad\quad \bar\tau_2 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle\, ,
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau_2 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \tau_2 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \quad\;\; \tau_3 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle\, ;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau \;\; M \;\; T^* \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \tau \;\; M \;\; M \;\; T \;\; T^* \;\; M \;\; M \,\rangle \\
\hline
\langle\, \tau \;\; M \;\; I^* \;\; T \;\; T^* \;\; L^* \;\; L^* \,\rangle
\end{array}
= \langle\, \tau\, M\, M\, T\, T^*\, M\, T \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \tau\, M\, M\, T\, T^*\, T\, T^* \,\rangle \,\overline{/}
$$

$$
\overline{/}\;\; \langle\, \tau\, M\, \bar T\, T\, T^*\, T^*\, T^* \,\rangle;
$$

$$
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau \;\; T \;\; T \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \tau \;\; M \;\; \bar T \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \tau \;\; \bar T^* \;\; \bar T \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle\, ;
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau \;\; T^* \;\; T \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \tau \;\; \bar T^* \;\; \bar T \;\; T \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \qquad\qquad\quad \bar\tau_3 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle\, ,
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\langle\, \bar\tau_3 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \tau_3 \;\; T^* \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \quad\;\; \tau_4 \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle\, ,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\langle\, \tau_4 \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \bar\tau_4 \;\; T^* \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, \quad\;\; \tau_5 \;\; T^* \,\rangle\, ;
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\langle\, \tau_2 \;\; T^* \;\; M \;\; T \;\; T^* \,\rangle \\
\langle\, \quad\;\; \bar\tau_3 \;\; T \;\; T \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
\langle\, E \;\; O^* \;\; R \;\; T \;\; T^* \,\rangle
\end{array}
= \langle\, \tau\, \bar T^*\, T\, T\, T^* \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \tau\, T^*\, T^*\, T\, T^* \,\rangle.
$$

Итак, задача решена. Она имеет много выполняющих наборов. По каждому из искомых $\overline{\downarrow}$–юнктов **(7.10)** можно построить $\overline{/}$–юнкт, который даёт выполняющие наборы. В частности, по $\overline{/}$–юнктам из $\overline{\downarrow}$–юнктов **(7.10)** имеем

$$
2^2 \,+\, 2^1 \,+\, 2^0 \,+\, 2^1 \,+\, 2^0 \,+\, 2^3 \,+\, 2^1 \,=\, 20
$$

выполняющих наборов. Первые четыре получаются по $\overline{/}$–юнкту $\langle\, \tau_2\, \bar T^*\, \bar T\, \bar T^*\, \bar T^* \,\rangle$:

$$\begin{array}{l}
(\,\theta\ \ \theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \bar\theta\,)\\
(\,\theta\ \ \bar\theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \bar\theta\,)\\
(\,\bar\theta\ \ \theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \bar\theta\,)\\
(\,\bar\theta\ \ \bar\theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \theta\ \ \bar\theta\ \ \bar\theta\,).
\end{array}$$

7.1.6 Приведение таблицы задачи ВЫП.

Как упоминалось выше, перестановка столбцов в *таблице* **ВЫП** означает переименование переменных. Это переименование отражено в соотношении между **I** и **II** служебными строками: если в **I** служебной строке переменные имеют новые номера, то во **II** служебной строке сохраняются их собственные номера из *исходной* таблицы, что означает: столбцы переносятся вместе со своими номерами, представленными во **II** служебной строке.

`Приведение` *таблицы* **ВЫП**, имеющей только строки одного и того же постоянного ранга r_0, означает такую перестановку столбцов таблицы, при которой число продукций M всей таблицы минимально.

Добиться сформулированной цели на таблицах со строками постоянного ранга достаточно просто, но поскольку практические задачи редко приводят к такого рода таблицам, то мы сформулируем упрощённый эвристический метод приведения таблицы в общем виде, суть которого такова.

Для заданной таблицы, подлежащей приведению, вычисляются ранги строк (с левой стороны, в *первом* столбце, указываются результаты подсчёта рангов r для строк): пусть они суть $r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_k$. Строки с одинаковыми рангами r_s, где $0 \le s \le k$, составляют подтаблицы ранга r_s. Для каждой такой подтаблицы вычисляются ранги столбцов (результаты записываются под чертой с указанием в *первом* столбце ранга r_s).

Затем, по рангам подтаблицы r_0 устанавливается такая последовательность столбцов, в которой имеется слева направо неубывающий перечень рангов. В этом перечне могут быть участки не вполне определившиеся (участки с равными рангами). Для таких участков дальнейшие определения выполняются по рангам подтаблицы r_1, но только для таких участков (то есть ранги подтаблицы r_1 не влияют на те ранги, которые уже полностью определились с помощью рангов подтаблицы r_0).

Если и после этого остаются неопределившиеся полностью участки, то используются ранги подтаблицы r_2 и *так далее.*

Таблица 3

r	0	1	2	3	4
2	τ	T	M	M	M
2	τ	T^*	M	M	M
3	$\bar{\tau}$	T^*	M	T	M
3	$\bar{\tau}$	T	T^*	M	M
3	$\bar{\tau}$	T^*	M	M	T^*
4	$\bar{\tau}$	T^*	M	T^*	T
2		$\bar{\tau}$	T	M	M
2	2	3	1	0	0
3	3	3	1	1	1
4	1	1	0	1	1

Таблица 4

1	4	M	5	4		2
		1	5	T^*	1	
4	3	2	0	1	$\bullet$	
0	1	2	3	4	$\bar{/}$	
			τ	T	3^*	–
			τ	T^*	4	3^*
	$\bar{\tau}$	M	T	T^*	4	1^*
		τ	T	T	2^*	–
τ	M	M	T	T^*	4	0^*
$\bar{\tau}$	T^*	M	T	T^*	4	0^*
		$\bar{\tau}$	M	T	2^*	–
				$\bar{\tau}$		4^*

Результат такого уточнения заканчивается либо достижением полной определённости после использования рангов r_s некоторой подтаблицы, либо после использования рангов r_k последней подтаблицы. При этом не исключено, что в конечном итоге будут участки не вполне определившиеся, для которых уже никаких уточнений не выполняется.

По установленной таким образом последовательности столбцов выполняется их перестановка, которая и отражается в служебном столбце **II**.

Изложенный алгоритм в дальнейшем будет называться **алгоритмом левого приведения**.

Теперь проиллюстрируем описанный алгоритм на *таблице* **1**. Подсчёт рангов для этой таблицы представлен в *таблице* **3**. В *левом* столбце записаны ранги строк. Эти ранги суть: **2** (для строк **1**, **2** и **7**), **3** (для строк **3 — 5**) и **4** (для строки **6**). Под чертой записаны ранги подтаблиц с рангами строк **2**, **3** и **4**. По подтаблице с рангом **2** последовательность столбцов определилась (за исключением столбцов **3** и **4**). Уточнение с помощью подтаблиц ранга **3** и **4** ничего не даёт: неопределённость осталась. Итак, результат приведения *таблицы* **3** представлен в *таблице* **4**, в которой, кроме того, выполнены выкладки по решению **задачи ВЫП**. Выкладки по *первому* варианту служебных строки и столбца *таблицы* **4** таковы:

$$\begin{array}{c} \langle \tau \quad T \quad T \rangle \\ \langle \bar{\tau} \quad M \quad T \rangle \\ \hline \langle \bar{\tau} \quad \bar{T}^{*} \quad T \rangle, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \langle \bar{\tau} \quad \bar{T}^{*} \quad T \rangle \\ \langle \qquad \tau \quad T \rangle \\ \hline \langle \qquad\quad\; \bar{\tau} \rangle. \end{array}$$

По *второму* варианту служебных строки и столбца выкладок можно не делать, так как среди указателей в **III** служебной строке нет указателей T и T^{*}, а выход на *исход* **1** в такой ситуации означает противоречивость таблицы.

Замечание 5. Сравнение выкладок в *неприведённой* таблице с выкладками в *приведённой* таблице (это *таблицы* **1** и **4**) показывает, что выкладки в *приведённой* таблице сокращаются, что совершенно понятно. Однако следует иметь ввиду, что это не всегда так, поскольку здесь мы имеем дело с упрощённым методом приведения.

Кроме упрощённого метода приведения, названного нами **алгоритмом левого приведения**, можно использовать и более утончённый приём левого приведения для таблиц со строками, имеющими постоянный ранг. Хотя в дальнейшем не предполагается использование утончённого приёма, тем не менее мы его проиллюстрируем на примере таблицы, все строки которой имеют ранг **3**. Это *таблица* **5**. Ранги столбцов записаны под чертой. Выбирается столбец с *минимальным* рангом. Таковых два: *нулевой* и *четвёртый*. Эти столбцы равноприемлемы: можно выбрать любой из них (мы выбираем *нулевой*) и перемещаем в крайнее *левое* положение (он его уже занимает). Затем условно исключаются строки, имеющие отличные от M продукции в выбранном столбце (это осуществлено с помощью указателей в *правом* столбце). Над подтаблицей (оставшейся после такой операции) повторяем сказанное выше до тех пор, пока полностью не определится новая последовательность столбцов. Результат приведения представлен в *таблице* **6**.

Теперь найдём решение **задачи ВЫП** с **ПП**, представленной в *таблице* **6**, над которой начнём анализ (в *таблице* **6** приведены **три** варианта). Продолжение анализа в *таблице* **7**, а завершение — в *таблице* **8**. При переписывании таблиц строки, безусловно исключённые в предыдущей таблице, в последующей — опущены. Решение **задачи ВЫП** с **ПП** приводит к следующим искомым $\bar{\downharpoonleft}$–юнктам (по вариантам **2, 3, 4** соответственно):

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \tau \quad T \quad T \quad T \quad T^{*} \quad T \,\rangle,\\
&\langle\, \tau \quad T \quad T^{*} \quad T \quad T^{*} \quad T \,\rangle,\\
&\langle\, \tau \quad T^{*} \quad T^{*} \quad T \quad T^{*} \quad T \,\rangle.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Результаты свёрток и развёрток над операторами при выполнении преобразований (в соответствии с нашей методикой) по вариантам **1 — 6** *таблиц* **6** и **7** таковы:

$$
1)\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\, \bar{\tau}_2\; T^{*}\; M \;\; T \,\rangle\\ \langle\, \tau_2\; T^{*}\; T \;\; M \,\rangle\end{array}}{\langle\, O\; T^{*}\;\; R\;\; R^{*} \,\rangle} = \langle\, \tau_3\, T\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}_2\, T^{*}\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_2\, T^{*}\, T\, T^{*} \,\rangle,
$$

$$
1^{I})\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\, \tau_3\;\; T\;\; T \,\rangle\\ \langle\, \bar{\tau}_3\;\; T\;\; T \,\rangle\end{array}}{\langle\, \quad \bar{\tau}_4\;\; T \,\rangle}\;; \qquad 2)\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\, \tau\;\; T\;\; T\;\; T\;\; T^{*}\;\; T \,\rangle\\ \langle\, \bar{\tau}\;\; M\;\; T\;\; M\;\; T^{*}\;\; M \,\rangle\end{array}}{\langle\, \bar{\tau}\;\; \bar{I}^{*}\;\; T\;\; R^{*}\;\; T^{*}\;\; R^{*} \,\rangle} =
$$

$$
= \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}^{*}\, T\, T\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, M\, T\, T^{*}\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, M\, T\, M\, T^{*}\, T^{*} \,\rangle,
$$

$$
2^{I})\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\, \bar{\tau}\;\; \bar{T}^{*}\;\; T\;\; T\;\; T^{*}\;\; T \,\rangle\\ \langle\, \quad \tau_1\;\; T\;\; M\;\; T^{*}\;\; M \,\rangle\end{array}}{\langle\, \bar{E}\;\; \bar{P}^{*}\;\; T\;\; R^{*}\;\; T^{*}\;\; R^{*} \,\rangle} = \langle\, \bar{\tau}_2\, T\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_1\, T\, T^{*}\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_1\, T\, M\, T^{*}\, T^{*} \,\rangle;
$$

$$
3)\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\, \tau \quad T\; T^{*}\;\; T\;\; T^{*}\;\; T \,\rangle\\ \langle \bar{\tau} \quad T\; T^{*}\;\; M\;\; M\;\; M \,\rangle\end{array}}{\langle\, O^{*}\;\; T\;\; T^{*}\;\; R^{*}\;\; L^{*}\;\; R^{*} \,\rangle} = \begin{array}{l}\langle\, \bar{\tau}\, T\, T^{*}\, M\, M\, T^{*} \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, T\, T^{*}\, M\, T\, T \,\rangle \,\bar{/}\\ \bar{/}\;\; \langle\, \bar{\tau}_1\, T^{*}\, T\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, T\, T^{*}\, T^{*}\, T^{*}\, T \,\rangle;\end{array}
$$

$$
4)\quad \frac{\begin{array}{c}\langle\, \tau \quad T^{*}\; T^{*}\;\; T\;\; T^{*}\;\; T \,\rangle\\ \langle \bar{\tau} \quad T^{*}\; T^{*}\;\; M\;\; M\;\; M \,\rangle\end{array}}{\langle\, O^{*}\;\; T^{*}\;\; T^{*}\;\; R^{*}\;\; L^{*}\;\; R^{*} \,\rangle} = \begin{array}{l}\langle\, \bar{\tau}\, T^{*}\, T^{*}\, M\, M\, T^{*} \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, T^{*}\, T^{*}\, M\, T\, T \,\rangle \,\bar{/}\\ \bar{/}\;\; \langle\, \tau_1\, T^{*}\, T\, T^{*}\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, T^{*}\, T^{*}\, T^{*}\, T^{*}\, T \,\rangle,\end{array}
$$

Таблица 5

0	1	2	3	4	5	$\bar{/}$
		τ	M	T^*	T	4
τ	T^*	M	M	M	T	0
$\bar\tau$	M	T	M	T	M	0
	τ	T^*	T^*	M	M	
$\bar\tau$	M	M	M	T^*	T^*	0
	τ	M	T^*	T^*	M	4
$\bar\tau$	M	T^*	M	T^*	M	0
	$\bar\tau$	T	T	M	M	
$\bar\tau$	M	M	M	T	T^*	0
	τ	T^*	M	T^*	M	4
$\bar\tau$	M	T	M	T^*	M	0
	$\bar\tau$	T	T^*	M	M	
		τ	T^*	M	T	5
	τ	M	T	M	T	5
τ	T^*	T^*	M	M	M	0
$\bar\tau$	M	T^*	M	M	T	0
	τ	T	M	M	T^*	5
τ	T	M	T^*	M	M	0
		$\bar\tau$	T^*	M	T^*	5
	τ	M	M	T	T	4
	τ	M	T^*	M	T^*	5
	$\bar\tau$	M	T^*	T	M	4
τ	M	M	T^*	T	M	0
$\bar\tau$	M	M	T	M	T^*	0
11	13	13	12	11	12	
	10	8	9	**5**	7	
	6	6	7		**5**	
	3	3	3			

Таблица 6

2	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$			3
2	5	T^*	T^*	4	$\mathbf{T}^*$		2	
		1	4	T^*	T^*	1		
0	4	5	1	2	3	•		
0	1	2	3	4	5	$\bar{/}$		
	τ	T	M	T^*	M	4	1^*	–
τ	M	T	T^*	M	M		3	**3**
$\bar\tau$	T	M	M	T	M		4	**4**
			τ	T^*	T^*	5	**5**	**5**
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	M	M		2	1
	τ	M	T^*	M	T^*	5	**5**	**5**
$\bar\tau$	T^*	M	M	T^*	M	4	1	1
			$\bar\tau$	T	T	3^*	–	–
$\bar\tau$	T	T^*	M	M	M		2	0^*
	τ	M	T^*	T^*	M	4	3	**3**
$\bar\tau$	T^*	M	M	T	M		4	**4**
			$\bar\tau$	T	T^*	5	**5**	**5**
		$\bar\tau$	M	T^*	T^*	5	**5**	**5**
		$\bar\tau$	T^*	M	T	2^*	–	–
τ	M	M	T^*	T^*	M	4	3	**3**
$\bar\tau$	M	T	M	T^*	M	4	0^*	–
		τ	T^*	T	M	2^*	–	–
τ	M	M	T	M	T^*	5	**5**	**5**
		τ	M	T	T^*	5	**5**	**5**
	$\bar\tau$	T	T^*	M	M		3	**3**
		τ	T^*	M	T^*	5	**5**	**5**
	$\bar\tau$	M	T	M	T^*	5	**5**	**5**
τ	T	M	M	M	T^*	5	**5**	**5**
$\bar\tau$	M	T^*	M	M	T		2	
		$\bar\tau$	T^*	T^*	T		3	**3**
		τ	T^*	T	T^*		5	**5**
				$\bar\tau$	T		4^*	$\mathbf{4}^*$
$\bar\tau$	M	T	T^*	T^*	T			3
$\bar\tau$	M	T	M	T^*	T^*			5
		$\bar\tau$	T	T^*	T			2^*
	τ	T	T^*	T^*	T			3
	τ	T	M	T^*	T^*			5

Таблица 7

	1	5	4	T^*	4			6
1	5	4	4	**4**	$\mathbf{T}^*$		5	
2	4	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$	4		
0	4	5	1	2	3	•		
0	1	2	3	4	5	$\bar{/}$		
τ	M	T	T^*	M	M	**3**	2	
$\bar\tau$	T	M	M	T	M	**4**	**4**	
			τ	T^*	T^*	**5**	**5**	4
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	M	M	0^*	—	—
	τ	M	T^*	M	T^*	**5**	**5**	1^*
$\bar\tau$	T^*	M	M	T^*	M		1	4
	τ	M	T^*	T^*	M	**3**	1^*	—
$\bar\tau$	T^*	M	M	T	M	**4**	**4**	
			$\bar\tau$	T	T^*	**5**	**5**	3^*
		$\bar\tau$	M	T^*	T^*	**5**	**5**	4
τ	M	M	T^*	T^*	M	**3**	0^*	—
τ	M	M	T	M	T^*	**5**	**5**	3
		τ	M	T	T^*	**5**	**5**	2
	$\bar\tau$	T	T^*	M	M	**3**	2	1^*
		τ	T^*	M	T^*	**5**	**5**	2
	$\bar\tau$	M	T	M	T^*	**5**	**5**	3
τ	T	M	M	M	T^*	**5**	**5**	
$\bar\tau$	M	T^*	M	M	T			5
		$\bar\tau$	T^*	T^*	T	**3**	2^*	—
		τ	T^*	T	T^*	**5**	**5**	2^*
				$\bar\tau$	T	$\mathbf{4}^*$	$\mathbf{4}^*$	—
$\bar\tau$	M	T	T^*	T^*	T	**3**	2	5
$\bar\tau$	M	T	M	T^*	T^*	**5**	**5**	4
		$\bar\tau$	T	T^*	T	$\mathbf{2}^*$	—	—
	τ	T	T^*	T^*	T	**3**	2	5
	τ	T	M	T^*	T^*	**5**	**5**	4
	$\bar\tau$	T^*	T	T^*	T	1^*	—	—
$\bar\tau$	T	T^*	T^*	T^*	T	3	0^*	—
$\bar\tau$	T	T^*	M	T	T	4	**4**	5
$\bar\tau$	T	T^*	M	M	T	5	**5**	2
$\bar\tau$	T^*	T^*	T^*	T^*	T		1	5
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	T	T		4	5
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	M	T^*		5	5
			$\bar\tau$	T^*	T		3^*	—
τ	M	T	T^*	T^*	T			5
$\bar\tau$	M	M	T^*	T^*	T^*			4
	τ	M	T^*	T^*	T^*			4
					$\bar\tau$			5^*

Таблица 8

1	4	4	5	4	**4**	7
0	4	5	1	2	3	•
0	1	2	3	4	5	$\bar{/}$
τ	M	T	T^*	M	M	3
$\bar\tau$	T	M	M	T	M	4
			τ	T^*	T^*	3^*
$\bar\tau$	T^*	M	M	T^*	M	0^*
$\bar\tau$	T^*	M	M	T	M	4
		$\bar\tau$	M	T^*	T^*	2^*
τ	M	M	T	M	T^*	0^*
		τ	M	T	T^*	4
		τ	T^*	M	T^*	3
	$\bar\tau$	M	T	M	T^*	1^*
τ	T	M	M	M	T^*	1
$\bar\tau$	M	T^*	M	M	T	**5**
$\bar\tau$	M	T	T^*	T^*	T	**5**
$\bar\tau$	M	T	M	T^*	T^*	2
	τ	T	T^*	T^*	T	**5**
	τ	T	M	T^*	T^*	2
τ	T	T^*	M	T	T	**5**
$\bar\tau$	T	T^*	M	M	T^*	1
$\bar\tau$	T^*	T^*	T^*	T^*	T	**5**
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	T	T	**5**
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	M	T	**5**
τ	M	T	T^*	T^*	T	**5**
τ	M	M	T^*	T^*	T^*	3
	τ	M	T^*	T^*	T^*	3
					$\bar\tau$	$\mathbf{5}^*$
	$\bar\tau$	T	T^*	M	T	3
	τ	$\bar{T}^*$	T^*	T^*	T^*	3
				$\bar\tau$	T^*	4^*

$$4^{I})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_1\ T^*\ T\ T^*\ T \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}_1\ T^*\ T\ T^*\ T \,\rangle \\ \hline \langle\quad \tau_2\ T\ T^*\ T \,\rangle\,, \end{array} \qquad 4^{II})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_2\ T\ T^*\ T \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}_2\ T\ T^*\ T \,\rangle \\ \hline \langle\quad \bar{\tau}\ T^*\ T \,\rangle\,; \end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau\ M\ M\ T^*\ T^*\ M \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}\ T\ T^*\ T^*\ T^*\ T \,\rangle \\ \hline \langle\, \tau\ \bar{I}^*\ L\ T^*\ T^*\ R \,\rangle \end{array} = \langle \tau M T T^* T^* T\rangle \,\bar{/}\, \langle \tau \bar{T}^* T^* T^* T^* T\rangle \,\bar{/}\, \langle \tau M M T^* T^* T^*\rangle,$$

$$5^{I})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau\ \bar{T}^*\ T^*\ T^*\ T^*\ T \,\rangle \\ \langle\quad \tau_1\ M\ T^*\ T^*\ M \,\rangle \\ \hline \langle\, E\ \bar{P}^*\ L^*\ T^*\ T^*\ R^* \,\rangle \end{array} = \langle\, \tau_1\, \bar{T}\, T^*\, T^*\, T^*\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_1\, M\, T^*\, T^*\, T^* \,\rangle,$$

$$5^{II})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_1\ \bar{T}\ T^*\ T^*\ T \,\rangle \\ \langle\quad \bar{\tau}_2\ T^*\ T^*\ T \,\rangle \\ \hline \langle\qquad \tau_3\ T^*\ T \,\rangle\,, \end{array} \qquad 5^{III})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_3\ T^*\ T \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}_3\ T^*\ T \,\rangle \\ \hline \langle\quad \tau_4\ T \,\rangle\,, \end{array} \qquad 5^{IV})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_4\ T \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}_4\ T \,\rangle \\ \hline \langle\quad \bar{\tau}_5 \,\rangle\,; \end{array}$$

$$6)\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_1\ M\ T^*\ M\ T^* \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}_1\ T\ T^*\ M\ M \,\rangle \\ \hline \langle\, \tau_1\ \bar{I}\ T^*\ M\ L^* \,\rangle \end{array} = \langle\, \bar{\tau}_1\, T\, T^*\, M\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau_1\, \bar{T}^*\, T^*\, M\, T^* \,\rangle,$$

$$6^{I})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_1\ \bar{T}^*\ T^*\ M\ T^* \,\rangle \\ \langle\quad \tau_2\ T^*\ T\ T^* \,\rangle \\ \hline \langle\, E\ \bar{P}^*\ T^*\ R\ T^* \,\rangle \end{array} = \langle \tau_3 T T^*\rangle \,\bar{/}\, \langle \tau_1 \bar{T}^* T^* T^* T^* \,\rangle, \qquad 6^{II})\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_3\ T\ T^* \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau}_3\ T\ T^* \,\rangle \\ \hline \langle\quad \bar{\tau}_4\ T^* \,\rangle\,. \end{array}$$

7.1.7 Преобразование в $\bar{/}$–юнкции пары согласованных операторов в пару несогласованных операторов.

Самым большим недостатком в решении предыдущей задачи является большое число (когда оно больше **2**) операторов в процессе рассогласования. Однако это может рассматриваться как плохое использование хорошей идеи: из этого большого числа, как легко увидеть, активно используется лишь *один* оператор, а остальные могут потребоваться лишь в дальнейшем.

Из сказанного следует, что из свёртки нужно выделить лишь один оператор, который в конъюнкции со свёрткой и даёт эту свёртку. Таким образом, конъюнкция двух операторов преобразуется в конъюнкцию двух операторов.

Например. Первый вариант *таблицы* **6** в преобразовании согласованных операторов с *исходом* **1** должны быть записаны так:

$$1)\qquad \begin{array}{c} \langle\, \bar\tau_2\; T^*\;\; M\;\;\; T\,\rangle \\ \langle\, \tau_2\; T^*\;\; T\;\;\; M\,\rangle \\ \hline \langle\, O\; T^*\;\; R\;\; R^*\,\rangle \end{array}\;\; \overline{/}\;\; \langle\, \tau_3\, T\, T\,\rangle,$$

а второй вариант *таблицы* **6** — записан так:

$$2)\qquad \begin{array}{c} \langle\, \tau\;\; T\;\; T\;\; T\;\; T^*\;\;\; T\,\rangle \\ \langle\, \bar\tau\;\; M\;\; T\;\; M\;\; T^*\;\; M\,\rangle \\ \hline \langle\, \bar\tau\;\; \bar I^*\;\; T\;\; R^*\; T^*\;\; R^*\,\rangle \end{array}\;\; \overline{/}\;\; \langle\, \bar\tau\, \bar T^*\, T\, T\, T^*\, T\,\rangle.$$

Чтобы использовать эту идею в решении задач, нужно ответить на два вопроса: **1)** Каким образом выполнить условное исключение оператора, содержащего копродукции и комбинаторы ? **2)** Как построить именно тот оператор, который должен быть выделен ?

Поскольку оператор, содержащий копродукции и комбинаторы всегда может рассматриваться как $\overline{/}$–юнкция двух операторов, осуществляемая поразрядно, где первый записан в верхней строке, а второй — в нижней строке, то условное исключение такого оператора указателем a для верхней строки имеет записи a', а для нижней — $a.$. Полное условное исключение означает, что против оператора в служебной строке имеется запись: $a\,.\,b$ или $a'\,b$, означающие соответственно: указателем a исключена нижняя строка и указателем b — верхняя; указателем a исключена верхняя строка, а указателем b — нижняя. Пока указан лишь один из указателей, оператор, содержащий копродукции и комбинаторы, не исключён и продолжает подвергаться анализу.

Далее, пусть анализируется столбец с номером a (это номер столбца, указанный в **I** служебной строке). Пусть в **III** служебной строке столбца a занесён один из указателей: T, 4. Тогда в служебный столбец против оператора, имеющего в столбце a комбинатор или копродукцию из списка

$$\{\, R^*,\ \bar{I}^*,\ \bar{E},\ P,\ O,\ \bar{N}\,\}, \tag{7.12}$$

заносится указатель a', а из списка

$$\{\, R,\ \bar{I},\ \bar{E}^*,\ P^*,\ O^*,\ \bar{N}^*\,\}, \tag{7.13}$$

заносится указатель $a.$. Если в **III** служебной строке столбца a занесён один из указателей: T^*, 5, то в служебный столбец против оператора, имеющего в столбце a комбинатор или копродукцию из списка

$$\{\, L^*,\ I^*,\ E,\ \bar{P},\ O^*,\ N\,\}, \tag{7.14}$$

заносится указатель a', а из списка

$$\{\, L,\ I,\ E^*,\ \bar{P}^*,\ O,\ N^*\,\}, \tag{7.15}$$

заносится указатель $a.$.

Замечание 6. Поскольку при анализе в случае выхода на *исход* **6 б)** рекомендовано выбирать указатель T или T^*, имеющий большее вхождение в ведущем столбце, то при подсчёте вхождений этих продукций следует считать и комбинаторы и копродукции ведущего столбца (таблицы или подтаблицы), относя к T комбинаторы и копродукции из списков **(7.12)** и **(7.13)**, а к T^* — из списков **(7.14)** и **(7.15)**.

Замечание 7. Поскольку копродукции являются синонимами для продукций $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$, то именно эти продукции и должны учитываться при анализе исходов, когда в ведущем столбце имеются копродукции. Кроме того, достижение начала операторов в случае выходов на O, O^* или $[E]$ не должно упускаться из внимания.

Теперь ответим на *второй* из сформулированных выше вопросов. Начнём с примера. Пусть в **III** служебной строке имеются указатели: $4\,4\,T^*$, в соответствии с которыми необходимо построить нам оператор, выделив его из свёртки: $\langle\, O\,T^*\,R\,R^*\,\rangle$. Поскольку на свёртку можно смотреть как на

$$\langle\, \gamma_2\, R^*\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_2\, \alpha_2\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_2\, T\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \alpha_2\, T^*\,\rangle.$$

Второй из операторов этой $\bar{/}$–юнкции условно исключается указателем T^*. Значит

$$\langle\, \gamma_2\,\rangle \;=\; \langle\, O\,T^*\,R\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_1\, R\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_1\, \alpha_1\,\rangle \;=\; \langle\, \gamma_1\, T\,\rangle\, \bar{/}\, \langle\, \alpha_1\, T^*\,\rangle.$$

Теперь *указателем* **4** исключается первый оператор $\overline{/}$–юнкции. Значит, искомый оператор равен

$$\langle\, \alpha_1 T^* T \,\rangle \;=\; \langle\, \bar{\tau}\, T^* T^* T \,\rangle.$$

Заметим при этом, что наша свёртка имеет развёртку:

$$\langle\, O\, T^*\, R\, R^* \,\rangle \;=\; \langle\, \tau_1 T\, T \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, T^* T^* T \,\rangle \,\overline{/}\, \langle\, \tau\, T^* T\, T^* \,\rangle,$$

но, как мы видим, выстраивать всю развёртку нет никакой необходимости.

Из этого примера видно, что на самом деле, при постройке искомого оператора следует, используя справа налево в операторе свёртки комбинаторы, выполнять развёртку в виде $\overline{/}$–юнкции двух операторов по формулам **(7.6)** — **(7.9)**. Затем, используя соответствующий указатель из **III** служебной строки, оставить лишь один из операторов конъюнкции. Продолжая этот процесс, мы либо построим искомый оператор, либо придём к выводу, что такого оператора нет. Например, если бы по указанной выше свёртке строить оператор, используя указатели $5\,4\,T^*$, то пришли бы к выводу, что такого оператора нет.

А теперь выполним выкладки, приведённые в *таблицах* **6** — **8**, в свете сказанного выше, то есть без увеличения памяти под исходную таблицу, так как вписываемых операторов в таблицу (при решении задачи **ВЫП**) будет не больше числа безусловно исключаемых.

Итак, желаемые преобразования представлены в *таблицах* **9** и **10**. Они, учитывая предыдущие пояснения, должны быть понятны. Единственное, что, быть может, требуется — это следующие выкладки.

$$1)\quad \begin{array}{l} \langle\, \bar{\tau}_2\; T^*\; M\;\; T \,\rangle \\ \underline{\langle\, \tau_2\; T^*\; T\;\; M \,\rangle} \\ \langle\, O\; T^*\; R\; R^* \,\rangle \end{array} \;\overline{/}\; \langle\, \tau_3 T\, T \,\rangle, \qquad 1^I)\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau_3\; T\; T \,\rangle \\ \underline{\langle\, \bar{\tau}_3\; T\; T \,\rangle} \\ \langle\;\;\; \bar{\tau}_4\; T \,\rangle \end{array} ;$$

$$2)\quad \begin{array}{l} \langle\, \tau\;\; T\;\; T\;\; T\;\; T^*\;\; T \,\rangle \\ \underline{\langle\, \bar{\tau}\; M\; T\; M\; T^*\; M \,\rangle} \\ \langle\, \bar{\tau}\;\; \bar{I}^*\; T\; R^*\; T^*\; R^* \,\rangle \end{array} \;\overline{/}\; \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}^*\, T\, T\, T^*\, T \,\rangle,$$

$$2^I)\quad \begin{array}{l} \langle\, \bar{\tau}\;\; \bar{T}^*\; T\;\; T\;\; T^*\;\; T \,\rangle \\ \underline{\langle\;\;\;\; \tau\;\; T\; M\; T^*\; M \,\rangle} \\ \langle\, \bar{E}\;\; \bar{P}^*\; T\; R^*\; T^*\; R^* \,\rangle \end{array} \;\overline{/}\; \langle\, \bar{\tau}_2 T\, T^*\, T \,\rangle;$$

Таблица 9

2	4	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$				4
2	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$			3	
2	5	T^*	T^*	4	$\mathbf{T}^*$		2		
		1	4	T^*	T^*	1			
0	4	5	1	2	3	•			
0	1	2	3	4	5	$\bar{/}$			
	τ	T	M	T^*	M	4	1^*	—	—
τ	M	T	T^*	M	M		3	**3**	**3**
$\bar\tau$	T	M	M	T	M		4	**4**	**4**
			τ	T^*	T^*	5	**5**	**5**	**5**
$\bar\tau$	T^*	T^*	M	M	M		2	1	0^*
	τ	M	T^*	M	T^*	5	**5**	**5**	**5**
$\bar\tau$	T^*	M	M	T^*	M	4	1	1	
			$\bar\tau$	T	T	3^*	—	—	—
$\bar\tau$	T	T^*	M	M	M		2	0^*	—
	τ	M	T^*	T^*	M	4	3	**3**	**3**
$\bar\tau$	T^*	M	M	T	M		1	1	
			$\bar\tau$	T	T^*	5	**5**	**5**	**5**
		$\bar\tau$	M	T^*	T^*	5	**5**	**5**	**5**
		$\bar\tau$	T^*	M	T	2^*	—	—	—
τ	M	M	T^*	T^*	M	4	3	**3**	**3**
$\bar\tau$	M	T	M	T^*	M	4	0^*	—	—
		τ	T^*	T	M	2^*	—	—	—
τ	M	M	T	M	T^*	5	**5**	**5**	**5**
		τ	M	T	T^*	5	**5**	**5**	**5**
	$\bar\tau$	T	T^*	M	M		3	**3**	**3**
		τ	T^*	M	T^*	5	**5**	**5**	**5**
	$\bar\tau$	M	T	M	T^*	5	**5**	**5**	**5**
τ	T	M	M	M	T^*	5	**5**	**5**	**5**
$\bar\tau$	M	T^*	M	M	T		2		
		O	T^*	R	R^*		4.3	**4 . 3**	**4 . 3**
				$\bar\tau$	T		4^*	$\mathbf{4}^*$	$\mathbf{4}^*$
$\bar\tau$	$\bar{I}^*$	T	R^*	T^*	R^*			2	**2**
$\bar{E}$	$\bar{P}^*$	T	R^*	T^*	R^*			2	**2**
		$\bar\tau$	T	T^*	T			2^*	$\mathbf{2}^*$
O^*	T	T^*	R^*	L^*	R^*				1
	$\bar\tau$	T^*	T	T^*	T				1^*

Таблица 10

1	4	4	5	4	**4**			7
	1	5	4	T^*	4		6	
	5	4	4	**4**	$\mathbf{T}^*$	5		
0	4	5	1	2	3	•		
0	1	2	3	4	5	$\bar{/}$		
τ	M	T	T^*	M	M	2		**3**
$\bar{\tau}$	T	M	M	T	M			4
			τ	T^*	T^*	**5**	4	3^*
	τ	M	T^*	M	T^*	**5**	1^*	–
$\bar{\tau}$	T^*	M	M	T^*	M	1	4	0^*
	τ	M	T^*	T^*	M	1^*	4	3
$\bar{\tau}$	T^*	M	M	T	M	**4**		4
			$\bar{\tau}$	T	T^*	**5**	3^*	–
		$\bar{\tau}$	M	T^*	T^*	**5**	4	2^*
τ	M	M	T^*	T^*	M	0^*	–	–
τ	M	M	T	M	T^*	**5**	3	0^*
		τ	M	T	T^*	**5**		4
	$\bar{\tau}$	T	T^*	M	M	2	1^*	–
		τ	T^*	M	T^*	**5**		3
	$\bar{\tau}$	M	T	M	T^*	**5**	3	1^*
τ	T	M	M	M	T^*	**5**		1
$\bar{\tau}$	M	T^*	M	M	T	0^*	–	–
		O	T^*	R	R^*	**4** . 2^*	–	–
				$\bar{\tau}$	T	$\mathbf{4}^*$	–	–
$\bar{\tau}$	$\bar{I}^*$	T	R^*	T^*	R^*	3′2	5′4	**5** ′2
$\bar{E}$	$\bar{P}^*$	T	R^*	T^*	R^*	3′2	5′4	**5** ′2
O^*	T	T^*	R^*	L^*	R^*	3′	5′2	**5** ′1
O^*	T^*	T^*	R^*	L^*	R^*	3′1	5′2	**5** ′
			$\bar{\tau}$	T^*	T	3^*	–	–
τ	M	I	L^*	L^*	R		5 .	**5** .3
		τ	T^*	T	T^*		2^*	–
					$\bar{\tau}$		5^*	$\mathbf{5}^*$
	$\bar{\tau}$	T	T^*	M	T			5
	τ	$\bar{T}^*$	T^*	T^*	T^*			3
				$\bar{\tau}$	T^*			4^*

$$3)\quad \begin{array}{cccccc} \langle\ \tau & T & T^* & T & T^* & T\,\rangle \\ \langle\ \bar\tau & T & T^* & M & M & M\,\rangle \\ \hline \langle\, O^* & T & T^* & R^* & L^* & R^*\rangle \end{array}\ \ \bar{/}\ \ \langle\, \bar\tau_1\, T^*\, T\, T^*\, T\,\rangle;$$

$$4)\quad \begin{array}{cccccc} \langle\ \tau & T^* & T^* & T & T^* & T\,\rangle \\ \langle\ \bar\tau & T^* & T^* & M & M & M\,\rangle \\ \hline \langle\, O^* & T^* & T^* & R^* & L^* & R^*\rangle \end{array}\ \ \bar{/}\ \ \langle\, \tau_1\, T^*\, T\, T^*\, T\,\rangle,$$

$$4^{I})\quad \begin{array}{ccccc} \langle\,\tau_1 & T^* & T & T^* & T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_1 & T^* & T & T^* & T\,\rangle \\ \hline \langle & \tau_2 & T & T^* & T\,\rangle \end{array}, \qquad 4^{II})\quad \begin{array}{cccc} \langle\,\tau_2 & T & T^* & T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_2 & T & T^* & T\,\rangle \\ \hline \langle & \bar\tau_3 & T^* & T\,\rangle \end{array};$$

$$5)\quad \begin{array}{cccccc} \langle\,\tau & M & M & T^* & T^* & M\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau & M & T^* & M & M & T\,\rangle \\ \hline \langle\,\tau & M & I & L^* & L^* & R\,\rangle \end{array}\ \ \bar{/}\ \ \langle\,\tau\, M\, \bar T\, T^*\, T^*\, T\,\rangle, \qquad 5^{I})\quad \begin{array}{cccccc} \langle\,\tau & M & \bar T & T^* & T^* & T\,\rangle \\ \langle & & \bar\tau_2 & T^* & T^* & T\,\rangle \\ \hline \langle & & & \tau_3 & T^* & T\,\rangle \end{array},$$

$$5^{II})\quad \begin{array}{ccc} \langle\,\tau_3 & T^* & T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_3 & T^* & T\,\rangle \\ \hline \langle & \tau_4 & T\,\rangle \end{array}, \qquad 5^{III})\quad \begin{array}{cc} \langle\,\tau_4 & T\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_4 & T\,\rangle \\ \hline \langle & \bar\tau_5\,\rangle \end{array};$$

$$6)\quad \begin{array}{ccccc} \langle\,\tau_1 & M & T^* & M & T^*\,\rangle \\ \langle\,\bar\tau_1 & T & T^* & M & M\,\rangle \\ \hline \langle\,\tau_1 & \bar I & T^* & M & L^*\,\rangle \end{array}\ = \ \langle\,\bar\tau_1\, T\, T^*\, M\, T\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\tau_1\, \bar T^*\, T^*\, M\, T^*\,\rangle,$$

$$6^{I})\quad \begin{array}{ccccc} \langle\,\tau_1 & \bar T^* & T^* & M & T^*\,\rangle \\ \langle & \tau_2 & T^* & T & T^*\,\rangle \\ \hline \langle\,\tau_1 & \bar P^* & T^* & R & T^*\,\rangle \end{array}\ = \ \langle\,\tau_3\, T\, T^*\,\rangle\,\bar{/}\,\langle\,\tau_1\, \bar T^*\, T^*\, T^*\, T^*\,\rangle,$$

$$
\begin{array}{ll}
6^{II}) & \langle\, \tau_3 \;\; T \;\; T^* \,\rangle \\
 & \langle\, \bar{\tau}_3 \;\; T \;\; T^* \,\rangle \\
\hline
 & \langle\, \quad\;\; \bar{\tau}_4 \;\; T^* \,\rangle\, .
\end{array}
$$

Замечание 8. Может создаться впечатление, что на самом деле увеличение таблицы происходит: по *таблице* **9** видно, что во втором варианте происходит безусловное исключение **двух** операторов, а вписываются **три**. Но **1)** у нас выше шла речь о том, что при решении **задачи ВЫП** *таблица* не увеличивается, а о **задаче ВЫП** с **ПП** ничего не было сказано; **2)** на самом деле и в случае **ВЫП** с **ПП** можно не допускать увеличение *таблицы*, так как последний оператор такого пополнения (точнее, тот. который записан без комбинаторов) может быть свёрнут в *один* оператор с любым согласованным с ним оператором исходной таблицы.

Замечание 9. Пополнение *таблицы* вписываемыми операторами всегда в конце содержит один оператор, свободный от комбинаторов. Над такими операторами двух последовательных пополнений следует выполнить конъюнкцию.

Большая часть изложенного выше (в этой главе) имело иллюстрационный характер. Если некоторые положения могут показаться недостаточно строгими, то это не должно доставлять никаких беспокойств, поскольку в дальнейшем изложении они приобретут нужную степень строгости. До того, как будут получены соответствующие обоснования, можно попытаться самостоятельно снять возникающие сомнения. Однако, если это даже не удастся, тем не менее, можно продолжать чтение и разбор последующего материала.

7.2 Минимальная расширенная система в методе решения задачи ВЫП

Задача ВЫП формулируется в системе продукций Q_3, в которой и выполняется приведение таблицы этой задачи. Однако в рассмотренном нами методе решения **задачи ВЫП** рассуждения велись в довольно общей системе продукций

$$Q_2 \cup K_k \cup Q_k,$$

что, конечно, допустимо, но вряд ли нужно в том случае, когда нас интересует не только метод решения **задачи ВЫП**, но и эффективность применяемого метода.

Результаты **п. 5.5.1** показывают, что в решении **задачи ВЫП** можно ограничиться минимальной расширенной системой продукций

$$Q_3' = \{\, Q_3,\, [\, I\,],\, O,\, O^*,\, K_k \,\} = \{\, T,\, T^*,\, M,\, I,\, I^*,\, \bar{I},\, \bar{I}^*,\, O,\, O^*,\, R,\, R^*,\, L,\, L^* \,\}.$$

А это значит, что метод, изложенный в **п. 7.1** должен быть повторно рассмотрен в системе Q_3' с целью упрощения не только его изложения, но и с целью такой его модификации, которая приводила бы к более эффектной процедуре.

7.2.1 Анализ таблицы задачи ВЫП в системе Q_3'.

Сущность анализа с выделением ведущего столбца такова же, что и в **п. 7.1.1** и перечень из *шести* возможных исходов сохраняется, но из самого перечня исключено то, что связано с упоминанием о продукциях $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$. Таким образом, проверка должна осуществляться в указанной ниже последовательности до **первого** ответа **"да"** на вопросы:

содержится ли в ведущем столбце с номером k

1) хотя бы по одной клетке с τ и $\bar{\tau}$;

2) только клетки с

а) $\bar{\tau}$ и T;

б) T;

3) только клетки с

а) τ и T^*;

б) T^*;

4) хотя бы одна клетка с $\bar{\tau}$, но имеются клетки с T^* или (и) M;

5) хотя бы одна клетка с τ, но имеются клетки с T или (и) M;

6) в клетках

а) имеются только продукции M;

б) не имеет место ни один из предыдущих исходов и подисходов.

Замечание 10. Ничего не говорится о продукциях T в *исходе* **4** и о продукциях T^* в *исходе* **5**. Это означает, что указанные продукции на эти исходы не влияют.

Все остальное из **п. 7.1.1** сохраняет свою силу, кроме *замечания* **2**, которое должно быть заменено на нижеследующее.

Замечание 11. В перечне исходов, *исходы* **2** и **3** имеют литеры **а** и **б**. В *третьей* служебной строке указывается исход **2** или **3** лишь тогда, когда исходы имеют литеры **а**, но в тех случаях, когда эти исходы имеют литеры **б**, то должны быть указаны t^* и t для **2б** и **3б** соответственно. При этом никаких строк из таблицы не исключается, то есть в служебный столбец указателей не заносится.

7.2.2 Решение задачи ВЫП методом анализа таблицы.

Предлагаемое ниже решение **задачи ВЫП** по своей сути очень простое (оно не требует преобразований) и основано лишь на анализе таблицы **задачи ВЫП**, позволяющем распознать решение (если оно есть) или заключить, что его нет, но этот анализ является многопроходным и поэтому его эффективность здесь рассматриваться не будет.

Итак, как уже сказано в анализе (см. **п. 2.1**), его следует начать с самого *правого* столбца с номером $n-1$, продвигаясь от столбца к столбцу справа налево, и закончить (или прерваться) по достижению столбца с номером *исхода* **2** или **3** (см. *замечание* **11**), означающим выполнимость решаемой задачи. В случае выхода на *исход* **1**, в этом методе осуществляется переход на столбец правее того, в котором имелся *исход* **1**.

Теперь требуются уточнения. Они касаются *исходов* **1**, **2**, **3**.

Если в столбце с номером r анализ привёл к *исходу* **1**, то в *третьей* служебной строке (правее r–го столбца) следует читать указатели, игнорируя указатели M, 4 и 5, то есть разыскивая один из указателей t, t^*, T, T^*. Если первый необходимый указатель в s–ом столбце есть t^* или t, то такой указатель заменяется на **2** или **3** соответственно, а сам случай свёлся к случаю выхода в третьей служебной строке в s–ом столбце на указатель **2** или **3**, который рассматривается ниже. Если же в s–ом столбце необходимый указатель оказался T или T^*, то он должен быть заменён на **5** или **4** соответственно. Затем стереть все указатели в третьей служебной строке левее s–го столбца и стереть в служебном столбце все указатели $\leq s$. Затем в служебный столбец занести указатели s, отвечающие указателям в третьей служебной строке, после чего анализ справа налево по столбцам должен быть продолжен.

Если же в третьей служебной строке в столбце с номером r анализ привёл к *исходу* **2** или **3**, то это значит, что имеется выполнимость. Выполняющие наборы или соответствующие операторы, по которым наборы выписываются просто, могут быть построены (о том, как это сделать, сказано ниже) и, если необходимо найти ещё решения (например, когда решается задача **ВЫП** с **ПП**), то следует поступить так. В третьей служебной строке правее r–го столбца следует читать указатели до первого указателя T или T^*. Пусть такой указатель оказался в s–ом столбце. Далее следует поступить так же, как об этом сказано в предыдущем абзаце, начиная с третьего предложения.

Замечание 12. В вышеприведённых рассуждениях предполагалось, что в третьей служебной строке в s–ом столбце прочитаем один из указателей T или T^*. А что, если чтение указателей достигло самого правого столбца, и всё же указатель T или T^*. не обнаружен ? Это значит, что решений больше нет.

Построение оператора выполняющих наборов. Выполняющие наборы выписываются по оператору выполняющих наборов, который раскрывается по *лемме* **2** и *теореме* **14** из **главы III**. Сам оператор строится по третьей служебной строке, которая начинается с указателя **2** или **3** и имеет указатели из списка: $M, T, T^*, 4, 5, t, t^*$. Построение происходит в результате выполнения замены указателей по следующему правилу подстановки:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & M & T & T^* & 4 & 5 & t & t^* \\ \bar{\tau} & \tau & M & \bar{T}^* & \bar{T} & \bar{T}^* & \bar{T} & T^* & T \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

Например. Пусть в *третьей* служебной строке имеем указатели:

			2	t	4	T^*	t^*	T	5

Используя подстановку **(7.16)**, получаем оператор выполняющих наборов:

$$\langle \bar{\tau}_3 T^* \bar{T}^* \bar{T} T \bar{T}^* \bar{T} \rangle.$$

Этот оператор является оператором логического выражения:

$$((x_3 \vee x_4) \& x_5 \& \bar{x}_6 \vee x_7) \& x_8 \& \bar{x}_9$$

в классической записи, а в используемой нами записи, предполагающей исполнение операций в порядке их следования, имеем:

$$x_3 \bar{\downarrow} x_4 \bar{/} x_5 \bar{/} \bar{x}_6 \bar{\downarrow} x_7 \bar{/} x_8 \bar{/} x_9.$$

Иллюстрационные примеры. Ниже, в **таблицах 11 — 15**, приведены примеры решения **задач ВЫП** с **ПП** методом анализа таблицы. Эти примеры достаточно простые, поэтому результаты решений могут быть проверены непосредственно. Единственное, на что следует обратить особое внимание — это на *первый* и *второй* варианты **третьей** служебной строки из *таблиц* **12** и **13** соответственно, поскольку в самих таблицах методика их формирования не достаточно хорошо отражена. В *таблице* **12 первый** вариант **третьей** служебной строки должен быть таким: $1\,t^*\,T^*\,T^*\,t^*$, а у нас он такой: $2\,T^*\,T^*\,t^*$, и это — результат корректировки, отражающий сказанное в алгоритме, что *первый* указатель, отличный от M, 4, 5 есть t^*, а поэтому заменяется на 2.

В **таблице 13** *второй* вариант **третьей** служебной строки должен быть такой: $1\,t\,T^*\,T\,T^*$, а он в таблице такой: $3\,T^*\,T\,T^*$, что тоже — результат корректировки.

В **таблицах 14 — 15** результаты корректировки отражены.

Операторы выполняющих наборов для **таблиц 11 — 15** представлены в **таблицах 16 — 20** соответственно.

Таблица 11

1	5	4	**4**	**4**					5
2	t^*	T^*	4	**4**				4	
	1	4	T^*	4			3		
1	5	5	4	$\mathbf{T}^*$		2			
	2	4	T^*	T^*	1				
0	1	2	3	4	$\bar{/}$				
		τ	T^*	T	3	2	4	**4**	**4**
		$\bar\tau$	T	T^*	4	**4**	2	3	**3**
		$\bar\tau$	T	T	2	3	4	**4**	**4**
	τ	M	T^*	T	3	1	4	**4**	**4**
	τ	T^*	M	T^*	4	**4**		2	1
	$\bar\tau$	T^*	T	M	1	3		3	**3**
$\bar\tau$	T	M	T^*	M	3		3		
τ	M	T^*	T^*	M	3	2	3	2	
τ	T	T^*	M	M	1	2		2	
τ	M	T	M	T	2		4	**4**	**4**

Таблица 12

2	t^*	t^*	4	$\mathbf{t}^*$			3
3	t^*	T	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{t}^*$		2	
	2	T^*	T^*	t^*	1		
0	1	2	3	4	$\bar{/}$		
τ	T	M	T	T		0	3
$\bar\tau$	T	T	M	T		2	0

Таблица 13

2	t	t^*	M	4				4
3	t	4	$\mathbf{4}^*$	$\mathbf{T}^*$			3	
	3	T^*	4	$\mathbf{T}^*$		2		
2	t	t^*	T^*	T^*	1			
0	1	2	3	4	$\bar{/}$			
τ	T^*	M	T^*	T	3		0	4
$\bar\tau$	T^*	T	M	M	0		2	0

Таблица 14

2	M	t	4	**4**				4
		3	$\mathbf{T}^*$	**4**			$\bullet$	
1	M	t	T^*	4			3	
2	5	t	4	$\mathbf{T}^*$		2		
		3	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	$\bullet$			
1	5	t	T^*	T^*	1			
0	1	2	3	4	$\bar{/}$			
	τ	T^*	M	T	1	1	4	**4**
$\bar{\tau}$	M	T^*	M	M		0		0
τ	M	T^*	T	M		3		3

Таблица 15

2	t	t^*	4	**4**				4
		2	$\mathbf{T}^*$	**4**			$\bullet$	
1	4	$\mathbf{t}^*$	$\mathbf{T}^*$	**4**			3	
3	T^*	t^*	T^*	4		2		
2	t	t^*	M	T^*	1			
0	1	2	3	4	$\bar{/}$			
$\bar{\tau}$	T^*	T	M	M	0	1		0
τ	M	T	T	T^*	4	0		3

Таблица 16

0	1	2	3	4
	$\bar{\tau}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	$\bar{T}$
$\bar{\tau}$	T	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$

Таблица 17

0	1	2	3	4
$\bar{\tau}$	T	T	$\bar{T}^*$	T
τ	T	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	T
	$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	T

Таблица 18

0	1	2	3	4
$\bar{\tau}$	T^*	T	M	$\bar{T}^*$
τ	T^*	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$
	τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$
$\bar{\tau}$	T^*	T	$\bar{T}$	$\bar{T}$

Таблица 19

0	1	2	3	4
		τ	$\bar{T}$	$\bar{T}$
$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	T^*	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$
		τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$
$\bar{\tau}$	M	T^*	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$

Таблица 20

0	1	2	3	4
$\bar{\tau}$	T^*	T	M	$\bar{T}$
τ	$\bar{T}$	T	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$
		$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$
$\bar{\tau}$	T^*	T	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$

Напоминаем, что двойная черта с левой стороны **таблиц 16 — 20** говорит о том, что операторы соединены знаком дизъюнкции.

7.2.3 Обоснование решения задачи ВЫП методом анализа таблицы.

Распознавание решения (когда оно есть) или вывод о противоречивости исследуемой таблицы основаны в этом методе на достаточно простых соображениях, отражённых в анализе с выделением исходов и подисходов.

Операторы таблицы по анализируемому столбцу с номером $j + 1$ могут быть выписаны и представлены в наиболее общем виде так:

$$
\begin{aligned}
&\langle \alpha_j^1 T \rangle \bar{/} \langle \alpha_j^2 T \rangle \bar{/} \;\ldots\; \bar{/} \langle \alpha_j^r T \rangle \bar{/} \\
\bar{/}\;\; &\langle \beta_j^1 T^* \rangle \bar{/} \langle \beta_j^2 T^* \rangle \bar{/} \;\ldots\; \bar{/} \langle \beta_j^s T \rangle \bar{/} \\
\bar{/}\;\; &\langle \delta_j^1 M \rangle \bar{/} \langle \delta_j^2 M \rangle \bar{/} \;\ldots\; \bar{/} \langle \delta_j^q M \rangle = \\
&= \langle \alpha_j T \rangle \;\bar{/}\; \langle \beta_j T^* \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j M \rangle,
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\langle \alpha_j \rangle &= \langle \alpha_j^1 \rangle \;\bar{/}\; \langle \alpha_j^2 \rangle \;\bar{/}\; \ldots \;\bar{/}\; \langle \alpha_j^r \rangle, \\
\langle \beta_j \rangle &= \langle \beta_j^1 \rangle \;\bar{/}\; \langle \beta_j^2 \rangle \;\bar{/}\; \ldots \;\bar{/}\; \langle \beta_j^s \rangle, \\
\langle \delta_j \rangle &= \langle \delta_j^1 \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j^2 \rangle \;\bar{/}\; \ldots \;\bar{/}\; \langle \delta_j^q \rangle
\end{aligned}
\right\}.
\tag{7.18}
$$

Теперь воспользуемся формулой **(4.9)**, а затем формулами **(4.2)** и **(4.2*)**, что позволит выражению **(7.17)** придать следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\langle \alpha_j T \rangle \;\bar{/}\; \langle \beta_j T^* \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j M \rangle = \\
&= (\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle \beta_j \bar{T}^* \rangle) \;\bar{/}\; \langle \delta_j M \rangle = \\
&= (\langle \alpha_j \bar{T} \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j M \rangle) \bar{\downarrow} (\langle \beta_j \bar{T}^* \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j M \rangle) = \\
&= \langle (\langle \alpha_j \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j \rangle) \bar{T} \rangle \bar{\downarrow} \langle ((\langle \beta_j \rangle \;\bar{/}\; \langle \delta_j \rangle) \bar{T}^* \rangle.
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

А сейчас остановимся на указателях *третьей* служебной строки в случаях *исходов* **4, 5** и **6б**. Как уже принято в анализе (см. **2.1**), в случае *исхода* **6б** выбор указателя T или T^* в *третьей* служебной строке, вообще говоря, является произвольным.

Замечание 13. Выбор T^* (или T) говорит о том, что идёт розыск решения из верхней (или нижней) половины таблицы. Иными словами, если хотим найти первый сверху вниз выполняющий набор, то он будет содержаться в выполняющем операторе, полученном в результате того, что всегда, когда имелся выбор между T и T^*, приоритет отдавался указателю T^*.

Выбор указателя говорит о том, какую из половин той подтаблицы, к которой пришли в анализируемом $(j + 1)$–ом столбце, мы выбрали. Когда же возвращаемся (слева направо) вновь на столбец $(j + 1)$, то должна быть выбрана вторая половина и, таким образом, охватывается вся подтаблица, но при этом должны позаботиться, чтобы не допустить “зацикливания”. Это делается выбором (при возврате) вместо указателя T указатель 4, а вместо указателя T^* указатель 5. Такой выбор при возврате объясняется тем, что указатели 4 и 5 в этой ситуации играют роль синонимов для T и T^* (см. **(7.16)**). Кроме того, сами цифровые указатели, как видно из того же анализа, не приводят к разбивке таблицы, так как при анализе с переходом от столбца к столбцу (справа налево) эти указатели тоже могут появиться, выполняя ту же функцию выделения, но лишь одной подтаблицы.

Поясним последнее. Если в $(j+1)$–ом столбце имеется хотя бы одна клетка, содержащая $\bar{\tau}_j$, то это *исход* **4**, а выражение **(7.17)** принимает вид:

$$\langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \beta_j\, T^* \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \delta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \beta_j \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \delta_j \,\rangle\,)\, \bar{T}^* \,\rangle. \tag{7.20}$$

Аналогично, если имеется хотя бы одна клетка, содержащая τ_j, то это *исход* **5**, а выражение **(7.17)** примет вид:

$$\langle\, \tau_j \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \beta_j\, T^* \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \delta_j\, M \,\rangle \;=\; \langle\, (\,\langle\, \alpha_j \,\rangle \;\bar{/}\; \langle\, \delta_j \,\rangle\,)\, \bar{T} \,\rangle. \tag{7.21}$$

Теперь осталось лишь сравнить **(7.20)** и **(7.21)** с **(7.19)**, чтобы стало окончательно всё понятно.

Далее, рассмотрим *подисходы* **2б**, **3б** и **6а**, для которых по анализу имеется одинаковый подход. Он состоит в том, что если все операторы в некотором столбце имеют одну и ту же продукцию, то множество таких операторов при выполнении некоторой логической операции (в нашем случае $\bar{/}$, хотя это верно и не только для $\bar{/}$) не следует разбивать на подмножества или, что то же самое, таблицу не следует разбивать на подтаблицы. Поэтому в *исходах* **2б**, **3б** и **6а** в служебный столбец не вносится никаких указателей, а в третью служебную строку так подобраны указатели t и t^*, чтобы подстановкой **(7.16)** сохранить те же продукции, какие были в анализируемом столбце.

В *подисходах* **2а** и **3а** происходит поглощение продукцией $\bar{\tau}_j$ продукции T и продукцией τ — продукции T^*, то есть

$$\langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \alpha_j\, T \,\rangle \,=\, \langle\, \bar{\tau}_j \,\rangle, \qquad \langle\, \tau_j \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \alpha_j\, T^* \,\rangle \,=\, \langle\, \tau_j \,\rangle,$$

что и объясняет подстановку $\bar{\tau}_j$ и τ_j вместо *исходов* **2** и **3**.

И, наконец, *исход* **1** говорит о противоречивости в полученной заключительной подтаблице. Но тогда, когда в предыдущих столбцах не произошло деление таблицы и в них сохранились те же продукции (то есть имеет место один из *исходов* **2б** и **3б**) мы должны скорректировать *исход* **1** на **2** или **3**, иначе приходим к выводу о необходимости изучения другой из подтаблиц,перейдя слева направо на первый столбец с продукцией T или T^*.

7.2.4 Сегментация и правое приведение таблицы.

Внимательный взгляд даже на простые иллюстрационные примеры из **п. 7.2.2** наводит на такую простую мысль. Вместо того, чтобы искать операторы выполняющих наборов во всей таблице, было бы лучше разбить таблицу на некоторое количество подтаблиц так, чтобы искать такие операторы выполняющих наборов для каждой из подтаблиц, которые являлись бы операторами выполняющих наборов и для всей таблицы, и, таким образом, дизъюнкция таких операторов выполняющих наборов для подтаблиц, давала бы дизъюнктивную таблицу всех операторов выполняющих наборов для всей таблицы.

Важность такой задачи очевидна, но прикладная сторона становится особенно привлекательной на фоне развития современных компьютеров с большим числом параллельно работающих процессоров.

Решение же этой задачи становится очевидным, если взглянуть на соотношения **(7.17)** и **(7.19)**, то есть вместо того, чтобы вести разговор о том, чтобы разбить таблицу на некоторое число подтаблиц, надо вначале решить более простую задачу: разбить таблицу на две подтаблицы так, чтобы были выполнены указанные выше требования. Совершенно очевидно, что разбивать лучше всего таблицу так, чтобы подтаблицы были бы примерно одинаковыми, или, иными словами, следует разбивать таблицу по тому столбцу, в котором произведение числа продукций T на число продукций T^* даёт максимальное значение (если такое произведение достигается не на одном столбце, то можно выбирать любой из них). Будем называть такой столбец *предпочтительным.*

Предпочтительный столбец в таблице должен занять самое правое положение (отсюда и название для этого *приведения*), то есть иметь максимальный номер по *первой* служебной строке (в которой он выделяется жирным).

По *предпочтительному* столбцу и производится разбивка (сегментация) таблицы на две подтаблицы (на два сегмента): *первый* (соответственно *второй*) сегмент — это подтаблица, состоящая из всех тех и только тех строк, которые в предпочтительном столбце имеют продукции M и T (соответственно M и T^*). Это значит, что сегменты таблицы пересекаются по тем строкам, которые в предпочтительном столбце имеют продукцию M.

Например. Вхождение продукций T^* и T по столбцам в *таблице* **11** таково:

Таблица 21

1	5	4	4	**4**						6
	1	4	$\mathbf{T}^*$	**4**					5	
	2	T^*	T^*	4				4		
2	t^*	4	**4**	$\mathbf{T}^*$			3			
1	5	T^*	4	$\mathbf{T}^*$		2				
		1	T^*	T^*	1					
0	1	4	3	2						
0	1	2	3	4	$\overline{/}$					
		$\bar\tau$	T^*	T^*	4	**4**	**4**	3	**3**	2
		τ	T	T		3	**3**	4	**4**	**4**
		$\bar\tau$	T	T		3	**3**	4	**4**	**4**
	τ	T	T^*	M	3	1	2	3	**3**	2
	τ	T^*	M	T^*	4	**4**	**4**	2		1
	$\bar\tau$	M	T	T^*	4	**4**	**4**	1		3
$\bar\tau$	T	M	T^*	M	3		0	3	**3**	
τ	M	M	T^*	T^*	4	**4**	**4**	3	**3**	
τ	T	M	M	T^*	4	**4**	**4**	1		
τ	M	T	M	T			2	4	**4**	**4**

	0	1	2	3	4
T^*	3	2	5	4	2
T	1	3	3	3	4
$T^*.T$	3	6	15	12	8

Таблица 22

		1	5	**5**			3
1	5	5	$\mathbf{T}$	**5**		2	
2	t^*	T	T	5	1		
0	1	4	3	2	$\bullet$		
0	1	2	3	4	$\overline{/}$		
		τ	T	T	3	**3**	
		$\bar\tau$	T	T	3	**3**	
	τ	T	T^*	M	2	1	3
$\bar\tau$	T	M	T^*	M			3
τ	M	T	M	T	2		

Таблица 23

1	5	4	4	**4**			3
	1	4	$\mathbf{T}^*$	**4**		2	
	2	T^*	T^*	4	1		
0	1	4	3	2	$\bullet$		
0	1	2	3	4	$\overline{/}$		
		$\bar\tau$	T^*	T^*	3	**3**	2
	τ	T	T^*	M	3	**3**	2
	τ	T^*	M	T^*	2		1
	$\bar\tau$	M	T	T^*	1		3
$\bar\tau$	T	M	T^*	M	3	**3**	
τ	M	M	T^*	T^*	3	**3**	
τ	T	M	M	T^*	1		

Это означает, что предпочтительным столбцом является *столбец* **2**, и результат правого приведения *таблицы* **11** представлен в *таблице* **21**, во *второй* служебной строке которой можно увидеть как переставлены столбцы таблицы. Результат сегментации *таблицы* **21** представлен в *таблице* **22** (*первый* сегмент) и в *таблице* **23** (*второй* сегмент).

Теперь обращаем внимание на то, что в *таблицах* **21** — **23** выполнены выкладки, позволяющие записать операторы выполняющих наборов по каждой из этих таблиц и убедиться в том, что такие операторы таблицы можно получить как результат дизъюнкций над операторами выполняющих наборов её сегментов.

Замечание 14. Самое главное в **сегментации** — это выделение *предпочтительного* столбца, так как в *третью* служебную строку *предпочтительного* столбца всегда заносится *указатель* **5** для *первого* сегмента и *указатель* **4** для *второго* сегмента.

Разумеется, что к каждому сегменту можно применить *левое приведение*. Однако для каждого сегмента можно применить и *повторное* приведение, но при этом необходимо соблюсти два требования, о которых сказано ниже.

Замечание 15. При *повторном* приведении сегментов важно не передвигать уже выделенные до того предпочтительные столбцы, что означает: новые предпочтительные столбцы должны перемещаться направо, но не правее уже имеющихся предпочтительных столбцов. Повторное выделение предпочтительных столбцов для каждого из сегментов должно быть независимым, поэтому в первом и втором сегментах при повторном выделении могут быть выбраны разные предпочтительные столбцы.

Иллюстрационными примерами к сказанному могут служить *таблицы* **24** и **25**, являющиеся результатом *повторной* сегментации *таблицы* **22**, а *таблицы* **26** и **27** — результатом *повторной* сегментации *таблицы* **23**. Как легко увидеть, при *повторной* сегментации в *таблицах* **22** и **23** выбраны разные предпочтительные столбцы: в *таблице* **22** — это столбец **3**, в *таблице* **23** — столбец **1**.

Обращаем внимание, что в *таблицах* **24** — **27** выкладки по анализу таблиц выполнены полностью: *таблицы* **24** и **26** противоречивы, а в *таблицах* **25** и **27** имеется по одному оператору выполняющих наборов.

7.2.5 Решение задачи ВЫП методом приведения с сегментацией.

Представленное выше (см. **7.2.4**) решение задачи и составляет основу названного метода, а полное его содержание нуждается в некотором его дополнении и уточнении.

Прежде всего, если в некотором *предпочтительном* столбце имеем $\bar{\tau}$ или τ, то по этому предпочтительному столбцу никакой сегментации производить не надо, так как это означает, что имеем один из *исходов* **4** или **5**, а, быть может, даже **2** или **3**, что разобрано уже неоднократно.

Таблица 24

		1	5	5	1
0	1	4	3	2	$\bullet$
0	1	2	**3**	**4**	$\bar{/}$
		τ	T	T	
		$\bar{\tau}$	T	T	
τ	M	T	M	T	

Таблица 25

2	t^*	4	4	5		2
1	5	T^*	4	5	1	
0	1	4	3	2	$\bullet$	
0	1	2	**3**	**4**	$\bar{/}$	
	τ	T	T^*	M	1	2
$\bar{\tau}$	T	M	T^*	M		
τ	M	T	M	T		2

Таблица 26

1	4	4	5	4	1
0	4	3	1	2	$\bullet$
0	1	2	**3**	**4**	$\bar{/}$
	$\bar{\tau}$	T^*	M	T^*	1
		$\bar{\tau}$	T	T^*	2
$\bar{\tau}$	M	T^*	T	M	
τ	M	T^*	M	T^*	
τ	M	M	T	T^*	

Таблица 27

	1	4	4	4		2
	3	T^*	4	4	1	
0	4	3	1	2	$\bullet$	
0	1	2	**3**	**4**	$\bar{/}$	
	$\bar{\tau}$	T^*	M	T^*	2	
	$\bar{\tau}$	T^*	T^*	M	2	
	τ	M	T^*	T^*		
τ	M	T^*	M	T^*	2	

Далее, если во всех *неприведённых* столбцах таблицы (или подтаблицы) произведение числа продукций T^* на число продукций T равно **нулю**, то дальнейшее *приведение* не нужно для этой подтаблицы и это означает (если такие столбцы действительно есть), что имеется выполнимость.

И, наконец, совсем нет никакой необходимости производить реальную сегментацию или реальную перестановку столбцов. Всё это можно выполнять с помощью указателей, как это делалось, когда решалась **задача ВЫП** методом анализа таблицы, с той лишь разницей, что каждый раз, анализируя таблицу или подтаблицу, определяем: имеется ли *предпочтительный* столбец и по нему выделяем одну из подтаблиц. что же касается того, что необходимо передать последовательность *предпочтительных* столбцов, то это передаётся с помощью *второй* служебной строки. Кроме того, чтобы следить за $\bar{\tau}$ и τ, можно отвести (скажем, с левой стороны) ещё столбец для текущих рангов строк анализируемой подтаблицы.

Решение **задача ВЫП** изложенным методом сегментации, как уже указывалось, может оказаться особенно важным для многопроцессорного компьютера, так как сам метод допускает хорошее распараллеливание.

Но в завершении здесь хочется обратить внимание ещё на одну частную модификацию. Она состоит в том, что вначале к таблице применяется сегментация. Как правило, глубина (число *предпочтительных* столбцов) такой сегментации берётся равной минимальному рангу (по строкам таблицы). А затем к каждому сегменту (их число равно 2^r, где r – минимальный ранг) применяется *левое приведение* и находятся операторы выполняющих наборов (если они есть).

Такая модификация может быть полезной при решении **задач ВЫП**, имеющих большой разброс по величине рангов, как по строкам, так и по столбцам.

7.2.6 Преобразование пары согласованных операторов в системе Q_3'.

Решение **задачи ВЫП** методами, требующими лишь перестановки столбцов, не может быть достаточно эффективным, поскольку сами операторы не очень существенно изменяются: все операторы остаются записанными в системе продукций Q_3.

Расширение системы продукций Q_3 до Q_3' увеличивает наши возможности по преобразованию операторов. При этом для нас наиболее существенным является преобразование лишь пары согласованных операторов, дающих при анализе *исход* **1**.

Например, такой парой являются операторы

$$\langle\, \bar{/}\,\rangle \qquad \begin{matrix} \langle\, \tau & T & T & M & T^* & T^* \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau} & M & T & T & T^* & M \,\rangle, \end{matrix} \tag{7.22}$$

которые сворачиваются в один оператор:

$$\langle\, \bar{\tau}\, \bar{I}^*\, T\, R\, T^*\, L^* \,\rangle. \tag{7.23}$$

А поскольку этот оператор равен:

$$\langle\, \bar{\tau}\, M\, T\, T\, T^*\, T \,\rangle \ \bar{/}\ \langle\, \bar{\tau}\, T\, T\, T^*\, T^*\, T^* \,\rangle \ \bar{/}\ \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}^*\, T\, T\, T^*\, T^* \,\rangle, \tag{7.24}$$

то можем записать, что пара **(7.22)** равна паре операторов:

$$\langle \bar{/} \rangle \qquad \begin{matrix} \langle\, \bar{\tau} \; \bar{I}^* & T & R & T^* & L^* \,\rangle \\ \langle\, \bar{\tau} \; \bar{T}^* & T & T & T^* & T^* \,\rangle\,, \end{matrix} \tag{7.25}$$

которая уже не может дать *исход* **1**. Это хорошо, но не ново: с этим мы уже познакомились в **7.1.7**. Однако, что хуже, такой **(7.25)** результат нас не устраивает по двум причинам: 1) во *второй* оператор **(7.25)** входит продукция $\bar{T}^*$, которая не принадлежит системе Q_3'; 2) полученную свёртку **(7.23)** развёртываем в конъюнкцию операторов **(7.24)**, а это лишняя работа, тем более, что могут быть такие свёртки, развёртка которых будет содержать значительно большее количество членов.

Чтобы избавиться от этих дефектов, мы воспользуемся следующим очевидным классическим равенством.

Если α, β, A, B суть операторы, то

$$(\alpha \vee A)\&(\beta \vee B) = (\alpha \vee A)\&(\beta \vee B)\&(\alpha\&\beta \vee A \vee B). \tag{7.26}$$

В том случае, когда $\beta = \bar{\alpha}$, равенство **(7.26)** примет интересующий нас вид:

$$(\alpha \vee A)\&(\beta \vee B) = (\alpha \vee A)\&(\beta \vee B)\&(A \vee B). \tag{7.27}$$

Оператор $A \vee B$ называется оператором резолюции операторов $\alpha \vee A$ и $\bar{\alpha} \vee B$.

Теперь, если вернуться к парам операторов **(7.22)** и **(7.25)**, то в соответствии с **(7.27)** можно утверждать, что *второй* оператор в **(7.25)** должен быть замещён на оператор резолюции, то есть **(7.25)** приобретает вид:

$$\langle \bar{/} \rangle \qquad \begin{matrix} \langle\, \bar{\tau} \; \bar{I}^* & T & R & T^* & L^* \,\rangle \\ \langle\, \quad \bar{\tau} & T & T & T^* & T^* \,\rangle\,. \end{matrix} \tag{7.28}$$

Кроме случая, рассмотренного выше, когда пара операторов в свёртке содержит одну копродукцию из $[\,I\,]$, может быть случай выхода на *исход* **1**, когда пара операторов в свёртке содержит копродукцию O или O^*. И в этом случае пару операторов следует заменить парой операторов, где *второй* оператор является результатом резолюции. Например, *первая* пара операторов заменяется на *вторую* пару:

$$\langle\, \bar{/}\, \rangle \quad \begin{matrix} \langle\, \tau\ T^*\ \ T\ \ T\ M\ \ M\, \rangle \\ \langle\, \bar{\tau}\ T^*\ M\ T\ \ T\ \ M\, \rangle \end{matrix}, \qquad \langle\, \bar{/}\, \rangle \quad \begin{matrix} \langle\, O^*\ T^*\ R^*\ T\ R\ M\, \rangle \\ \langle\, \qquad \tau\ \ T\ \ T\ T\ M\, \rangle \end{matrix}. \tag{7.29}$$

Таким образом, приходим к такому общему правилу преобразования пары согласованных операторов.

Правило преобразования. Если в системе Q_3 заданы два согласованных оператора с *исходом* **1**, то их конъюнкция преобразуется в конъюнкцию пары согласованных операторов с *исходом* **2** или **3**, из которых *один* является оператором свёртки заданной пары в системе Q'_3, а *второй* — резолюцией заданной пары в системе Q_3.

Если пара согласованных операторов приводит к *исходу* **2** или **3**, то такие операторы называются *строго согласованными.*

В последней формулировке и в сформулированном правиле приведения требуется некоторое уточнение: оно касается согласованности операторов, записанных в системе Q'_3. Об этом уже вскользь упоминалось выше, (в **п. 7.1.7**), а теперь объясним это понятие, но прежде всего, сформулируем в виде правила *условное исключение* оператора, содержащего копродукцию или комбинатор в анализируемом столбце. При этом сохраняется смысл (который дан в **п. 7.1.7**) для указателей a', $a.$, $a'b$, $a.b$, заносимых в служебный столбец. Введём ещё такое обозначение:

$$B,\, C \div \{\, D,\, G,\, H\, \} \asymp a^*, \tag{7.30}$$

заменяющее следующие предложения.

Пусть анализируется столбец с номером a и пусть в *третьей* служебной строке столбца a занесён один из указателей B или C. Тогда в служебный столбец против операторов, имеющих в столбце a комбинатор или копродукцию из списка $\{\, D,\, G,\, H\, \}$, заносим указатель a^*, где a^* есть один из указателей $a.$ или a' .

Используя обозначение **(7.30)** сформулируем следующее

Правило условного исключения оператора. При анализе столбца с номером a имеем:

$$\begin{aligned} T,\, 4\ &\div\ \{\, R^*,\, \bar{I}^*,\, O\, \} \asymp a', \\ T,\, 4\ &\div\ \{\, R,\, \bar{I},\, O^*\, \} \asymp a.\ , \\ T^*,\, 5\ &\div\ \{\, L^*,\, I^*,\, O^*\, \} \asymp a', \\ T^*,\, 5\ &\div\ \{\, L,\, I,\, O\, \} \asymp a.\ . \end{aligned}$$

Оператор свёртки считается полностью *условно исключённым*, если против него в служебном столбце занесён двойной указатель, то есть указатель вида $a.b$ или $a'b$ (если только не исключён до этого указателем a).

Теперь вернёмся к уточнению. Мы говорим, что два оператора строго согласованы, если при анализе с *условным исключением* достигнуто начало одного из них или достигнуто их общее начало не позже, чем полностью будет условно исключён один из них.

Замечание 16. Обращаем внимание на пару операторов **(7.28)** и на вторую пару операторов из **(7.29)**. Эти операторы собою заменяют соответственно пару операторов **(7.22)** и первую пару операторов из **(7.29)**. Но на самом деле достаточно в каждом из этих случаев лишь одного оператора свёртки, так как он равен указанной исходной паре. Мы же записываем ещё оператор резолюции, который, строго говоря, является излишним, но играет хорошую вспомогательную службу тогда, когда имеется в таблице согласованный с ним оператор, дающий *исход* **1**. Это следует иметь ввиду при выполнении предстоящих преобразований таблицы.

Замечание 17. В связи со сказанным в *замечании* **16** следует иметь ввиду, что в тех случаях, когда оператор резолюции опускается при анализе таблицы, можем выйти на столбец a, в котором имеется одна из копродукций $[\,I\,]$ или, что ещё хуже, на копродукцию O или O^*, в то время, как в служебном столбце против оператора свёртки нет ни указателя $a.$, ни указателя a'. Это означает, что мы для случаев копродукций $[\,I\,]$ должны в столбец a в *третью* служебную строку занести *указатель* **5** для I и I^* и *указатель* **4** для $\bar{I}$ и $\bar{I}^*$, что приведёт к появлению *указателя* $a.$ или a'.

Выход же на копродукцию O и O^* означал бы, что *указатель* **4** или **5** в *третью* служебную строку должен был появиться ещё раньше, а именно при переходе через столбец, в котором находилось бы начало оператора резолюции. А чтобы не проявлять излишнюю заботу об операторах свёртки с началом O и O^* следует в служебный столбец со знаком `минус` заносить номер такого столбца, при этом знак `минус` с номером столбца должен означать, что строка *условно не исключена* (не путать со случаем: *минус без номера*, означающий *безусловное исключе-*

ние строки) до тех пор, пока не получит указатель, *исключающий* её или превращающий её в *условно исключённую.*

7.2.7 Суперприведение таблицы задачи ВЫП в системе Q_3'.

Над таблицей **задачи ВЫП** могут быть выполнены преобразования над теми операторами, которые в результате анализа приводят к паре операторов с *исходом* **1**. Способ таких преобразований, приводящий к снятию *исхода* **1**, то есть превращающий пару операторов в строго согласованную — в системе Q_3', описан в **п. 2.6**.

Мы будем называть таблицу **задачи ВЫП** суперприведённой в системе Q_3', если таблица преобразована так, что в ней не найдётся ни одна пара операторов, которая в результате анализа давала бы *исход* **1**.

Рассмотрим на примере **задачи ВЫП**, представленной в *таблице* **28**, как выполнить суперприведение этой таблицы, поясняя вкратце, что при этом делается. Эти пояснения будут иметь общий характер с выделением частностей, которые будут иллюстрироваться на этой задаче.

Анализ таблицы выполняется в полном соответствии с рассмотренной выше методикой (см. **п. 2.2**) с той лишь разницей, что в тех случаях, когда в анализе, продвигаясь от столбца к столбцу справа налево, мы выходим на *исход* **4** или **5** (в результате достижения начала оператора, то есть $\bar{\tau}$ или τ соответственно), то один из операторов (любой, когда их больше одного) условно исключается указателем, помеченным $*$ (звёздочкой). При этом наши действия по достижению *исхода* **2** или **3** сохраняют свою силу (в соответствии с **п. 2.2**), поэтому мы прерываемся в ходе анализа на случай выхода на *исход* **1** (который обеспечивается парой согласованных операторов, каждый из которых в служебном столбце получает указатель, помеченный $*$).

Итак, сказанное выше можно обнаружить в *таблице* **28**, в которой *третья* служебная строка (в этой таблице *второй* служебной строки нет, поскольку перестановки столбцов не производилось) заполнена, заполнен и служебный столбец. В служебном столбце имеются указатели со звёздочкой — это 7^*, 4^*, 3^*, 2^*, 1^*, 0^*, 0^*.

Теперь строим такую последовательность операторов (*цифра* в верхнем левом углу указывает на номер варианта в **таблице ВЫП**):

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0^*	$\bar{\tau}$	T	T						T	
0^*	τ				T^*		T			T
$\bullet$	τ	$\bar{I}^*$	R^*		L		R		R^*	R
1^+		$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T
1^*		τ		T		T			T	
2^+			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T
2^*			τ				T			T
3^+				$\bar{\tau}$	T^*	T	T		T	T
3^*				τ	T^*		T	T		
4^+					τ	T	T	T	T	T
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T		
$\bullet$					O^*	T	T	T	R^*	R^*

Поясним эту последовательность. В ней первыми записаны операторы, приведшие к *исходу* **1** (в нашем случае — это операторы с указателем 0^* в служебном столбце). Свёртка этой пары помечена слева $\bullet$ (*точкой*). Кроме того, под свёрткой найдена резолюция над исходной парой. Начало этой резолюции размещено в столбце с *номером* **1**, что зафиксировано (в левом столбце последовательности) пометкой 1^+. А поскольку мы имеем в результате анализа оператор с пометкой 1^*, то по паре операторов 1^+ и 1^* находим вновь резолюцию (у нас она получает пометку 2^+, так как её начало расположено в столбце с *номером* **2**).

Замечание 18. Обращаем внимание, что если такого оператора 1^* не оказалось, то строить резолюцию мы бы не стали и ограничились бы лишь свёрткой. Это следует иметь ввиду и в дальнейшем.

Далее над резолюцией 2^+ и оператором 2^* находим резолюцию 3^+ и так далее. Такие выкладки должны быть прерваны по достижению такой резолюции s^+, которая с оператором s^* в резолюции даёт оператор с началом в столбце, не имеющем согласованного с ним оператора с *исходом* **1**. Прерывание описанного процесса заканчивается тем, что по операторам s^+ и s^* строится их свёртка.

В нашем случае — это операторы 4^+ и 4^*, которые могли бы привести к *резольвентному* оператору 5^+, если бы в служебном столбце был оператор 5^*. Поэтому мы по операторам 4^+ и 4^* строим только свёртку (она вновь помечена $\bullet$, что предполагается и в дальнейшем).

Таблица 28

1	5	5	5	4	T^*	T^*	5	T^*	T^*	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{l}$
							τ	T	T	7^*
					$\bar{\tau}$	T	T^*			7
					$\bar{\tau}$	T^*	T		T	6
				$\bar{\tau}$		T^*	T			6
				$\bar{\tau}$	T	T	T			4^*
			τ	T	T				T	4
			τ	T^*		T	T			3^*
		$\bar{\tau}$			T^*		T^*		T	7
		τ	T				T^*		T	7
		$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			7
		$\bar{\tau}$	T			T^*			T	6
		τ	T^*		T^*	T				5
		τ	T				T	T		2
		τ				T			T	2^*
			τ			T^*			T	6
			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			5
	τ		T^*	T		T^*				6
	$\bar{\tau}$			T^*		T^*			T	6
	τ	T			T^*				T	5
	τ	T^*		T			T			4
	τ		T		T			T		1^*
$\bar{\tau}$			T		T^*				T	5
τ	T			T				T		4
$\bar{\tau}$	T	T						T		0^*
τ				T^*		T			T	0^*
	τ		T^*	T^*				T^*		8
		τ			T^*		T	T^*		8
		τ				T^*		T^*		8
					τ	T^*	T^*	T^*		8
				τ	T^*	T^*		T^*		8
				$\bar{\tau}$		T	T	T^*		8
					$\bar{\tau}$		T	T^*		8
		τ	T^*						T^*	9
			$\bar{\tau}$			T		T	T^*	9
			$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	9
	$\bar{\tau}$		T				T		T^*	9
				τ				T	T^*	9
			$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	9
		τ			T^*	T^*			T^*	9
		$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*	9

Таблица 29

								4	$\mathbf{T}^*$					6
			1	4	4	4	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$				5	
1	5	5	4	**5**	**4**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$			4		
1	5	5	T^*	5	**4**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$		3			
			1	T	4	T^*	5	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	2				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$				
							τ	T	T	**7***	**7***	**7***	**7***	–
					$\bar\tau$	T	T^*			**7**	**7**	**7**	**7**	
					$\bar\tau$	T^*	T		T	**6**	**6**	**6**	5*	
				$\bar\tau$		T^*	T			**6**	**6**	**6**	4*	
			τ	T	T				T	5	**5**	**5**	5	
			τ	T^*		T	T			3*	–	–	–	–
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	**7**	**7**	**7**	**7**	
		τ	T				T^*		T	**7**	**7**	**7**	**7**	
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			**7**	**7**	**7**	**7**	
		$\bar\tau$	T			T^*			T	**6**	**6**	**6**		
		τ	T^*		T^*	T					3	2*	6	
		τ	T				T	T			2	3		
		τ				T			T		2*	–	–	–
			τ			T^*			T	**6**	**6**	**6**	3*	–
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			3*	–	–	–	–
	τ		T^*	T		T^*				**6**	**6**	**6**	4	
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T	**6**	**6**	**6**		
	τ	T			T^*				T		1*	1*		
	τ	T^*		T			T			4	2	2	4	
	τ		T		T			T		5	**5**	**5**	5	
$\bar\tau$			T		T^*				T		0*	–	–	–
τ	T			T				T		4	0*	–	–	–
τ	$\bar I^*$	R^*		L		R		R^*	R		4.	**4.**0*	–	–
				O^*	T	T	T	R^*	R^*	5*	**5***	**5***	6	
			O^*	T^*	L	R^*	T				4*	**4***	6′3*	
$\bar\tau$	$\bar I$		R^*	R	L^*			R	R^*			3′0*	–	–
		τ	$\bar I^*$	R^*	L^*	R		R^*	T			3•2	6.4	
τ			$\bar I$	L^*	L	R^*			T				6′	
O	T	R^*		R				T					4.	
						$\bar\tau$	T	T	T				6*	
			τ	I^*	L^*	L	R^*		R					
								$\bar\tau$	T					

Таблица 30

									4							12
			1	4	**5**	**4**	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$						11	
		1	5	T^*	5	4	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$					10		
		1	4	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$				9			
		1	T^*	T^*	4	T^*	4	**4**	$\mathbf{T}^*$			8				
				1	4	4	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$		7					
				1	4	T^*	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	6						
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$						
					$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	5^*	$\mathbf{5}^*$	–	–	–
					$\bar\tau$	T^*	T		T	6	5^*	7	**7**	**7**	**7**	–
				$\bar\tau$		T^*	T			6	4^*	–	–	–	–	–
			τ	T	T				T	5	5	5	**5**	3^*	–	–
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**	2^*	–	–	–	–
		τ	T				T^*		T	7	**7**	2^*	–	–	–	–
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	3	2^*	–	–	–
		$\bar\tau$	T			T^*			T	6		6	**6**	2^*	–	–
		τ	T^*		T^*	T					6	3	2^*	–	–	–
		τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
	τ		T^*	T		T^*				6		6	**6**	3		
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T	6		6	**6**	4		–
	τ	T			T^*				T					5	**5**	–
	τ	T^*		T			T			4		7	**7**	**7**	**7**	
	τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
	τ		T^*	T^*				T^*				4	**4**	4		
		τ			T^*		T	T^*				7	**7**	**7**	**7**	
		τ				T^*		T^*		6		6	**6**	2^*	–	
					τ	T^*	T^*	T^*		7	**7**	6	**6**	5^*	$\mathbf{5}^*$	
				τ	T^*	T^*		T^*		6	4^*	–	–	–	–	
				$\bar\tau$		T	T	T^*		4^*	6	7	**7**	**7**	**7**	
					$\bar\tau$		T	T^*		5^*	–	–	–	–	–	
				O^*	T	T	T	R^*	R^*	$8'5$	$\mathbf{8'}6$	$\mathbf{8'}7$	$\mathbf{8'7}$	$\mathbf{8'7}$	$\mathbf{8'7}$	
			O^*	T^*	L	R^*	T			4^*	$6'$	7	**7**	**7**	**7**	
		τ	$\bar I^*$	R^*	L^*	R		R^*	T	$8'$	$\mathbf{8'}6$	$\mathbf{8'}$	$\mathbf{8'}$	$\mathbf{8'}6$	$\mathbf{8'6}$	–
τ			$\bar I$	L^*	L	R^*			T		$6'$	$4'$	$\mathbf{4'}$	5.4	**5.**	–
O	T	R^*		R				T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
						$\bar\tau$	T	T	T	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	–
			τ	I^*	L^*	L	R^*		R	6.		6.4	**6.4**	$5'3$	$\mathbf{5'}3^*$	
								$\bar\tau$	T	8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	
					$\bar\tau$	$\bar I^*$	T	T^*			$6'5^*$	7	**7**	**7**	**7**	
				$\bar\tau$	I	T^*	R^*	L				$7'6$	$\mathbf{7'6}$	$\mathbf{7'}5$	$\mathbf{7'5}$	
							$\bar\tau$	T^*	T			7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	–
		$\bar\tau$	$\bar I$		L^*		T^*		T				3.	$5'$	$\mathbf{5'}$	–
		O	T^*		T^*	R	L^*							6.	**6.**	
					O^*	T	T^*		R^*					6	**6**	
		τ	$\bar I^*$			T^*		L	R^*							
			$\bar\tau$	$\bar I$	R	L^*		L^*	T						$\mathbf{4.}3^*$	–
									$\bar\tau$							

Таблица 31

	3	5	4	5	5	4	**4**	**4**	**4**								19
			1	T^*	4	T^*	4	**4**	**4**							18	
					1	4	T^*	4	**4**						17		
	1	5	4	5	T^*	4	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**					16			
			1	5	4	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	**4**				15				
				1	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	**4**			14					
	2	5	4	5	4	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	**4**		13						
				1	T^*	T^*	T^*	T^*	4	12							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$							
		τ	T				T	T			3		7	**7**	8	**8**	**8**
	τ		T^*	T		T^*				6	**6**		6	1^*	–	–	–
	τ	T^*		T			T				2		7	**7**		7	**7**
	τ		T		T			T			5		5	3	8	**8**	**8**
	τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		4	4
		τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		7	**7**
					τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	7	6	5^*
				τ		T	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	6	7	**7**
		τ	T^*						T^*		2^*			2^*			2
			$\bar\tau$			T		T	T^*		3^*	6	3^*	–	–	–	–
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	7	**7**	**7**	3	6	7	3^*	–
	$\bar\tau$		T				T		T^*		3		7	**7**		7	**7**
				τ				T	T^*	4^*	–	–	–	–	–	–	–
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	6	**6**		6	3^*		6	3^*
		τ			T^*	T^*			T^*	6	**6**	5	6	5		6	5
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**		4	4
				$\bar\tau$	T	T	T			4^*	–	–	–	–	–	–	–
			O^*	T^*	L	R^*	T			5.	4	$6'5$	7	**7**	$6'$	7	**7**
O	T	R^*		R				T			1^*			1^*	8	**8**	**8**
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			5	4	5	7	**7**		7	**7**
					$\bar\tau$	$\bar I^*$	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	$6{\bullet}5^*$	–	–
				$\bar\tau$	I	T^*	R^*	L		8.6	$\mathbf{8.6}$	$\mathbf{8.}4^*$	$\mathbf{8.}7$	$\mathbf{8.7}$	$5^*.$	$7'6$	$\mathbf{7}'4^*$
		O	T^*		T^*	R	L^*			$7'5$	$\mathbf{7}'2$	$\mathbf{7}'6$	3^*	6.5	$7'6$	3^*	6.5
					$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	**7**	5^*	–	–	–	–
		τ				T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		6	2^*
									$\bar\tau$	9^*	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$
				τ	$\bar I$	R	R	R^*	L^*		$5^*.4$	6.4^*	7.4^*	$\mathbf{7.}4$	$8'6$	$\mathbf{8}'7$	$\mathbf{8}'\mathbf{7}$
				τ		I^*	R^*	R	L				$7'4$	$\mathbf{7}'4^*$	8.	$\mathbf{8.}7$	$\mathbf{8.7}$
			$\bar\tau$		I O^*	T T	L T^*	R^* R^*	L^* L^*					6 6^*	$8'7$ $8'7$	$\mathbf{8}'$ $\mathbf{8}'5^*$	$\mathbf{8}'6$ $\mathbf{8}'6$
	τ	$\bar I$	L^*	T		L^* τ	 I	R T	 T^*						8.6 8	$\mathbf{8.}6$ **8**	$\mathbf{8.}1^*$ **8**
							$\bar\tau$	T^*								7^*	$\mathbf{7}^*$
			$\bar\tau$		I O^*	T T	T^* T^*		L^* L^*								6 6^*

Таблица 32

	3	5	4	5	5	4	4	4	4		2
	2	5	4	5	4	5	5	T^*	4	1	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$	
		τ	T				T	T		3	8
	τ	T^*		T			T			2	7
	τ		T		T			T		5	8
	τ		T^*	T^*				T^*		8	4
		τ			T^*		T	T^*		8	7
					τ	T^*	T^*	T^*		8	5
				τ		T	T	T^*		8	7
		τ	T^*						T^*	2	2
	$\bar{\tau}$		T				T		T^*	3	7
			$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	6	3
		τ			T^*	T^*			T^*	6	5
		$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*	4	4
			O^*	T^*	L	R^*	T			4	7
O	T	R^*		R				T		1	8
			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			4	5
				$\bar{\tau}$	I	T^*	R^*	L		8.6	$7'4$
		O	T^*		T^*	R	L^*			$7'$	6.5
		τ				T^*		T^*		8	2
									$\bar{\tau}$	9	9
				τ	$\bar{I}$	R	R	R^*	L^*	5.4	$8'7$
				τ		I^*	R^*	R	L	$6^\bullet 4$	8.7
			$\bar{\tau}$		I	T	L	R^*	L^*	7.3	$8'4$
					O^*	T	T^*	R^*	L^*	7	$8'4$
	τ	$\bar{I}$	L^*	T		L^*		R		$6'1$	8.1
						τ	I	T	T^*	7.6	8
							$\bar{\tau}$	T^*		8	7
			τ		I	T	T^*		L^*	7	6
					O^*	T	T^*		L^*	7	6

Теперь общий вывод по операторам последовательности: начальная пара согласованных операторов с *исходом* **1** и последний оператор, помеченный $*$, который свёрнут с *резольвентным* (в нашем случае — это операторы O^*, O^* и 4^*) из таблицы *безусловно исключаются*, а в таблицу вместо них заносятся операторы свёртки (они имеют в последовательности слева пометку $\bullet$): в нашем случае это два оператора. При этом последний оператор свёртки, в соответствии со `вторым` абзацем *замечания* **17**, должен быть занесён с *указателем* **5** в служебный столбец (это мы особо подчёркиваем, так как этого в таблице увидеть нельзя, поскольку этот *указатель* в последующем анализе заменяется на *указатель* 5^*, который и представлен в таблице).

Всё сказанное можно увидеть в *таблице* **29**, представляющей собой *таблицу* **28** (в продолжении с *варианта* **2**). Операторы из *таблицы* **28**, имевшие в служебном столбце *указатели* **8** и **9**, при переносе опущены, так как в тех выкладках, которые предстоит выполнять в вариантах *таблицы* **29**, они остаются неизменными с неизменными указателями.

Анализ таблицы во *втором* её варианте приводит лишь к последовательности операторов:

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				τ	T^*		T	T		
3^*				$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T		
$\bullet$				O^*	T^*	L	R^*	T		

В *третьем* варианте анализ *таблицы* **29** даёт последовательность операторов:

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0^*	$\bar{\tau}$			T		T^*				T
0^*	τ	T			T				T	
$\bullet$	$\bar{\tau}$	$\bar{I}$		R^*	R	L^*			R	R^*
1^+		$\bar{\tau}$		T	T	T^*			T	T
1^*		τ	T			T^*				T
2^+			$\bar{\tau}$	T	T	T^*			T	T
2^*			τ				T			T
$\bullet$			τ	$\bar{I}^*$	R^*	L^*	R		R^*	T

В этой последовательности операторов ничего нового по сравнению с последовательностью операторов в *первом* варианте не обнаруживаем, поэтому оставляем её без всяких пояснений, полагая, что и так всё ясно.

А вот *четвёртый* вариант в *таблице* **29** должен быть рассмотрен более детально, так как в нём впервые выходим на *исход* **1** в паре операторов, каждый из которых является свёрткой — это операторы 4.0^* и

$3'0^*$, представленные ниже в последовательности в развёртке (развёртка каждого из этих операторов записана как пара операторов, породивших свёртку):

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0^*	$\bar{\tau}$	T	T						T	
	τ				T^*		T			T
$3'0^*$	$\bar{\tau}$			T		T^*				T
	τ	T			T				T	
$4'3$	τ			$\bar{I}$	L^*	L	R^*			T
$\bullet$	O	T	R^*		R				T	
1^+		$\bar{\tau}$	T		T				T	
1^*		τ	T			T^*				T
2^+			$\bar{\tau}$		T	T^*			T	T
2^*			τ	T^*		T^*	T			
3^+				τ	T	T^*	T		T	T
3^*				$\bar{\tau}$	T	T^*	T		T	T
4^+					$\bar{\tau}$	T^*	T		T	T
4^*					τ	T^*	T	T		
5^+						τ	T	T	T	T
5^*						$\bar{\tau}$	T	T	T	T
$\bullet$							τ	T	T	T

Свёртка $4'3$ (и свёртка, помеченная $\bullet$) в этой последовательности получается по *второму* (*первому*) оператору из свёртки 4.0^* и по *первому* (*второму*) оператору из свёртки $3'0^*$. Теперь осталось пояснить, что операторы 3^*, 4^* и 5^* в представленной последовательности являются результатом резолюции над операторами развёртки операторов таблицы с указателем в служебном столбце $3^\bullet 2$ ($\bullet$ (*точка*) — это совмещение $'$ и $*$), 4^* и 5^* соответственно. Всё остальное должно быть понятно, если только обратить внимание на то, что свёртка и резолюция над операторами 5^+ и 5^* совпадают.

Последовательность операторов для *пятого* варианта *таблицы* **29** такова:

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T		
3^*				τ			T^*			T
$\bullet$				τ	I^*	L^*	L	R^*		R
4^+					τ	T^*	T^*	T		T
4^*					$\bar{\tau}$		T^*	T		
5^+						τ	T^*	T		T
5^*						$\bar{\tau}$	T^*	T		T
6^+							τ	T		T
6^*							$\bar{\tau}$	T	T	T
7^+								$\bar{\tau}$	T	T
7^*								τ	T	T
$\bullet$									$\bar{\tau}$	T

Единственное, что следует пояснить — это то, что *первый* оператор в последовательности является *вторым* оператором развёртки оператора $6'3^*$.

Продолжение *таблицы* **29** (с *варианта* **6**) представлено *таблицей* **30**, в которой добавлены операторы из *таблицы* **28**, имевшие в служебном столбце *указатель* **8**, так как они принимают участие в дальнейшем анализе и преобразованиях. Результат анализа приводит к последовательности (где оператор 4^+ — это результат резолюции над операторами свёртки 4^*):

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^+					τ	T^*	T	T		
4^*					$\bar{\tau}$		T	T	T^*	
5^+						τ	T	T	T^*	
5^*						$\bar{\tau}$		T	T^*	
$\bullet$						$\bar{\tau}$	$\bar{I}^*$	T	T^*	

По *седьмому* варианту анализа имеем последовательность:

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					$\bar{\tau}$		T^*	T		
4^*					τ	T^*	T^*		T^*	
$\bullet$					$\bar{\tau}$	I	T^*	R^*	L	
5^+						τ	T^*	T	T^*	
5^*						$\bar{\tau}$	T^*	T		T
6^+							τ	T	T^*	T
6^*							$\bar{\tau}$	T	T^*	
$\bullet$								$\bar{\tau}$	T^*	T

Оператор 6^* этой последовательности получен из свёртки $6'5^*$ как результат резолюции операторов развёртки. Операторы последовательности для *восьмого* варианта не требует пояснений:

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar{\tau}$			T^*		T^*		T
2^*			τ	T				T^*		T
$\bullet$			$\bar{\tau}$	$\bar{I}$		L^*		T^*		T

Девятый вариант анализа даёт последовательность (оператор 3^* последовательности получен по оператору 3. , как результат резолюции):

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*		
2^*			τ	T^*		T^*	T			
$\bullet$			O	T^*		T^*	R	L^*		
3^+				τ		T^*	T	T^*		
3^*				$\bar{\tau}$		T^*		T^*		T
5^+						τ	T	T^*		T
5^*						$\bar{\tau}$	T	T^*		
$\bullet$						O^*	T	T^*		R^*

По *десятому* варианту анализа имеем последовательность, не требующую никаких пояснений:

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar\tau$	T			T^*			T
2^*			τ				T^*		T^*	
$\bullet$			τ	$\bar I^*$			T^*		L	R^*
3^+				$\bar\tau$			T^*		T^*	T
3^*				τ	T	T				T
$\bullet$				$\bar\tau$	$\bar I$	R	L^*		L^*	T

В *одиннадцатом* варианте анализа имеем последовательность операторов, первые *два* оператора которой суть: *второй* оператор из $5'3^*$ и *первый* оператор из 4.3^*, которые в резолюции и дают оператор 6^+. Оператор 6^* — это резолюция над операторами развёртки оператора $\langle\, O^*\, T\, T^*\, M\, R^*\,\rangle$.

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				τ			T^*			T
3^*				$\bar\tau$			T^*		T^*	T
6^+							τ		T^*	T
6^*							$\bar\tau$	T^*		T
7^+								τ	T^*	T
7^*								$\bar\tau$	T^*	T
8^+									τ	T
8^*									$\bar\tau$	T
$\bullet$										$\bar\tau$

А теперь отметим, что *последний* оператор в последовательности **11**, то есть оператор $\langle\,\bar\tau\,\rangle$, является поглощающим для всех операторов *таблицы* **30**, имеющих в *девятом* столбце продукцию T и для одного из операторов свёртки с комбинатором R или R^*. Сказанное учтено в *таблице* **31** с переходным вариантом **12**, в которую внесены операторы из *таблицы* **28**, имевшие в служебном столбце *указатель* **9**.

Анализ *двенадцатого* варианта *таблицы* **31** приводит к последовательности:

12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					τ				T	T^*
4^*					$\bar\tau$	T	T	T		
$\bullet$					τ	$\bar I$	R	R	R^*	L^*

Что касается анализа *тринадцатого* варианта, то он заканчивается *исходом* **2**, а потому, как и в случае *исхода* **3**, без всяких преобразований, переходим на первый слева направо указатель T или T^*, который заменяется на **5** или **4** соответственно (в нашем случае — это на **4**).

Четырнадцатый вариант приводит к последовательности операторов:

14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					$\bar\tau$		T^*	T		
4^*					τ				T	T^*
$\bullet$					τ		I^*	R^*	R	L

В этой последовательности *первый* и *второй* операторы суть первые операторы из свёрток 8.4^* и 6.4^* соответственно.

Теперь важное

Замечание 19. Результирующий оператор свёртки в последовательности **14** возвращает нас на *шестой* столбец (имевший *исход* **4**) с *исходом* **5**. Эта новая ситуация означает (и в дальнейшем тоже), что требуется изменить первый слева направо указатель T или T^* на **5** или **4** (соответственно). (В нашем случае в столбце **7** заменяем T^* на **4**). Затем продолжаем со столбца, в котором произведено изменение.

Анализ *пятнадцатого* варианта в *таблице* **31** приводит к последовательности (в которой *второй* оператор 3^* является результатом резолюции над операторами развёртки оператора свёртки):

15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				$\bar\tau$			T		T	T^*
3^*				τ		T^*	T	T^*		
$\bullet$				$\bar\tau$		I	T	L	R^*	L^*
5^+						τ	T	T^*	T	T^*
5^*						$\bar\tau$	T	T^*		
$\bullet$						O^*	T	T^*	R^*	L^*

Шестнадцатый вариант даёт последовательность операторов:

16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1^*		τ		T^*	T		T^*			
1^+		$\bar\tau$	T		T				T	
$\bullet$		τ	$\bar I$	L^*	T		L^*		R	
2^+			$\bar\tau$	T^*	T		T^*		T	
2^*			τ	T^*						T^*
3^+				τ	T		T^*		T	T^*
3^*				$\bar\tau$	T		T^*			T^*
4^+					$\bar\tau$		T^*		T	T^*
4^*					τ				T	T^*
6^+							τ		T	T^*
6^*							$\bar\tau$	T^*	T	T^*
$\bullet$							τ	I	T	T^*

По операторам $6'5^*$ и $5^*.$ из *семнадцатого* варианта *таблицы* **31** получаем последовательность операторов:

17	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5^*						$\bar\tau$		T	T^*	
5^+						τ	T^*	T	T^*	
$\bullet$						$\bar\tau$	I	T	T^*	
6^+							τ	T	T^*	
6^*							$\bar\tau$	T	T^*	
$\bullet$								$\bar\tau$	T^*	

В этой последовательности оператор 5^* — это *второй* оператор из развёртки свёртки $6'5^*$, а результат резолюции над ними — это оператор 6^*. Оператор 5^+ — это результат резолюции над операторами развёртки свёртки $5.^*$. Обратим внимание, что оператор $\langle\, \bar\tau\, T^*\, M \,\rangle$ является поглощающим для оператора свёртки: $\langle\, \bar\tau\, I\, T\, T^*\, M \,\rangle$.

Восемнадцатый вариант даёт последовательность операторов:

18	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				$\bar\tau$			T	T^*		T^*
3^+				τ		T^*	T	T^*		
$\bullet$				$\bar\tau$		I	T	T^*		L^*
5^+						τ	T	T^*		T^*
5^*						$\bar\tau$	T	T^*		
$\bullet$						O^*	T	T^*		L^*

В этой последовательности 3^+ — это результат резолюций над операторами свёртки 3^*, а 5^* — это *второй* оператор из свёртки $8'5^*$.

Таким образом, *таблица* **31** с *безусловно исключёнными* операторами, представленными в *таблице* **32**, является суперприведённой, в чём можно убедиться по выполненным выкладкам в *таблице* **28**.

Замечание 20. Не следует думать, что *таблица* **32**, являющаяся результатом суперприведения *таблицы* **28**, не может быть сокращена. Это не так. Например, *третий* от конца оператор является поглощающим для *пятого* и *седьмого* операторов таблицы. Возможны и более радикальные преобразования таблицы.

7.3 Решение задачи ВЫП в альтернативной системе

В альтернативной системе решение *задачи* **ВЫП** имеет в своей основе ту же идею суперприведения, но отличается преобразованиями. Если методология преобразований, изложенная в **7.2.6**, определяется системой Q_3', то в альтернативной — диктуется системой Q_3'', (*см.* определение системы в **5.5.3**).

7.3.1 Преобразование операторов в системе Q_3''.

Как и в системе Q_3', так и здесь для нас представляют основной интерес пары согласованных операторов, дающих в анализе *исход* **1**. Их преобразование рассмотрим вначале на примерах, в которых предполагается, что над парами операторов выполняется конъюнкция.

$$
\begin{array}{ll}
\langle \tau \;\; T \;\; T \;\; M \;\; T^* \;\; T^* \rangle & \langle \tau \;\; T \;\; T \;\; M \;\; T^* \;\; T^* \rangle \\
\langle \bar{\tau} \;\; M \;\; T \;\; T \;\; T^* \;\; M \rangle\,, & \langle \bar{\tau} \;\; \bar{E}^* \;\; T \;\; T \;\; T^* \;\; L \rangle\,.
\end{array} \tag{7.31}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\langle \tau \;\; M \;\; T^* \;\; T \;\; M \;\; T \rangle & \langle \tau \;\; M \;\; T \;\; T \;\; M \;\; T \rangle \\
\langle \bar{\tau} \;\; M \;\; M \;\; T \;\; T^* \;\; M \rangle\,, & \langle \bar{\tau} \;\; M \;\; E^* \;\; T \;\; T^* \;\; R \rangle\,.
\end{array} \tag{7.32}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\langle \bar{\tau} \;\; T^* \;\; M \;\; T \;\; M \;\; T \rangle & \langle \bar{\tau} \;\; T^* \;\; M \;\; T \;\; M \;\; T \rangle \\
\langle \tau \;\; T^* \;\; T \;\; T \;\; M \;\; M \rangle\,, & \langle E \;\; T^* \;\; T \;\; T \;\; M \;\; R \rangle\,.
\end{array} \tag{7.33}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\langle \tau \;\; T \;\; M \;\; T^* \;\; T \;\; T \rangle & \langle \tau \;\; T \;\; M \;\; T^* \;\; T \;\; T \rangle \\
\langle \bar{\tau} \;\; T \;\; T^* \;\; M \;\; M \;\; T \rangle\,, & \langle \bar{E} \;\; T \;\; T^* \;\; L \;\; R \;\; T \rangle\,.
\end{array} \tag{7.34}
$$

В этих примерах слева записаны согласованные пары операторов, дающих *исход* **1**, а справа соответствующие им пары строго согласованных операторов. Результаты резолюций в исходных парах **(7.31)** — **(7.34)** суть соответственно операторы:

$$
\langle \bar{\tau} T\,T\,T^* T^* \rangle, \quad \langle \tau T\,T^* T \rangle, \quad \langle \tau T\,T\,M\,T \rangle, \quad \langle \bar{\tau} T^* T^* T\,T \rangle. \tag{7.35}
$$

Результаты конъюнкций над *вторыми* операторами левых пар **(7.31)** — **(7.34)** и соответствующими этим парам резолюций из **(7.35)** дают *вторые* операторы (свёртки) правых пар **(7.31)** — **(7.34)**.

Замечание 21. Если для *левых* пар операторов из **(7.33)** и **(7.34)** безразлично, какой из них будет *первым*, а какой — *вторым*, то это не так для *левых* пар операторов из **(7.31)** и **(7.32)**: они должны быть расположены именно так, как это принято в этих примерах. Точнее, *вторым* должен быть расположен тот из операторов пары, который содержит продукцию M в том столбце, в котором начинается оператор резолюции над этой парой. Если такого оператора в паре нет, то их порядок следования безразличен.

А сейчас можно сформулировать общее правило преобразования пары согласованных операторов.

Правило преобразования. Если в системе Q_3 заданы *два* согласованных оператора с *исходом* **1**, предполагая их следование в соответствии с *замечанием* **21**, то их конъюнкция преобразуется в конъюнкцию пары *строго согласованных* операторов, если будут выполнены следующие действия над парой операторов:

1) по этой паре строится *третий* оператор, являющийся результатом резолюций над заданной парой;

2) над результатом резолюции и *вторым* из операторов пары строится оператор свёртки;

3) *первый* оператор пары и оператор свёртки составляют искомую преобразованную пару.

Второй оператор теперь уже *строго согласованной* пары называется *оператором резолюционной свёртки.*

В уточнении согласованности операторов, записанных в системе Q_3'', отметим, что смысл обозначений, принятый в **7.2.6** и **7.2.7**, сохраняет свою силу и лишь изменим следующее.

Используя определение, связанное с обозначением **(7.30)**, для системы Q_3'' сформулируем

Правило условного исключения оператора. При анализе столбца с номером a имеем:

$$T,4 \;\div\; \{R,\bar{E}^*\} \asymp a.\,,$$
$$T^*,5 \;\div\; \{L,E^*\} \asymp a.\,,$$

при этом, если указанный столбец a для операторов резолюционной свёртки копродукцией E или $\bar{E}$ является *первым* слева направо столбцом с продукцией T или T^*, то имеем в столбце a *исход* **4** или **5** соответственно. Оператор свёртки считается полностью *условно исключённым*, если против него в служебном столбце либо занесён указатель a, или a^*, либо занесён двойной указатель, то есть указатель $a\,.\,b$, $a\,.\,b^*$, $a^*\,.\,b$, $a^*\,.\,b^*$. Последние *три* двойных указателя появляются при достижении начала *одного* или *обоих* операторов в свёртке.

В свете уже сказанного *замечание* **17** приобретает новое содержание, а именно, имеем вместо него

Замечание 22. В анализе таблицы (в системе Q_3'') выход на копродукцию E или $\bar{E}$ (в соответствии с *правилом условного исключения* оператора) не должен происходить, если только не получен указатель $c\,.$, где $c > a$, так как ему должен предшествовать столбец с *исходом* **4** или **5**, приводящий к исключению оператора резолюционной свёртки. А чтобы не проявлять излишнюю заботу об операторах свёртки с началом E и $\bar{E}$, следует в служебный столбец со знаком `минус` заносить номер такого столбца, при этом знак `минус` с номером столбца должен означать, что строка условно неисключена (не путать со случаем: `минус без номера`, означающий *безусловное исключение* строки) до тех пор, пока не получит указатель, исключающий её или превращающий её в *условно исключённую*.

7.3.2 Суперприведение таблицы задачи ВЫП в системе Q_3''.

Будем называть таблицу *задачи* **ВЫП** суперприведённой в системе Q_3'', если таблица преобразована так, что в ней не найдётся ни одна пара операторов, которая в результате анализа давала бы *исход* **1**.

Чтобы получить из заданной таблицы суперприведённую, надо над парами операторов с *исходом* **1** выполнять преобразования, описанные в **п. 3.1**, так как такие преобразования приводят к строго согласованной паре.

Чтобы сравнить суперприведение в системе Q_3'' с суперприведением в системе Q_3', рассмотрим суперприведение таблицы *задачи* **ВЫП** в системе Q_3'' на примере той же задачи, которая представлена в *таблице* **28**.

Анализ таблиц выполняется аналогично тому, как это делалось в **п. 2.7**, а те особенности, которые при этом диктуются преобразованиями **п. 3.1**, будут поясняться по ходу выкладок там, где это необходимо. Заметим, что в *таблице* **28** ничего не изменится по сравнению с тем, что мы имели. Но последовательность операторов в этом случае будет выглядеть так:

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
O^*	$\bar{\tau}$	T	T						T	
O^*	τ				T^*		T			T
1^+		$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T
1^*		τ		T		T			T	
2^+			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T
2^*			τ				T			T
3^+				$\bar{\tau}$	T^*	T	T		T	T
3^*				τ	T^*		T	T		
4^+					τ	T	T	T	T	T
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T		
5^+						$\bar{\tau}$	T	T	T	T
	τ	$\bar{E}^*$	R		T^*		T		R	T
		τ	$\bar{E}^*$	T	L	T	R		T	R
			τ	$\bar{E}^*$	L	R	T		R	T
				E	T^*	R	T	T	R	R
					$\bar{E}$	T	T	T	R	R

Поясним эту последовательность. Операторы, полученные $*$ и $+$ суть те же, что и в последовательности *варианта* **1** из **7.2.7**. За ними следуют операторы, являющиеся резолюционными свёртками, то есть результатами свёрток пары операторов: *первая* пара — это *второй* оператор 0^* и 1^+; *вторая* пара — следующие *два* оператора: 1^* и 2^+ и так далее.

Таким образом, в таблице остаётся *первый* оператор 0^* и операторы резолюционных свёрток. Значит, *второй* оператор 0^* и операторы 1^*, 2^*, 3^*, 4^* из таблицы безусловно исключаются. Сказанное представлено в *таблице* **33**, являющейся аналогом *таблицы* **29** из **7.2.7** (с которой следует сравнивать). В *таблицу* **33**, как и в *таблицу* **29**, строки, имевшие в служебном столбце указатели **8** и **9**, не включены.

Замечание 23. Обратим внимание, что оператор 5^+ является поглощающим для оператора 4^+ и, таким образом, в нашей последовательности вместо предпоследнего оператора мы могли бы оставить оператор 3^*. Но для того, чтобы не выполнять проверки на поглощение операторов, мы оставляем общее правило свёрток, так как ничего принципиально не измениться при этом.

В *таблице* **33** анализ, являющийся продолжением анализа в *таблице* **28** с **варианта 2**, приводит к последовательности

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T		
5.3^*				τ	T^*		T	T		
4^+					τ	T^*	T	T		
				E	T^*	L	T	T		

Замечание 24. Обращаем внимание, что в последовательности **варианта 2** из оператора $5\,.\,3^*$, являющегося резолюционной свёрткой операторов 3^* и 4^+ из *первой* последовательности, в *эту* последовательность взят лишь оператор 3^*, а оператор 4^+ опущен (поскольку таблица от этого не изменит свою выполнимость). Значит, оператор $5\,.\,3^*$ должен быть из таблицы *безусловно исключён*, а появиться должен последний оператор резолюционной свёртки.

Замечание 25. В рассмотренном случае можно было бы в *последовательности* **2** изменить порядок следования первых *двух* операторов, что привело бы к *безусловному исключению* оператора 3^*, появлению оператора резолюционной свёртки $\langle\, \bar{E}\, T^*\, T^*\, R\, T\,\rangle$, а оператор $5\,.\,3^*$ остался бы в таблице без изменения.

Вариант 3 *таблицы* **33** приводит к последовательности:

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0^*	τ	T			T				T	
0^*	$\bar{\tau}$			T		T^*				T
1^+		$\bar{\tau}$		T	T	T^*			T	T
1^*		τ	T			T^*				T
2^+			$\bar{\tau}$	T	T	T^*			T	T
2^*			τ	T				T	T	
3^+				$\bar{\tau}$	T	T^*		T	T	T
	$\bar{\tau}$	$\bar{E}^*$		T	R	T^*			R	T
		E	T	R	R	T^*			R	T
			E	T	R	L		T	T	R

На **вариант 4** обратим особое внимание, так как в нём впервые встречаемся с новой особенностью, которая нуждается в пояснениях. Последовательность *четвёртого* варианта такова:

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0^*	τ	T			T				T	
0^*	$\bar\tau$	T	T						T	
1^+		$\bar\tau$	T		T				T	
$3\,.\,1^*$		τ	T			T^*				T
2^+			$\bar\tau$		T	T^*			T	T
2^*			τ	T^*		T^*	T			
3^+				τ	T	T^*	T		T	T
$3^\bullet$				$\bar\tau$	T	T^*		T	T	T
4^+					$\bar\tau$	T^*	T	T	T	T
$4^\bullet$					τ	T^*	T	T		
5^+						τ	T	T	T	T
$5^\bullet$						$\bar\tau$	T	T	T	T
6^+							$\bar\tau$	T	T	T
	$\bar E$	T	T		R				T	
		E	T		R	T^*			R	T
			E	T^*	R	T^*	T		R	R

Теперь можно не давать пояснений относительно оператора $3\,.\,1^*$, поскольку сказанное об операторе $5\,.\,3^*$ из *второго* варианта (*см. замечание* **24**) относится и к оператору $3\,.\,1^*$. А вот об операторах последовательности, помеченные указателем с $\bullet$ (**точкой**), сделаем следующее

Замечание 26. В последовательности **4** операторы $3^\bullet, 4^\bullet, 5^\bullet$ — это *вторые* операторы в свёртках $3^*, 4^*, 5^*$ и они поэтому лишь участвуют в образовании резолюций $4^+, 5^+, 6^+$, но сами резолюционные свёртки $3^*, 4^*, 5^*$ в таблице сохраняются неизменными. Поэтому новые резолюционные свёртки образуются лишь по парам последовательности: *второй* оператор 0^* и 1^+; $3\,.\,1^*$ и 2^+; 2^* и 3^+. Кроме этого в таблицу должен быт дополнительно занесён оператор резолюции с указателем 6^+.

Анализ *таблицы* **33** в *пятом* варианте приводит к последовательности:

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^*				$\bar\tau$	T^*	T^*		T		
3^*				τ			T^*			T
4^+					τ	T^*	T^*	T		T
4^*					$\bar\tau$		T^*	T		
5^+						τ	T^*	T		T
5^*						$\bar\tau$	T^*	T		T
6^+							τ	T		T
6^*							$\bar\tau$	T	T	T
7^+								$\bar\tau$	T	T
7^*								τ	T	T
8^+									$\bar\tau$	T
				τ	E^*	L	T^*	R		T
					$\bar\tau$	E^*	T^*	T		R
							τ	T		T
								$\bar\tau$	T	T
									$\bar\tau$	T

Замечание 27. В этой последовательности чисто формальное выполнение резолюционных свёрток приводит в последних *трёх* случаях к операторам:

$$\langle\, \bar{E}\, T^*\, T\, M\, T\,\rangle, \quad \langle\, \bar{E}\, T\, T\, T\,\rangle, \quad \langle\, E\, T\, T\,\rangle,$$

которые и равны представленным в последовательности, так как, если в результате свёртки имеем оператор с началом E или $\bar{E}$, который не содержит ни копродукций, ни комбинаторов, то такой оператор является *вырожденной свёрткой*, что значит: он равен оператору, в котором E или $\bar{E}$ заменяется на θ. Обращаем особое внимание на то, что проверка на вырожденность свёртки не является обязательной, даже более того, она не нужна и даже вредна, поскольку требует время на проверку, но ничего не улучшает.

Продолжение *таблицы* **33** (с **варианта 6**) представлено *таблицей* **34**, в которой добавлены операторы из *таблицы* **28**, имевшие в служебном столбце указатель **8**, поскольку они принимают в дальнейшем участие в анализе и преобразованиях. Операторы, получившие в служебном столбце *таблицы* **33** черту (признак *безусловного исключения*), в *таблицу* **34** не переносятся, кроме того, те свёртки, которые в служебном столбце *таблицы* **33** помечены **точкой**, развёрнуты и один из операторов развёртки поглощён последним оператором *таблицы*, а другой перенесён в *таблицу* **34**.

Результат анализа **6**–го варианта *таблицы* **34** даёт:

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4^\bullet$					τ	T^*	T	T		
4^*					$\bar\tau$		T	T	T^*	
5^+						τ	T	T	T^*	
5^*						$\bar\tau$		T	T^*	
6^+							$\bar\tau$	T	T^*	
6^*							τ	T		T
7^+								$\bar\tau$	T^*	T
					$\bar\tau$	E^*	T	T	T^*	
						$\bar\tau$	$\bar E^*$	T	T^*	
							E	T	L	T

Всё, что следовало бы сказать о последовательности **6**, уже упоминалось выше и мы не будем здесь и в дальнейшем повторять то, что должно быть ясно из замечаний, которые уже сформулированы в ходе выкладок.

Обратимся к анализу **варианта 7**. Он приводит к последовательности

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			τ	T				T^*		T
2^*			$\bar\tau$			T^*		T^*		T
3^+				$\bar\tau$		T^*		T^*		T
			$\bar\tau$	$\bar E^*$		T^*		T^*		T

Аналогичным образом анализ вариантов **8** — **10** *таблицы* **34** даёт:

Таблица 33

								4	$\mathbf{T}^*$					6
			1	4	4	4	$\mathbf{5}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$				5	
1	5	5	4	$\mathbf{5}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$			4		
1	5	5	T^*	5	$\mathbf{4}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$		3			
			1	T	4	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	2				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$				
							τ	T	T	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	–
					$\bar\tau$	T	T^*			$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	
					$\bar\tau$	T^*	T		T	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	5^*	–
				$\bar\tau$		T^*	T			$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	4^*	–
			τ	T	T				T	5	$\mathbf{5}$	$\mathbf{5}$	5	
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	
		τ	T				T^*		T	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{7}$	
		$\bar\tau$	T			T^*			T	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$		
		τ	T^*		T^*	T					3	2^*	–	–
		τ	T				T	T			2^*	–	–	–
			τ			T^*			T	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	3^*	–
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			3^*	4	$\mathbf{4}$	3^*	
	τ		T^*	T		T^*				$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	4	
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6}$		
	τ	T			T^*				T		1^*	–	–	–
	τ	T^*		T			T			4	2	2	4	
$\bar\tau$			T		T^*				T		0^*	–	–	–
τ	T			T				T		4	0^*	0^*	4	
$\bar\tau$	T	T						T				0^*	–	–
τ	$\bar{E}^*$	R		T^*		T		R	T		4	$\mathbf{4}$	6	•
	τ	$\bar{E}^*$	T	L	T	R		T	R	5	$\mathbf{5}$	$\mathbf{5}$	6.5	•
		τ	$\bar{E}^*$	L	R	T		R	T	5.	$\mathbf{5}$.2	$\mathbf{5}$.2	6	•
			E	T^*	R	T	T	R	R	5.3*	–	–	–	–
				$\bar{E}$	T	T	T	R	R	5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	6	•
			E	T^*	L	T	T				4^*	$\mathbf{4}^*$	6	
$\bar\tau$	$\bar{E}^*$		T	R	T^*			R	T			3	4.	•
	E	T	R	R	T^*			R	T			3.1*	–	–
		E	T	R	L		T	T	R			3^*	4.	•
						$\bar\tau$	T	T	T				6^*	–
$\bar{E}$	T	T		R				T					4.	
	E	T		R	T^*			R	T				4	•
		E	T^*	R	T^*	T		R	R				6	•
			τ	E^*	L	T^*	R		T					
				$\bar\tau$	E^*	T^*	T		R					
						τ	T		T					
							$\bar\tau$	T	T					–
								$\bar\tau$	T					

Таблица 34

									4						11
			1	4	**5**	**4**	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$					10	
		1	5	T^*	5	4	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$				9		
		1	4	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$			8			
		1	T^*	T^*	4	T^*	4	**4**	$\mathbf{T}^*$		7				
				1	4	5	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	6					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$					
					$\bar\tau$	T	T^*			7	5^*	$\mathbf{5}^*$	–	–	–
			τ	T	T				T	5	5	**5**	3^*	–	–
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	2^*	–	–	–	–
		τ	T				T^*		T	7	2^*	3	2^*		–
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	3	2^*	5	**5**	
		$\bar\tau$	T			T^*			T	6	6	**6**	2^*	–	–
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T				7	**7**	**7**	**7**	
	τ		T^*	T		T^*				6	6	**6**	3	4	
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T	6	6	**6**	4		–
	τ	T^*		T			T				7	**7**	**7**	**7**	
τ	T			T				T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	
	τ		T^*	T^*				T^*			4	**4**	4		
		τ			T^*		T	T^*			7	**7**	**7**	**7**	
		τ				T^*		T^*		6	6	**6**			
					τ	T^*	T^*	T^*		7	6	**6**	5^*	$\mathbf{5}^*$	
				τ	T^*	T^*		T^*		6	6	**6**	5	**5**	
				$\bar\tau$		T	T	T^*		4^*	–	–	–	–	–
					$\bar\tau$		T	T^*		5^*	–	–	–	–	–
τ				T^*		T			T		4	**4**	6	**6**	–
	τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	
		τ				T			T			2^*	–	–	–
				$\bar\tau$	T	T	T			5	7	**7**	**7**	**7**	
			E	T^*	L	T	T			4^*	7	**7**	**7**	**7**	
$\bar\tau$			T		T^*				T	5		3	5	**5**	–
		τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	
$\bar E$	T	T		R				T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	
	τ	T			T^*				T	5			5	**5**	–
		τ	T^*		T^*	T				5	3		6	**6**	
			τ	E^*	L	T^*	R		T	6	7.6	**7 . 6**	**7** .3	**7** .3*	
				$\bar\tau$	E^*	T^*	T		R	6	7	**7**	**7**	**7**	•
						τ	T		T	6^*	–	–	–	–	–
								$\bar\tau$	T	8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	–
				$\bar\tau$	E^*	T	T	T^*			7	**7**	**7**	**7**	
					$\bar\tau$	$\bar E^*$	T	T^*			7	**7**	**7**	**7**	
						E	T	L	T		7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	–
		$\bar\tau$	$\bar E^*$		T^*		T^*		T			3^*.	5	**5**	–
		τ	E^*		L	T	L		T				6	**6**	–
					$\bar E$	T	T^*		R				6^*	$\mathbf{6}^*$	•
		$\bar E$	T			T^*	L		T					3^*	–
			E	T	T	L	L		T					4^*	–
									$\bar\tau$						
			E			T^*	L		T						–

Таблица 35

		1	T^*	4	**5**	**4**	**4**	**4**	**4**									19	
	3	5	4	T^*	5	4	**4**	**4**	**4**								18		
		1	4	T^*	4	T^*	4	**4**	**4**							17			
				1	4	4	T^*	4	**4**						16				
	1	5	4	5	T^*	4	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**					15					
		1	4	5	4	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	**4**				14						
				1	T^*	4	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	**4**			13							
	2	5	4	5	4	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	**4**		12								
				1	T^*	T^*	T^*	T^*	4	11									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$									
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	**7**	2*	5	7	2*	5	**5**	
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			5	4	5	7	**7**		7	**7**	**7**	
	τ		T^*	T		T^*				6	**6**		6	1*	–	–	–	–	–
	τ	T^*		T			T				2		7	**7**		7	**7**	**7**	
τ	T			T				T			1				8	**8**	**8**	**8**	
	τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		4	4	3	
		τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		7	**7**	**7**	–
		τ				T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		6	2*	2*	
					τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	7	6	5*	**5***	
				τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	4*	6	5	**5**	
		τ	T^*						T^*		2		2*	–	–	–	–	–	–
			$\bar\tau$			T		T	T^*		3*	6	3*	–	–	–	–	–	–
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	7	**7**	**7**	3	6	7	3*	–	–	–
	$\bar\tau$		T				T		T^*		3		7	**7**		7	**7**	**7**	
				τ				T	T^*	4*	–	–	–	–	–	–	–	–	–
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	6	**6**		6	3*	–	–	–	–	–
		τ			T^*	T^*			T^*	6	**6**	5	6	5		6	5	**5**	
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**		4	4	2*	
	τ		T		T			T			5		5	3	8	**8**	**8**	**8**	
				$\bar\tau$	T	T	T			4*	5	6	7	**7**	6	7	**7**	**7**	
			E	T^*	L	T	T			5.	4	6	7	**7**	6	7	**7**	**7**	
		τ	T				T	T			3		7	**7**	8	**8**	**8**	**8**	
$\bar E$	T	T		R				T			1*			1*.	8	**8**	**8**	**8**	
		τ	T^*		T^*	T				5	2*	6	2	6	6	2*	–	–	–
				$\bar\tau$		T^*	T			6	**6**	4*	7	**7**	4*	–	–	–	–
				$\bar\tau$	E^*	T	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	6	7	**7**	**7**	–
					$\bar\tau$	$\bar E^*$	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	6*.5*	–	–	–	–
					$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	**7**	4*	–	–	–	–	–	–
									$\bar\tau$	9*	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9**	
				τ	$\bar E^*$	R	R	T	T^*		5*.4*	6.4*	–	–	–	–	–	–	–
				τ		E^*	R	T	T^*				7.4*	**7**.4*	–	–	–	–	–
		E	T^*		L		L		T^*					5.2*	–	–	–	–	–
			$\bar\tau$		E^*	T	L	T	T^*					6	8	**8**	8	**8**	
					$\bar E$	T	T^*	R	L					6*	8.6	**8**.5*	–	–	–
							τ	T	T^*						8	**8**	**8**	**8**	
	τ	$\bar E^*$	T^*	T		T^*		R							8.	**8**.6	**8**.1*	**8**.4	
		E	T^*	R		L		R	T^*						8.	**8.**	**8**.2	**8**.3	
			$\bar E$	T		T^*		R	T^*						8.	**8**.6	**8**.3*	**8**.4	
				τ		E^*		T	T^*						8	**8**	**8**	**8**	
				$\bar\tau$	E^*	T^*	T	L								7	**7**	**7**	•
					τ	E^*	T	T^*								7	**7**	**7**	–
							$\bar\tau$	T^*								7*	**7***	**7**	
		E	T^*		T^*	T	L										6	**6**	
			$\bar\tau$		E^*	T	T^*		T^*								6	**6**	
					$\bar E$	T	T^*		L								6*	**6***	

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*		
2^*			τ				T			T
3^+				τ		T^*	T	T^*		T
$3^\bullet.$				$\bar\tau$		T^*		T^*		T
5^+						τ	T	T^*		T
5^*						$\bar\tau$	T	T^*		
6^+							$\bar\tau$	T^*		T
			τ	E^*		L	T	L		T
						$\bar E$	T	T^*		R

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			τ	T				T^*		T
2^*			$\bar\tau$	T			T^*			T
3^+				$\bar\tau$			T^*	T^*		T
3^*				τ	T	T				T
4^+					$\bar\tau$	T	T^*	T^*		T
			$\bar E$	T			T^*	L		T
				E	T	T	L	L		T

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3^\bullet$				$\bar\tau$			T^*	T^*		T
7.3^*				τ			T^*			T
6^+							τ	T^*		T
$6^\bullet$							$\bar\tau$	T^*		T
7^+								τ		T
$7^\bullet$								$\bar\tau$	T^*	T
8^+									τ	T
8^*									$\bar\tau$	T
9^+										$\bar\tau$
				E			T^*	L		T

А теперь обратим внимание, что *предпоследний* оператор в *последовательности* **10**, то есть оператор $\langle\bar\tau\rangle$ является **поглощающим** для всех операторов *таблицы* **34**, имеющих в *девятом* столбце продукцию T и для одного из операторов свёртки с комбинатором R.

Сказанное учтено в *таблице* **35** с переходным вариантом **11**, в которую внесены операторы из *таблицы* **28**, имевшие в служебном столбце указатель **9**.

Анализ **11**–го варианта *таблицы* **35** приводит к последовательности:

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					$\bar\tau$	T	T	T		
4^*					τ				T	T^*
5^+						$\bar\tau$	T	T	T	T^*
					τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*

Двенадцатый вариант анализа выходит на *исход* **2**, поэтому он не требует преобразований, а *тринадцатый* вариант приводит к последовательности:

13	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					$\bar\tau$		T^*	T		
6.4^*					τ				T	T^*
6^+							τ	T	T	T^*
					τ		E^*	R	T	T^*

Здесь следует обратить внимание на такое очень важное замечание, которое никогда не должно опускаться из виду.

Замечание 28. *Последний* оператор последовательности **13**, занесённый в *таблицу* **35**, требует в *шестом* столбце служебной строки указатель **5** и это было бы хорошо, если бы в указанном столбце был указатель T, но там указатель **4** (*см.* **13**–ый вариант), значит, фактически *первый* слева направо указатель от такого столбца (в нашем случае — это в столбце **7**) изменит буквенное значение на должное числовое (в нашем случае T^* заменится на **4**).

Анализ *таблицы* **35** в *четырнадцатом* и *пятнадцатом* вариантах даёт:

14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*		
2^*			τ	T^*						T^*
3^+				τ		T^*		T^*		T^*
3^*				$\bar{\tau}$			T		T	T^*
5^+						τ	T	T^*	T	T^*
5^*						$\bar{\tau}$	T	T^*		
6^+							$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*
			E	T^*		L		L		T^*
				$\bar{\tau}$		E^*	T	L	T	T^*
						$\bar{E}$	T	T^*	R	L

15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 :		$\bar{\tau}$	T		T				T	
1^*		τ		T^*	T		T^*			
2^+			$\bar{\tau}$	T^*	T		T^*		T	
5.2^*			τ	T^*						T^*
3^+				τ	T		T^*		T	T^*
3^*				$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*
4^+					$\bar{\tau}$		T^*		T	T^*
7.4^*					τ				T	T^*
6^+							τ		T	T^*
$6^\bullet$							$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*
7^+								τ	T	T^*
		τ	$\bar{E}^*$	T^*	T		T^*		R	
			E	T^*	R		L		R	T^*
				$\bar{E}$	T		T^*		R	T^*
					τ		E^*		R	T^*

Анализ в *шестнадцатом* варианте в свой последовательности содержит оператор $6^*.5^*$, который представлен в развёртке на операторы $6^\bullet.5^*$ и $6^*.5^\bullet$, что даёт:

16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					τ	T^*	T^*		T^*	
4^*					$\bar\tau$		T^*	T		
5^+						τ	T^*	T	T^*	
$6^\bullet.5^*$						$\bar\tau$		T	T^*	
6^+							τ	T	T^*	
$6^*.5^\bullet$							$\bar\tau$	T	T^*	
7^+								$\bar\tau$	T^*	
					$\bar\tau$	E^*	T^*	T	L	
						τ	E^*	T	T^*	
								$\bar\tau$	T^*	

Анализ **17**–го варианта приводит к последовательности:

17	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*		
2^*			τ	T^*		T^*	T			
3^+				τ		T^*	T	T^*		
3^*				$\bar\tau$			T	T^*		T^*
5^+						τ	T	T^*		T^*
8.5^*						$\bar\tau$	T	T^*		
6^+							$\bar\tau$	T^*		T^*
			E	T^*		T^*	T	L		
				$\bar\tau$		E^*	T	T^*		T^*
						$\bar E$	T	T^*		L

Восемнадцатый вариант анализа заканчивается *исходом* **3**: он не требует преобразований, а **19**–ый даёт последовательность:

19	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*
2^*			τ				T^*		T^*	
					τ		T^*		T^*	T^*
			τ		E^*		T^*		T^*	L

Последний оператор этой последовательности требует *исхода* **5** в четвёртом столбце, в то время как в *варианте* **19** он равен **4**, а поскольку правее четвёртого столбца нет ни T, ни T^*, то преобразования *таблицы* **35** закончились до **19**–го варианта, то есть **19**–ый вариант в *таблицу* **35** не вносит никаких изменений.

Окончательный вид преобразованной *таблицы* **35** представлен в *таблице* **36** (без последних *трёх* операторов), при этом *четвёртый* оператор от конца (*таблицы* **35**), использованный как поглощающий, приводит к дополнительному исключению некоторых операторов. О *таблице* **36** (без последних *трёх* операторов) ещё нельзя сказать, что она является суперприведённой, поскольку отбрасывание операторов резолюций, о которых идёт речь в *замечании* **24**, хотя и не изменяет выполнимости, но оно может приводить к восстановлению *исходов* **1**, поэтому мы можем говорить, что *таблица* **36** (без последних *трёх* операторов) почти приведена.

Для полного её приведения выполним анализ сначала. Он приводит в *таблице* **36** во *втором* и *четвёртом* вариантах к последовательностям:

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T		
$6^\bullet 4^*$					τ				T	T^*
5^+						$\bar{\tau}$	T	T	T	T^*
					τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*
$6^*.4^\bullet$							τ		T	T^*

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^*			$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*
2^*			τ				T^*		T^*	
					τ		T^*		T^*	T^*
			τ		E^*		T^*		T^*	L

Теперь уже для почти приведённой таблицы оператор $6^*.4^\bullet$, являющийся резолюцией в свёртке $6^*.4^*$, мы не отбрасываем, а дополнительно включаем в таблицу и, таким образом, *таблица* **36**, из которой исключены *два* оператора (**черта** против них в служебном столбце) и добавлены *три* — уже является суперприведённой таблицей.

Таблица 36

		1	T^*	4	**5**	**4**	**4**	**4**	**4**				4	
	3	5	4	T^*	5	4	4	4	**4**			3		
				1	5	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**		2			
	2	5	4	5	T	5	5	T^*	4	1				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$				
		$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	5	**5**	
			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			4	5	7	**7**	
	τ	T^*		T			T			2		7	**7**	
τ	T			T				T		1^*		8	**8**	
	τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	4	3	
		τ				T^*		T^*		8	**8**	2	2^*	—
					τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	5^*	$\mathbf{5}^*$	
				τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	5	**5**	
	$\bar{\tau}$		T				T		T^*	3		7	**7**	
		τ			T^*	T^*			T^*	6	**6**	5	**5**	
		$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*	8	**8**	4	2^*	
	τ		T		T			T		5		8	**8**	
				$\bar{\tau}$	T	T	T			5	4^*	7	**7**	
			E	T^*	L	T	T			4	5.	7	**7**	
		τ	T				T	T		3		8	**8**	
$\bar{E}$	T	T		R				T		1		8	**8**	
									$\bar{\tau}$	9^*	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	
			$\bar{\tau}$		E^*	T	L	T	T^*	7.3^*	**7.**	8	**8**	
							τ	T	T^*	7^*	$\mathbf{7}^*$	8	**8**	
	τ	$\bar{E}^*$	T^*	T		T^*		R		6	**6**	8.1^*	**8.**4	
		E	T^*	R		L		R	T^*	6.2^*	**6.**	8.2^*	**8.**3	
			$\bar{E}$	T		T^*		R	T^*	6	**6**	8.3^*	**8.**4	
				τ		E^*		T	T^*	$6^*.4^*$	$\mathbf{6}^*.4^*$	—	—	—
				$\bar{\tau}$		T^*	T			6	**6**	7	**7**	
							$\bar{\tau}$	T^*		8	**8**	7^*	$\mathbf{7}^*$	
		E	T^*		T^*	T	L			7.2	**7.**	6	**6**	
			$\bar{\tau}$		E^*	T	T^*		T^*	7	**7**	6	**6**	
					$\bar{E}$	T	T^*		L	7	**7**	6^*	$\mathbf{6}^*$	
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*			8	**8**	
						τ		T	T^*			8	**8**	
		τ		E^*		T^*		T^*	L					

7.3.3 Ещё пример на суперприведение задачи ВЫП в системе Q_3''.

Прежде чем формулировать совокупность требований, следуя которым нужно осуществлять суперприведение **таблицы задачи ВЫП**, рассмотрим ещё один пример. В этом примере рассмотрим суперприведение **задачи ВЫП**, представленное в *таблице* **37** (без последних **8**–и операторов, являющихся результатом преобразования таблицы). Эта таблица на самом деле есть та же *таблица* **28**, в которой переставлены строки, а переставлены они так, чтобы указатели в служебном столбце были записаны в порядке их неубывания, при условии заполнения служебной строки так, чтобы условно исключать максимально возможное число строк, при условии того, что столбцы не переставляются.

Результаты анализа, исключение и включение операторов в таблицу, то есть совокупность всех преобразований, можно проследить по *таблицам* **37** — **40**.

Чтобы легче можно было проследить за этими преобразованиями, приводим список всех последовательностей. Вот эти последовательности.

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	$\bar{\tau}$	T	T						T		$\bullet$
0^*	τ	T			T				T		1
1^+		$\bar{\tau}$	T		T				T		1
1^*		τ		T^*	T		T^*				2
2^+			$\bar{\tau}$	T^*	T		T^*		T		2
2^*			τ	T^*						T^*	$\bullet$
3^+				τ	T		T^*		T	T^*	–
3^*				$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	$\bullet$
4^+					$\bar{\tau}$		T^*		T	T^*	–
4^*					τ				T	T^*	3
6^+							τ		T	T^*	3
	E	T	R		T				T		1
		τ	$\bar{E}^*$	T^*	T		T^*		R		2
					τ		$\bar{E}^*$		T	T^*	3

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*						T^*	•
2^*			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			1
3^+				τ		T^*		T^*		T^*	1
3^*				$\bar\tau$			T		T	T^*	•
5^+						τ	T	T^*	T	T^*	–
5^*						$\bar\tau$	T	T^*			•
6^+							$\bar\tau$	T^*	T	T^*	–
$6^*.4^*$					τ				T	T^*	•
							τ		T	T^*	2
7^*								τ	T	T^*	2
			$\bar E$	T^*		T^*		T^*		L	1
							τ	E^*	T	T^*	2

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					$\bar\tau$	T	T	T			•
4^*					τ				T	T^*	1
5^+						$\bar\tau$	T	T	T	T^*	1
					τ	$\bar E^*$	R	R	T	T^*	1

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	•
2^*			τ				T^*		T^*		1
4^+					τ		T^*		T^*	T^*	1
			τ		E^*		T^*		T^*	L	1

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*						T^*	$\bullet$
2^*			$\bar{\tau}$	T^*					T^*	T^*	1
3^+				τ	T^*				T^*	T^*	1
3^*				$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	2
4^+					τ		T	T^*	T^*	T^*	2
			$\bar{\tau}$	E^*	T^*				T^*	T^*	1
				$\bar{\tau}$	E^*		T	T^*	L	T^*	2

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3^*			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			$\bullet$
				τ		T^*		T^*		T^*	$\bullet$
$4^*.3^*$				$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	—
					τ		T	T^*	T^*	T^*	
5^+						τ	T	T^*		T^*	—
5^*						$\bar{\tau}$	T	T^*			1
6^+							$\bar{\tau}$	T^*		T^*	1
						$\bar{E}$	T	T^*		L	1

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3^*				$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			$\bullet$
3^*				τ	T^*		T	T			1
4^+					τ	T^*	T	T			1
4^*					$\bar{\tau}$		T	T	T^*		—
5^+						τ	T	T	T^*		—
5^*						$\bar{\tau}$		T	T^*		2
6^+							$\bar{\tau}$	T	T^*		2
				E	T^*	L	T	T			1
						$\bar{\tau}$	$\bar{E}^*$	T	T^*		2

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					τ	T^*	T^*		T^*		$\bullet$
4^*					$\bar{\tau}$		T^*	T			1
5^+						τ	T^*	T	T^*		–
$6^*.5^*$						$\bar{\tau}$		T	T^*		–
							$\bar{\tau}$	T	T^*		–
6^+							τ	T	T^*		–
7^+								$\bar{\tau}$	T^*		1
					$\bar{\tau}$		E	T	L		1

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	$\bar{\tau}$	T	T						T		$\bullet$
0^*	τ				T^*		T			T	1
1^+		$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T	1
1^*		τ		T		T			T		2
2^+			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T	2
2^*			τ	T				T	T		$\bullet$
3^+				$\bar{\tau}$	T^*	T	T	T	T	T	–
5.3^*				τ	T^*		T	T			$\bullet$
					τ	T^*	T	T			$\bullet$
4^+					τ	T	T	T	T	T	–
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T			3
5^+						$\bar{\tau}$	T	T	T	T	3
	$\bar{\tau}$	$\bar{E}^*$	R		T^*		T		R	T	1
		τ	$\bar{E}^*$	T	L	T	R		T	R	2
					$\bar{E}$	T	T	T	R	R	3

Таблица 37

	2	5	4	5	4	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}$				4
				1	T^*	5	5	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}$			3	
		1	4	5	4	5	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}$		2		
1	5	5	4	5	T^*	T	T	T^*	T	1			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$			
$\bar\tau$	T	T						T		0^*			1
τ	T			T				T		0^*	–	–	–
	τ		T^*	T		T^*				1^*	–	–	–
		τ	T^*						T^*	2^*	2^*		1^*
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	3^*	6	6	**6**
	τ		T		T			T		3	5		5
				τ				T	T^*	4^*	–	–	–
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			5	2^*	–	–
		τ			T^*	T^*			T^*	5	6	6	**6**
					$\bar\tau$	T	T^*			6	5^*	7	**7**
			$\bar\tau$			T		T	T^*	6	3^*		3^*
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	6	3	7	**7**
		τ	T^*		T^*	T				6		5	1
				$\bar\tau$		T^*	T			7	**7**	6	**6**
				$\bar\tau$	T	T	T			7	**7**	4^*	5
			τ	T^*		T	T			7	**7**		4
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			7	**7**	5	4
		τ	T				T	T		7	**7**		3
	τ	T^*		T			T			7	**7**		1
	$\bar\tau$		T				T		T^*	7	**7**		3
					τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	**8**
					$\bar\tau$		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**
				τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**
				$\bar\tau$		T	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	8	**8**	**8**	**8**
		τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**
		τ				T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**
	τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	**8**
							τ	T	T	9	**9**	**9**	**9**
					$\bar\tau$	T^*	T		T	9	**9**	**9**	**9**
			τ	T	T				T	9	**9**	**9**	**9**
			τ			T^*			T	9	**9**	**9**	**9**
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	9	**9**	**9**	**9**
		τ	T				T^*		T	9	**9**	**9**	**9**
		$\bar\tau$	T			T^*			T	9	**9**	**9**	**9**
		τ				T			T	9	**9**	**9**	**9**
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T	9	**9**	**9**	**9**
	τ	T			T^*				T	9	**9**	**9**	**9**
$\bar\tau$			T		T^*				T	9	**9**	**9**	**9**
τ				T^*		T			T	9	**9**	**9**	**9**
E	T	R		T				T					1^*
	τ	$\bar E^*$	T^*	T		T^*		R			6	6	**6**
				τ		$\bar E^*$		T	T^*		$6^*.4^*$	–	–
				τ				T	T^*			4^*	–
		$\bar E$	T^*		T^*		T^*		L			7	**7**
						τ	E^*	T	T^*			$7^*.6^*$	$\mathbf{7}^*.\mathbf{6}^*$
				τ	$\bar E^*$	R	R	T	T^*				$5^*.4^*$

Таблица 38

				1	4	4	**5**	**4**	**T**						10	
			1	4	4	T^*	5	**4**	**T**					9		
			1	5	**4**	**5**	**T**	**4**	**T**				8			
		1	4	T	4	5	**T**	**4**	**T**			7				
		1	T	4	**5**	**T**	**T**	**4**	**T**		6					
	3	5	4	T^*	5	T	T	4	**T**	5						
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$						
$\bar\tau$	T	T						T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
		τ	T^*						T^*	2^*		2^*				
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	3^*	4	6	**6**	6		
	τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
		τ			T^*	T^*			T^*	5	**5**	6	**6**	6		
					$\bar\tau$	T	T^*			6	**6**	5^*	$\mathbf{5}^*$	–	–	–
			$\bar\tau$			T		T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	6	**6**	3^*	–	–	–	–
		τ	T^*		T^*	T				6	**6**				6	
				$\bar\tau$		T^*	T			7	**7**	**7**	**7**	6	4^*	–
				$\bar\tau$	T	T	T			7	**7**	**7**	**7**	5	6	
			τ	T^*		T	T			7	**7**	**7**	**7**	3^*	–	–
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			7	**7**	**7**	**7**	3^*		
		τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
	τ	T^*		T			T			7	**7**	**7**	**7**	4		
	$\bar\tau$		T				T		T^*	7	**7**	**7**	**7**			
					τ	T^*	T^*	T^*		5^*	$\mathbf{5}^*$	6	**6**	7	**7**	
					$\bar\tau$		T	T^*		7	**7**	**7**	**7**	5^*	–	–
				τ	T^*	T^*		T^*		5	**5**	6	**6**	6	4^*	
				$\bar\tau$		T	T	T^*		7	**7**	**7**	**7**	4^*	–	–
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	4	2^*	2^*	–	–	–	–
		τ			T^*		T	T^*		7	**7**	**7**	**7**			
		τ				T^*		T^*		2	2^*	–	–	–	–	–
		τ		T^*	T^*			T^*		5	**5**		4			
E	T	R		T				T		8	**8**	**8**	**8**	**8**		
	τ	$\bar{E}^*$	T^*	T		T^*		R		8.1^*	**8.**4	**8.**6	**8.6**	**8.**6	**8.**	
		$\bar{E}$	T^*		T^*		T^*		L	5	**5**		3^*	7	**7**	
						τ	E^*	T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
		τ		E^*		T^*		T^*	L			6	**6**	6		
		$\bar\tau$	E^*	T^*				T^*	T^*				4			
			$\bar\tau$	E^*		T	T^*	L	T^*				$4^*.3^*$	–	–	–
					$\bar{E}$	T	T^*		L					7	**7**	
			E	T^*	L	T	T								6	
					$\bar\tau$	$\bar{E}^*$	T	T^*							$6^*.5^*$	–
				$\bar\tau$		E	T	L								

Таблица 39

			1	4	4	4	**5**	**T***	**5**				14	
		1	4	**5**	**4**	**T***	**5**	**T***	**5**			13		
1	5	5	T^*	5	4	**T***	**5**	**T***	**5**		12			
1	5	5	5	4	T^*	T^*	5	T^*	5	11				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{l}$				
$\bar{\tau}$	T	T						T		O^*				
		τ	T^*						T^*	9	**9**	**9**	**9**	
			$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**	
	τ		T		T			T		1^*	—	—	—	—
		τ			T^*	T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**	
			$\bar{\tau}$			T		T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
		τ	T^*		T^*	T				5	3	2^*	6	
				$\bar{\tau}$	T	T	T			4^*	—	—	—	—
			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			5	4	**4**	3^*	
		τ	T				T	T		2^*	2^*	—	—	—
	τ	T^*		T			T			4	2			
	$\bar{\tau}$		T				T		T^*	9	**9**	**9**	**9**	
					τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	**8**	
				τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	
		τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	
		τ		T^*	T^*			T^*		8	**8**	**8**	**8**	
							τ	T	T	7^*	**7***	**7***	**7***	—
					$\bar{\tau}$	T^*	T		T	6	**6**	**6**	5^*	—
			τ	T	T				T	4	5	**5**	5	
			τ			T^*			T	6	**6**	**6**	3^*	—
		$\bar{\tau}$			T^*		T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	
		τ	T				T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	
		$\bar{\tau}$	T			T^*			T	6	**6**	**6**		
		τ				T			T	2	2		6	
	$\bar{\tau}$			T^*		T^*			T	6	**6**	**6**		
	τ	T			T^*				T	5	1^*			
$\bar{\tau}$			T		T^*				T	5		3		
τ				T^*		T			T	0^*	—	—	—	—
E	T	R		T				T		4	1^*	—	—	—
	τ	$\bar{E}^*$	T^*	T		T^*		R		6	**6**	**6**		
		$\bar{E}$	T^*		T^*		T^*		L	9.7	**9.7**	**9.7**	**9.7**	
						τ	E^*	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
		τ		E^*		T^*		T^*	L	9.8	**9.8**	**9.8**	**9.8**	
		$\bar{\tau}$	E^*	T^*				T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
					$\bar{E}$	T	T^*		L	9.7	**9.7**	**9.7**	**9.7**	
			E	T^*	L	T	T			5.3^*	4^*	**4***	6	
				$\bar{\tau}$		E	T	L		8.6	**8.6**	**8.6**	**8.4***	
τ	$\bar{E}^*$	R		T^*		T		R	T		4	**4**	6	
	τ	$\bar{E}^*$	T	L	T	R		T	R		5	**5**	6.5	
				$\bar{E}$	T	T	T	R	R		5^*	**5***	—	—
τ	T			T				T					4	
	$\bar{E}$	T		T	L			T	R			2^*	—	—
		E	T	R	L		T	T	R			3^*	—	—
	$\bar{\tau}$	T		T				T					4	
		$\bar{\tau}$	E^*	T	T^*	R		T	T				6.4	
		$\bar{E}$	T	R	L		T	T	R				4.	
				$\bar{\tau}$	$\bar{E}$	T	T	R	R				6^*	—

Таблица 40

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
			1	4	**5**	**4**	**4**	**4**	**5**				18	
		1	5	T^*	5	4	**4**	**4**	**5**			17		
		1	4	$\mathbf{T}^*$	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**4**	**5**		16			
		1	T^*	T^*	4	T^*	4	4	**5**	15				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$				
$\bar\tau$	T	T						T		8	**8**	**8**	**8**	
		τ	T^*						T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
		τ			T^*	T^*			T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$			T		T	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
		τ	T^*		T^*	T				3		6	**6**	
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T			7	**7**	**7**	**7**	
	τ	T^*		T			T			7	**7**	**7**	**7**	
	$\bar\tau$		T				T		T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
					τ	T^*	T^*	T^*		6	**6**	5^*	$\mathbf{5}^*$	
				τ	T^*	T^*		T^*		6	**6**	5	**5**	
		τ			T^*		T	T^*		7	**7**	**7**	**7**	
		τ		T^*	T^*			T^*		4	**4**	5	**5**	
			τ	T	T				T	5	**5**	3^*	–	–
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	2^*	–	–	–	–
		τ	T				T^*		T	2^*	–	–	–	–
		$\bar\tau$	T			T^*			T	6	**6**	2^*	–	–
		τ				T			T		2^*	–	–	–
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T	6	**6**	4		
	τ	T			T^*				T			5	**5**	–
$\bar\tau$			T		T^*				T			5	**5**	–
	τ	$\bar E^*$	T^*	T		T^*		R		8.6	**8.6**	**8.**3	**8.**4	
		$\bar E$	T^*		T^*		T^*		L	**9.**3	**9.**2*	**9.**3	**9.**	
						τ	E^*	T	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
				τ	$\bar E^*$	R	R	T	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
		τ		E^*		T^*		T^*	L	**9.**6	**9.6**	**9.**2*	**9.**	
		$\bar\tau$	E^*	T^*				T^*	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	
					$\bar E$	T	T^*		L	**9.**5*	**9.5***	**9.**6	**9.6**	
			E	T^*	L	T	T			7	**7**	**7**	**7**	
				$\bar\tau$		E	T	L		7^*	**7***	**7***	**7***	
τ	$\bar E^*$	R		T^*		T		R	T	8.4	**8.4**	**8.**6	**8.6**	–
	τ	$\bar E^*$	T	L	T	R		T	R	8	**8**	**8**	**8**	•
τ	T			T				T		8	**8**	**8**	**8**	
	$\bar\tau$	T		T				T		8	**8**	**8**	**8**	
		$\bar\tau$	E^*	T	T^*	R		T	T	8	**8**	**8**	**8**	–
		$\bar E$	T	R	L		T	T	R	8	**8**	**8**	**8**	•
			τ		E^*	T^*	R		T	7.6	**7.6**	**7.**3	**7.**3*	–
					$\bar E$	T^*	T		T	7	**7**	**7**	**7**	–
				$\bar\tau$	T	T	T	$\bar E^*$	R	8*.7	**8.*7**	**8.*7**	**8.*7**	–
		E	T		L		T^*		T		3^*	5.	**5.**	–
		E				T	L		T			6^*	**6***	–
		$\bar E$	T			T^*		L	T				3^*	–
			E	T	T	L		L	T				4^*	–
				$\bar\tau$	T	T	T							
									$\bar\tau$					

12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1^*		τ	T			T^*				T	•
1^*	τ	T			T				T		•
		$\bar{\tau}$	T		T				T		1
2^+			$\bar{\tau}$		T	T^*			T	T	1
2^*			τ	T				T	T		2
3^+				$\bar{\tau}$	T	T^*		T	T	T	2
		$\bar{E}$	T		T	L			T	R	1
			E	T	R	L		T	T	R	2

13	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*		T^*	T				•
2^*		$\bar{\tau}$	T		T				T		•
			$\bar{\tau}$		T	T^*			T	T	1
3^+				τ	T	T^*	T		T	T	1
3^*			τ	T				T	T		2
				$\bar{\tau}$	T	T^*		T	T	T	2
4^+					$\bar{\tau}$	T^*	T	T	T	T	—
4^*				τ	T^*		T	T			•
					τ	T^*	T	T			•
5^+						τ	T	T	T	T	—
5^*					$\bar{\tau}$	T	T	T			3
						$\bar{\tau}$	T	T	T	T	—
							$\bar{\tau}$	T	T	T	3
			$\bar{\tau}$	E^*	T	T^*	R		T	T	1
			$\bar{E}$	T	R	L		T	T	R	2
					$\bar{\tau}$	$\bar{E}$	T	T	R	R	3

14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3^*				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			•
3^*				τ			T^*			T	1
4^+					τ	T^*	T^*	T		T	–
8.4^*					$\bar\tau$		T^*	T			•
								$\bar\tau$	T^*		•
5^+						τ	T^*	T		T	1
5^+						$\bar\tau$	T^*	T		T	2
6^+							τ	T		T	2
6^*					$\bar\tau$	T	T	T			3
							$\bar\tau$	T	T	T	–
7^+								$\bar\tau$	T	T	–
7^*								τ	T	T	–
8^+									$\bar\tau$	T	3
				τ		E^*	T^*	R		T	1
						$\bar E$	T^*	T		T	2
					$\bar\tau$	T	T	T	$\bar E^*$	R	3

15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T				T^*		T	1
2^*			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	–
3^+				$\bar\tau$		T^*		T^*		T	1
			E	T		L		T^*		T	1

16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
9.2^*			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			•
				τ		T^*		T^*		T^*	•
2^*			τ				T			T	1
3^+				τ		T^*	T	T^*		T	–
3^*			τ	T				T^*		T	•
				$\bar\tau$		T^*		T^*		T	•
5^+						τ	T	T^*		T	–
9.5^*						$\bar\tau$	T	T^*			•
							$\bar\tau$	T^*		T^*	•
6^+							$\bar\tau$	T^*		T	1
			E				T	L		T	1

17	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar{\tau}$	T			T^*			T	1
9.2^*			τ				T^*		T^*		•
					τ		T^*		T^*	T^*	•
3^+				$\bar{\tau}$			T^*		T^*	T^*	1
3^*				τ	T	T				T	2
4^+					$\bar{\tau}$	T	T^*		T^*	T	2
			$\bar{E}$	T			T^*		L	T	1
				E	T	T	L		L	T	2

18	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
7.3^*				τ			T^*			T	–
						τ	T^*	T		T	–
3^*			$\bar{\tau}$	T			T^*			T	–
				$\bar{\tau}$			T^*		T^*	T	–
6^+							τ		T^*	T	–
6^*			τ				T			T	–
							$\bar{\tau}$	T^*		T	–
7^+								τ	T^*	T	–
7^*					$\bar{\tau}$		T^*	T			•
								$\bar{\tau}$	T^*		•
8^+									τ	T	–
$8^*.7$					$\bar{\tau}$	T	T	T			•
									$\bar{\tau}$	T	–
9^+										$\bar{\tau}$	•

Теперь обратим внимание на то, что в *последовательностях* **1 — 18** свёртки операторов, получивших пометки $*$ (*звёздочкой*), представлены в развёртке двух операторов, а в самом *правом* столбце последовательности операторов имеется указание (с помощью номеров): какие *два* оператора (у них одинаковые номера) дают в свёртке результирующий оператор (с тем же номером). Это позволяет легче проследить за всеми преобразованиями с тем, чтобы накопить опыт работы и лучше уяснить себе весь процесс преобразования таблиц. При этом всегда самый *последний* резолюционный оператор последовательности используется как **пропалывающий** (поглощающий): если этот оператор поглощает какой–нибудь из операторов последовательности, то против него указывается – (**черта**). Кроме того, если оператор записан в последовательности, но в таблице оставлен без изменения, против него указывается $\bullet$ (**точка**).

Таблица 41

	3	5	4	5	5	4	4	4	4		2
	2	5	4	5	4	5	5	T^*	4	1	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$	
$\bar{\tau}$	T	T						T		1	8
		τ	T^*						T^*	2	2
			$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	3	3
		τ			T^*	T^*			T^*	2	5
			$\bar{\tau}$			T		T	T^*	3	8
		τ	T^*		T^*	T				2	6
			$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			4	7
	τ	T^*		T			T			2	7
	$\bar{\tau}$		T				T		T^*	3	7
					τ	T^*	T^*	T^*		8	5
				τ	T^*	T^*		T^*		8	5
		τ			T^*		T	T^*		8	7
		τ		T^*	T^*			T^*		8	5
	τ	$\bar{E}^*$	T^*	T		T^*		R		6	8.1
		$\bar{E}$	T^*		T^*		T^*		L	7	5
						τ	E^*	T	T^*	7.6	8
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*	5.4	8
		τ		E^*		T^*		T^*	L	8	4.2
		$\bar{\tau}$	E^*	T^*				T^*	T^*	8	4
					$\bar{E}$	T	T^*		L	7	6
			E	T^*	L	T	T			4	7
				$\bar{\tau}$		E	T	L		8.6	7
	τ		T		T			T		5	8
τ	T			T				T		1	8
	$\bar{\tau}$	T		T				T		1	8
		$\bar{\tau}$	T				T	T		3	8
				$\bar{\tau}$	T	T	T			5	7
									$\bar{\tau}$	9	9

Итак, сопоставив результаты анализа в таблицах **37** — **40** и проследив за *последовательностями* **1** — **18**, указывающими, какие операторы из таблиц исключаются, какие включаются, а какие остаются без изменения, мы в конце концов приходим к результату, представленному в *таблице* **41**. Эта таблица является суперприведённой для *таблицы* **37**, а значит и для *таблицы* **28**. То, что это действительно так, видно из проверки, представленной в *таблице* **41**.

Замечание 29. Сопоставляя решение **задачи ВЫП** в системах Q'_3 и Q''_3, легко обнаружить, что, по крайней мере, на примере задачи, представленной в *таблице* **28**, эти решения имеют примерно одинаковую сложность, но система Q''_3 содержит меньше копродукций. Более того, можно обнаружить и то, что при решении задачи в системе Q''_3 использовались лишь *два* комбинатора, правда, последнее было достигнуто благодаря некоторому жёсткому требованию: выполнять конъюнкцию над результатом резолюции и *вторым* оператором согласованной пары с *исходом* **1**, при этом само следование операторов в паре тоже было закреплено. И, таким образом, мы фактически работали не в системе Q''_3, а в некотором её сужении, то есть в системе

$$Q^+_3 \rightleftharpoons Q''_3 \setminus \{\, R^*,\, L^* \,\} = \{\, T,\, T^*,\, M,\, R,\, L,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^* \,\}.$$

7.3.4 Итоговый алгоритм суперприведения задачи ВЫП.

Накопленный опыт по суперприведению показывает, что суперприведение может выполняться различными способами, однако в спектре этих возможностей следует сделать выбор в пользу эффективности его осуществления. Один из способов оценки эффективности требует, прежде всего, снять неопределённость в некоторых пунктах его реализации. Поэтому, сначала мы представим алгоритм суперприведения в укрупнённом виде, затем детализируем его и потом объясним его. Объяснение будет иллюстрироваться на примере решения задачи из *таблицы* **42** (без последних *четырёх* операторов), преобразование которой иллюстрируется *таблицами* **42** — **45** и последовательностями операторов **1** — **16** (номера вариантов последовательностей указаны в верхних левых углах соответствующих таблиц).

Преобразования выполняются в системе продукций Q^+_3, определение которой дано в *замечании* **29**.

Алгоритм суперприведения.

1° . Над таблицей *задачи* **ВЫП** выполняется анализ, который может прерываться переходом на 2°, если анализ привёл к *исходу* **1**, или закончится, если процесс суперприведения завершён.

2° . По операторам таблицы, отмеченным указателем со $*$ (*звёздочкой*), составляем последовательность операторов.

3° . По последовательности операторов в таблице *задачи* **ВЫП** выполняем замену одних операторов на другие операторы и переходим на 1°.

А сейчас остановимся на детализации каждого из пунктов алгоритма.

1°. В исходной таблице *задачи* **ВЫП** все операторы записаны в системе продукций Q_3, поэтому система исходов для таких операторов совпадает с системой исходов в перечне исходов из **7.2.1**. Однако в результате преобразований образуются свёртки операторов, которые содержат копродукции и комбинаторы и которыми заменяются исходные операторы, то есть имеем дело с операторами в системе Q_3^+. Поэтому в анализе таблицы должно быть учтено правило условного исключения оператора (включая *замечание* **22**) из **7.3.1**.

Аналогично тому, как это делалось выше, результаты анализа (номера исходов) записываются в служебную строку, если этот *номер* не **6**. В том случае, когда имеется *исход* **6а)** в служебную строку записываем M, а в случае **6б)** записываем T или T^* (строго говоря, выбор соответствующей продукции является произвольным, но лучше (и это считаем принятым) выбирать ту из продукций, которая в ведущем столбце имеет меньшее вхождение; случай *нулевого* вхождения не исключается).

Перед тем как перейти к анализу столбца с номером $k-1$ (к такому анализу переходим лишь в том случае, когда номер *исхода* для k–го столбца больше **3**), произведём разбивку таблицы, *условно исключив* из неё строки (строка считается *условно исключённой*, если в служебном столбце против неё указан номер ведущего столбца из **I** служебной строки) в соответствии с номером исхода, а именно, для исходов с номером:

4) исключаются строки с продукциями $\bar{\tau}$ и T,

5) исключаются строки с продукциями τ и T^*,

6) в случае **а)** никаких строк не исключается, а в случае **б)** исключаются строки с той продукцией, которая выбрана в служебной строке, соответствующей этому исходу.

Таблица 42

		1	T	T	4	5	**4**	**T**	**T***	4				
		1	5	T	5	T	4	**T**	**T***	3				
			1	4	4	5	**T***	**T**	**T***	2				
				1	4	T	T^*	T	T^*	1				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$				
$\bar\tau$			T		T^*				T			5	3	
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T		6		6	
		$\bar\tau$	T			T^*			T		6	2^*	6	
			$\bar\tau$	T^*	T^*		T				3^*	–	–	–
				τ	T^*	T^*		T^*		4^*	6	5	6	
	τ	T			T^*				T			5		
		τ				T^*		T^*			6	2^*	6	
		τ			T^*		T	T^*				7	**7**	
			τ			T^*			T		6	3^*	–	–
	τ		T^*	T^*				T^*				3		
				$\bar\tau$		T^*	T			4^*	6	7	**7**	
	τ		T^*	T		T^*					6	4	6	
	τ	T^*		T			T				4	7	**7**	
					$\bar\tau$		T	T^*		5^*	–	–	–	–
					$\bar\tau$	T^*	T		T	5	6	7	**7**	
			τ	T	T				T	5	5	4	5	
				$\bar\tau$		T	T	T^*		6	4^*	–	–	–
				$\bar\tau$	T	T	T			6	5	7	**7**	
			τ	T^*		T	T			6	3^*	–	–	–
		τ	T^*		T^*	T				6		6		
		τ				T			T	6		6	2^*	–
τ				T^*		T			T	6		6		
					$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	6	5^*	–
					τ	T^*	T^*	T^*		7	**7**	5^*	6	
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	5		
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**	5	2^*	
		τ	T				T^*		T	7	**7**		3	
							τ	T	T	8	**8**	**8**	**8**	
		τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**	
	τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**	
$\bar\tau$	T	T						T		8	**8**	**8**	**8**	
τ	T			T				T		8	**8**	**8**	**8**	
				τ				T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$			T		T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**	
		τ	T^*						T^*	9	**9**	**9**	**9**	
		τ			T^*	T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**	
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	
	$\bar\tau$		T				T		T^*	9	**9**	**9**	**9**	
					$\bar\tau$	E^*	T	T^*			$6^*.5^*$	–	–	–
			τ	T^*		$\bar{E}$	T	L				7^*	**7***	
			$\bar{E}$	T^*	T^*	R	T					7	**7**	
			E			T^*		L	T				6^*	–

Таблица 43

1	5	5	5	4	5	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$			7	
1	5	5	T^*	5	T	5	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$		6		
			1	4	4	T	5	5	$\mathbf{T}^*$	5			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$			
$\bar\tau$			T		T^*				T			5	–
	$\bar\tau$			T^*		T^*			T		6	**6**	–
		$\bar\tau$	T			T^*			T		6	**6**	–
				τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	**8**	
	τ	T			T^*				T		1^*	–	–
		τ				T^*		T^*		8	**8**	**8**	
		τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	
	τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	
				$\bar\tau$		T^*	T			4^*	–	–	–
	τ		T^*	T		T^*				4	6	**6**	
	τ	T^*		T			T			4	2	4	
					$\bar\tau$	T^*	T		T	5^*	6	**6**	–
			τ	T	T				T	5	6	4	–
				$\bar\tau$	T	T	T			6	5	4^*	
		τ	T^*		T^*	T				6	3	3	
τ				T^*		T			T	6	4	0^*	–
					τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	**7**	
		$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**	**7**	–
		τ	T				T^*		T	7	**7**	**7**	–
							τ	T	T	7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	–
		τ	T				T	T			2	2^*	
	τ		T		T			T		5	5	1^*	
$\bar\tau$	T	T						T			0^*	–	–
τ	T			T				T		4	0^*	–	–
				τ				T	T^*	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$			T		T	T^*	**9**	**9**	**9**	
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	**9**	**9**	**9**	
		τ	T^*						T^*	**9**	**9**	**9**	
		τ			T^*	T^*			T^*	**9**	**9**	**9**	
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	**9**	**9**	**9**	
	$\bar\tau$		T				T		T^*	**9**	**9**	**9**	
			τ	T^*		$\bar E$	T	L		8.6	**8.**4	**8.**3^*	
			$\bar E$	T^*	T^*	R	T			6.3^*	4^*	5	
			τ			T^*		E^*	T	8^*.3^*	$\mathbf{8}^*$.6	$\mathbf{8}^*$.**6**	–
					$\bar E$	T	T^*		R	7	**7**	**7**	•
		τ			E^*	T	L		T	7.6	**7.**2^*	**7.**2	–
				$\bar E$		T^*	T		R		6^*	$\mathbf{6}^*$	•
	τ	$\bar E$			T^*	R	R	R	T			5^*	–
τ	$\bar E$			T	L	R		T	R			5.	•
$\bar\tau$	$\bar E$	T		R	L			T	R			5.0^*	•

Таблица 44

	2	5	4	5	4	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	**5**	**4**						13
				1	T^*	T^*	T^*	5	**4**					12	
		1	4	5	**4**	**5**	**4**	**T**	**4**				11		
		1	4	T	4	5	**4**	**T**	**4**			10			
	3	5	4	5	**5**	**T**	**4**	**T**	**4**		9				
		1	T	T	5	T	4	T	4	8					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$					
				τ	T^*	T^*		T^*		5	**5**	6	**6**	8	**8**
		τ				T^*		T^*		2^*	—	—	—	—	—
		τ			T^*		T	T^*		7	**7**	**7**	**7**	8	**8**
	τ		T^*	T^*				T^*			4		4	8	**8**
	τ		T^*	T		T^*				4	1^*	6	**6**	6	**6**
	τ	T^*		T			T			7	**7**	**7**	**7**		2
				$\bar\tau$	T	T	T			7	**7**	**7**	**7**	4^*	5
		τ	T^*		T^*	T				6	**6**		2^*	5	2^*
					τ	T^*	T^*	T^*		5^*	$\mathbf{5}^*$	6	**6**	8	**8**
		$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			5	**5**		2^*	—	—
		τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**		3
	τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**		5
				τ				T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	4^*	—
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*	4	3^*	6	**6**	6	**6**
			$\bar\tau$			T		T	T^*	8	**8**	**8**	**8**		3^*
			$\bar\tau$			T	T^*		T^*	6	**6**	3^*	—	—	—
		τ	T^*						T^*		2	2^*			2
		τ			T^*	T^*			T^*	5	**5**	6	**6**	6	**6**
		$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	2^*	4	2^*	—	—	—
	$\bar\tau$		T				T		T^*	7	**7**	**7**	**7**		3
			τ	T^*		$\bar{E}$	T	L		7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	8.	**8.**4
			$\bar{E}$	T^*	T^*	R	T			7	**7**	**7**	**7**	5	4
					$\bar\tau$	T	T^*			6	**6**	5^*	$\mathbf{5}^*$	—	—
				$\bar\tau$		T^*	T			7	**7**	**7**	**7**	6	**6**
τ	T			T				T		8	**8**	**8**	**8**		1^*
$\bar\tau$	T	T						T		8	**8**	**8**	**8**		1^*
									$\bar\tau$	9^*	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$
		τ		E^*		T^*		T^*	L		$4^*.2^*$	6	**6**	8	**8**
			$\bar\tau$	E^*		T	T^*	L	T^*				$4^*.3^*$	—	—
		$\bar\tau$	E^*	T^*				T^*	T^*				4	8	**8**
					$\bar{E}$	T	T^*		L					7	**7**
		$\bar{E}$	T^*		T^*	R	T^*							7	**7**
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*						$5^*.4^*$

Таблица 45

1	5	5	4	5	5	**4**	**4**	**5**	**4**			16	
		1	4	5	T	4	4	**5**	**4**		15		
				1	T	4	$\mathbf{T}^*$	**5**	**4**	14			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$			
				τ	T^*	T^*		T^*		**8**	**8**	**8**	
		τ			T^*		T	T^*		**8**	**8**	**8**	
	τ		T^*	T^*				T^*		**8**	**8**	**8**	
	τ		T^*	T		T^*						1*	—
	τ	T^*		T			T				7	**7**	
				$\bar\tau$	T	T	T			6	7	**7**	
		τ	T^*		T^*	T				6	6	**6**	
					τ	T^*	T^*	T^*		**8**	**8**	**8**	
		τ	T				T	T			7	**7**	
	τ		T		T			T		5	5	3	
			$\bar\tau$	T		T^*			T^*		3*	—	—
			$\bar\tau$			T		T	T^*	6	6	**6**	
		τ	T^*						T^*			2*	—
		τ			T^*	T^*			T^*		2*	—	—
	$\bar\tau$		T				T		T^*		3	3	
			τ	T^*		$\bar E$	T	L		**8**.6	**8**.7	**8.7**	
			$\bar E$	T^*	T^*	R	T			6.	7	**7**	
				$\bar\tau$		T^*	T			4*	—	—	—
τ	T			T				T				0*	—
$\bar\tau$	T	T						T				0*	—
									$\bar\tau$	**9***	**9***	**9***	
		τ		E^*		T^*		T^*	L	**8**	**8**	**8**	
		$\bar\tau$	E^*	T^*				T^*	T^*	**8**	**8**	**8**	
					$\bar E$	T	T^*		L	**7**	6*	**6***	
		$\bar E$	T^*		T^*	R	T^*			**7**	6.2*	**6.**5	
				τ	$\bar E^*$	R	R	T	T^*	6.4*	7.4*	**7.**4*	
				$\bar E$		T^*	T	R	L		7	**7**	
			$\bar\tau$	T	E^*	T^*	L	R	T^*			5*.3*	—
		τ		$\bar E^*$	T^*	T^*	L		T^*			5	
			$\bar\tau$	T		T^*	E^*	R	T^*				
		τ	T^*			E^*		R	T^*				
	τ		E	T		T^*		R	L				
τ	T		E^*	T		L		T	L				
$\bar\tau$	$\bar E$	T	L	R		L		T					

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					τ	T^*	T^*		T^*		•
4^*					$\bar{\tau}$		T^*	T			•
5^+						τ	T^*	T	T^*		—
5^*						$\bar{\tau}$		T	T^*		1
6^+							τ	T	T^*		1
						$\bar{\tau}$	E^*	T	T^*		1

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3^*				$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T			2
3^*				τ	T^*		T	T			1
4^+					τ	T^*	T	T			2
4^*					$\bar{\tau}$		T	T	T^*		—
5^+						τ	T	T	T^*		—
$6^*.5^*$						$\bar{\tau}$		T	T^*		—
							τ	T	T^*		—
6^+							$\bar{\tau}$	T	T^*		—
7^+								$\bar{\tau}$	T^*		1
				τ	T^*		$\bar{E}$	T	L		1
				$\bar{E}$	T^*	T^*	R	T			2

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar{\tau}$	T			T^*			T	•
2^*			τ				T^*		T^*		•
3^+				$\bar{\tau}$			T^*		T^*	T	—
3^*				τ			T^*			T	1
6^+							τ		T^*	T	1
				E			T^*		L	T	1

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	•
2^*			τ				T			T	3
5^+						τ	T	T^*		T	3
5^*						$\bar\tau$	T	T^*			2
6^+							$\bar\tau$	T^*		T	2
6^*				τ			T^*			T	1
							τ		T^*	T	–
7^+								τ	T^*	T	–
7^*				τ	T^*		T	T			•
								$\bar\tau$	T^*		•
8^+									τ	T	1
				τ			T^*		E^*	T	1
						$\bar E$	T	T^*		R	2
			τ			E^*	T	L		T	3

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
6.3^*				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			•
					τ	T^*	T	T			•
$8^*.3^*$				τ			T^*			T	•
									τ	T	•
4^+					τ	T^*	T^*	T		T	–
4^*					$\bar\tau$		T^*	T			1
5^+						τ	T^*	T		T	–
5^*						$\bar\tau$	T^*	T		T	–
6^+							τ	T		T	1
					$\bar E$		T^*	T		R	1

Исходы **4** или **5** вызваны наличием в анализируемом столбце $\bar\tau$ или τ соответственно. При этом такие начала могут принадлежать одному или нескольким операторам, однако следует выбрать *один* (лучше тот, у которого после $\bar\tau$ или τ вправо имеется подряд наибольшее число продукций M) и его указатель пометить $*$ (`звёздочкой`).

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	$\bar\tau$	T	T						T		3
0^*	τ	T			T				T		2
1^+		$\bar\tau$	T		T				T		–
1^*		τ	T			T^*				T	1
2^+			$\bar\tau$		T	T^*			T	T	3
7.2^*			τ				T			T	•
						τ	T	T^*		T	•
4^+					$\bar\tau$	T^*	T		T	T	2
4^*				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			•
					τ	T^*	T	T			•
5^+						τ	T	T	T	T	1
		τ	$\bar E$			T^*	R	R	R	T	1
	τ	$\bar E$			T	L	R		T	R	2
	$\bar\tau$	$\bar E$	T		R	L			T	R	3

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
5.0^*	$\bar\tau$	T	T						T		•
			$\bar\tau$		T	T^*			T	T	–
0^*	τ				T^*		T			T	–
1^+		$\bar\tau$	T		T^*		T		T	T	–
1^*		τ		T		T			T		•
2^+			$\bar\tau$	T	T^*	T	T		T	T	–
2^*			τ	T				T	T		•
3^+				$\bar\tau$	T^*	T	T	T	T	T	–
8.3^*				τ	T^*		T	T			•
								$\bar\tau$	T^*		•
4^+					τ	T	T	T	T	T	–
4^*					$\bar\tau$	T	T	T			•
5^+						$\bar\tau$	T	T	T	T	–
5^*		τ	T			T^*				T	–
						τ	T	T	T	T	–
6^+							$\bar\tau$	T	T	T	–
6^*					$\bar\tau$		T^*	T			1
							τ	T	T	T	–
7^+								$\bar\tau$	T	T	–
7^*								τ	T	T	–
8^+									$\bar\tau$	T	–
$8^*.6$				τ			T^*			T	–
									τ	T	–
9^+										$\bar\tau$	1

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	•
2^*			τ				T^*		T^*		1
4^+					τ		T^*		T^*	T^*	1
			τ		E^*		T^*		T^*	L	1

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*						T^*	•
2^*			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	2
3^+				τ	T^*				T^*	T^*	2
3^*				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	1
4^+					τ		T	T^*	T^*	T^*	1
				$\bar\tau$	E^*		T	T^*	L	T^*	1
			$\bar\tau$	E^*	T^*				T^*	T^*	2

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*		T^*	T				•
2^*			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			2
3^+				τ		T^*	T	T^*			2
$4^*.3^*$				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	—
					τ		T	T^*	T^*	T^*	
5^+						τ	T	T^*		T^*	—
5^*						$\bar\tau$	T	T^*			1
6^+							$\bar\tau$	T^*		T^*	1
						$\bar E$	T	T^*		L	1
			$\bar E$	T^*		T^*	R	T^*			2

12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					$\bar\tau$	T	T	T			•
4^*					τ				T	T^*	1
5^+						$\bar\tau$	T	T	T	T^*	1
					τ	$\bar E^*$	R	R	T	T^*	1

14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					$\bar\tau$		T^*	T			1
6.4^*					τ				T	T^*	•
						τ	T	T	T	T^*	•
6^+							τ	T	T	T^*	1
					$\bar E$		T^*	T	R	L	1

15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
6.2^*			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			•
				τ		T^*	T	T^*			•
2^*			τ			T^*	T^*			T^*	2
3^+				τ		T^*	T^*	T^*		T^*	
3^*				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	1
4^+					$\bar\tau$	T^*	T^*	T^*		T^*	2
7.4^*					τ				T	T^*	•
						$\bar\tau$	T	T	T	T^*	•
5^+						τ	T^*	T^*	T	T^*	1
				$\bar\tau$	T	E^*	T^*	L	R	T^*	1
			τ		$\bar E^*$	T^*	T^*	L		T^*	2

Анализ таблицы начинается со столбца с номером $n-1$, а заканчивается (или прерывается) по достижению столбца с номером исхода строго меньше **4**–х. В случае выхода на *исход* **1** имеется по меньшей мере *два* оператора, из которых *один* имеет начало τ, а *другой* — начало $\bar\tau$ (в тех случаях, когда таких операторов больше *одного*, выбор одного — осуществляется так же, как и в *исходах* **4** и **5**). Указатели выбранной пары операторов помечаются *звёздочкой*, процесс анализа прерывается и мы переходим к составлению последовательности операторов.

В случае выхода на *исходы* **2** или **3** (строго говоря, означающий выполнимость анализируемой таблицы или подтаблицы), а поскольку мы заняты суперприведением, то это означает необходимость возврата в *первую* слева направо *“точку ветвления”*, то есть на *первый* слева направо столбец, имеющий в служебной строке указатель T или T^*. Снять эту точку ветвления (это означает заменить указатель T на **5** или T^* на **4**) и продолжить с этой точки анализ.

16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	$\bar\tau$	T	T						T		5
0^*	τ	T			T				T		4
1^+		$\bar\tau$	T		T				T		—
1^*		τ		T^*	T		T^*				3
2^+			$\bar\tau$	T^*	T		T^*		T		5
2^*			τ	T^*						T^*	2
3^+				τ	T		T^*		T	T^*	4
$5^*.3^*$				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	1
						τ	T^*	T^*	T	T^*	—
4^+					$\bar\tau$		T^*		T	T^*	3
7.4^*					τ				T	T^*	•
						$\bar\tau$	T	T	T	T^*	•
6^+							τ		T	T^*	2
6^*						τ	T	T^*			•
							$\bar\tau$	T^*		T^*	•
7^+								τ	T	T^*	1
				$\bar\tau$	T		T^*	E^*	R	T^*	1
			τ	T^*			E^*		R	T^*	2
		τ		E	T		T^*		R	L	3
	τ	T		E^*	T		L		T	L	4
	$\bar\tau$	$\bar E$	T	L	R		L		T		5

Замечание 30. Возврат в точку ветвления означает, что указатели служебной строки левее точки ветвления (и включая её) стираются; стираются и соответствующие указатели в служебном столбце. Затем в служебный столбец заносятся указатели, вызванные указателем **4** или **5** из служебной строки (результатом изменения в точке ветвления), а потом происходит продолжение анализа.

Замечание 31. Необходимость возврата в точку ветвления, когда её нет, то есть когда в случае выхода на *исход* **2** или **3** в некотором столбце, правее которого нет в служебной строке ни указателя T, ни указателя T^*, означает: процесс суперприведения закончен.

2°. Последовательность операторов (номер которой совпадает с номером варианта и указывается в левом верхнем углу таблицы) строится лишь тогда, когда произошёл выход на *исход* **1**, который обеспечивается двумя операторами, получившими в служебном столбце указатели, скажем s^* и s^*, где s — номер столбца, в котором произошёл *исход* **1**. Эти операторы заносятся в таблицу последовательности с соблюдением требования, указанного в *замечании* **21** из **7.3.1**. Над этими *двумя* операторами выполняется резолюция, оператор которой получает указатель r_0^+, где $r_0 > s$ и r_0 — номер столбца, в котором находится начало оператора резолюции.

Затем в служебном столбце таблицы проверяется: нет ли оператора с указателем r_0^*.

Замечание 32. Хотя мы говорим об указателе r_0^*, но под этим следует понимать большее: под это попадают и свёртки операторов: $t.r_0^*$, $r_0^*.q$, $t^*.r_0^*$, $r_0^*.q^*$, которые в таблицу последовательности операторов выписываются в виде развёртки двух операторов, из которых под наше рассуждение попадает нужный из операторов свёртки. То же относится и к операторам s^* (одному или обоим).

Если оператор r_0^* есть, то над оператором r_0^+ и оператором r_0^* выполняется резолюция, которая получает указатель r_1^+, где $r_1 > r_0$. С этим оператором поступаем так же, как с оператором r_0^+ и *так далее* до тех пор, пока не получим резолюцию r_p^+, для которой уже в служебном столбце таблицы нет оператора с указателем r_p^*. Тогда оператор r_p^+ является последним оператором резолюции (*случай* $p = 0$ не исключается).

Последний оператор резолюции r_p^+ используется как пропалывающий для всех операторов последовательности, предшествующих ему (если оператор последовательности поглощается оператором r_p^+, то в самом *правом* столбце (**пс**) указывается — (`черта`), которая является признаком безусловного исключения оператора). После прополки проверяются операторы, составлявшие в паре свёртку (в таблице последовательности по самому *левому* столбцу можно делать вывод о такой паре).

Если ни один из операторов такой пары не подвергся безусловному исключению, то против операторов пары в **пс** указывается • (`точка`), которая означает, что свёртка в таблице задачи **ВЫП** сохраняется неизменной.

Замечание 33. Операторы последовательности, получившие в **пс** черту, точку или числовую пометку, называются определившимися. Остальные операторы суть неопределившиеся.

Числовые пометки появляются после прополки и выделения неизменных свёрток. Это делается так. Под оператором r_p^+ проводится черта, под которой записываются вновь образующиеся свёртки операторов. Они получают числовые пометки $1, 2, 3, \ldots$ и образуются из пар операторов, которые помечаются этими пометками: *пометкой* **1** отмечается самый *последний* оператор резолюции, то есть r_p^+ и *первый* снизу вверх из неопределившихся операторов с указателем r_q^*, где $q < p$ (в роли такого оператора может выступать и *первый* оператор развёртки, разумеется, при условии, что *второй* — попал под прополку).

Затем *пометкой* **2** отмечается вновь самый последний неопределившийся оператор резолюции, то есть с указателем, имеющим $+$, и *первый* снизу вверх из неопределившихся операторов с указателем, помеченным звёздочкой и так далее.

Этот процесс может дать столько новых свёрток, сколько таких пар операторов имеется в последовательности.

Затем против операторов, имевших в последовательности указатели, помеченные звёздочкой (или первыми из развёртки), но не определившимися, в **пс** заносится $\bullet$ (точка), означающая, что оператор в таблице задачи **ВЫП** остаётся неизменным.

Замечание 34. В таблице последовательности операторов могут остаться неопределившиеся операторы: это вторые операторы в развёртке, при условии, что *первые* попали под прополку, а это значит, что такая свёртка из таблицы безусловно исключается.

3°. В таблицу задачи **ВЫП** вместо каждого из операторов последовательности, расположенным над чертой и получившем в **пс** числовую пометку, следует записать оператор свёртки из–под черты, имеющий такую же пометку. При этом же операторы, которые безусловно были исключены из последовательности и входили в таблицу задачи **ВЫП**, из неё должны быть тоже безусловно исключены.

Замечание 35. Из сказанного выше следует вывод: общее число операторов в таблице задачи **ВЫП**, при преобразованиях, связанных с суперприведением, не может увеличиваться, оно может уменьшаться или оставаться таким же, каким было в исходной таблице.

Замечание 36. В иллюстрационных примерах мы производили безусловное исключение операторов, указывая против них – (черту), а включение новых состояло в приписывании их в конце таблицы, что, конечно, в случае решения задачи на компьютере могло бы быть исполнено так, как об этом сказано в алгоритме.

Теперь обратим внимание на то, что *первый* из операторов под чертой, внесённый в таблицу задачи **ВЫП**, требует в столбце с номером r_p один из исходов: **4** или **5**. Если при этом в указанном столбце была точка ветвления, то есть в служебной строке этого столбца имелся указатель T^* или T соответственно, то тогда мы имеем дело с возвратом в точку ветвления, а что означает такой возврат, мы уже знаем из рассмотренного выше (см. *замечание* **30**). Но может быть и другая ситуация, а именно: в указанном столбце имелся *исход* **5** или **4** (то есть исход, к которому пришли, находится в противоречии с имеющимся), тогда такая ситуация означает необходимость возврата на *первую* точку ветвления правее столбца r_p (с такой ситуацией мы уже встречались и она оговаривалась нами в *замечании* **28**, о котором было сказано, что оно не должно опускаться из виду).

А сейчас, когда дана детализация алгоритма, обратимся к иллюстрационному примеру для задачи **ВЫП** и дадим некоторые пояснения.

Таблица **42** (без последних *четырёх* операторов) является *таблицей* **28**, в которой переставлены операторы местами так, чтобы условное исключение операторов, выполненное в соответствии с описанным алгоритмом, в *первом* варианте анализа приводило бы к тому, что те операторы, которые получают больший по величине указатель, располагались бы в таблице ниже. Это означает, что мы можем заниматься анализом и преобразованием верхней части таблицы, подключая нижние части по мере продвижения в анализе и преобразованиях, когда действительно возникает такая необходимость (сказанное можно обнаружить, сравнивая варианты анализа в *таблицах* **42** — **44**. Это приводит к действительно естественной сегментации, которая приобретает значение для задач большой размерности. Однако хочется подчеркнуть, что способы приведения таблицы (*левого* и *правого*) не составляют предмет алгоритма суперприведения, он играет самостоятельную роль, а сегментация и способы приведения — это приёмы, которые могут использоваться как вспомогательные при разработке различных алгоритмов решения **задачи ВЫП**.

Внимательное изучение решения **задачи ВЫП**, представленное в *таблицах* **42** — **45** и иллюстрируемое последовательностями операторов в таблицах *вариантов* **1** — **16**, должно позволить уяснить все детали.

Осталось лишь заметить, что при переходе от *таблицы* **43** к *таблице* **44** (это переход от *варианта* **7** к *варианту* **8**) оператор $\langle\,\bar\tau\,\rangle$ использовался для всей таблицы как пропалывающий: те свёртки операторов, против которых в таблице **задачи ВЫП** указана $\bullet$ (**точка**), теряют один из операторов и свёртка превращается в простой оператор.

Это следует иметь ввиду, поскольку оно отличается от случая **точки** в **пс** для последовательности операторов.

Замечание 37. Описанное явление в общем виде может быть сформулировано так. Тот оператор, который привёл к появлению в самом *правом* столбце таблицы числового указателя, должен быть использован как *пропалывающий* для всей таблицы.

Замечание 38. В последовательности операторов *варианта* **7** оператор $\langle\,\bar\tau\,\rangle$ и оператор $\langle\,\bar\tau\, M\, T^*\, T\, M\, M\,\rangle$ дают свёртку: $\langle\,\bar\tau\, M\, T^*\, T\, M\, \bar{E}^*\,\rangle$, которая и могла быть занесена в *таблицу* **44** (у нас эти операторы не свёрнуты), но, тем не менее, если бы даже занесли свёртку, в прополке должен быть использован оператор $\langle\,\bar\tau\,\rangle$, а не свёртка.

И, наконец, *таблица* **45**, из которой безусловно удалены **8** операторов (против каждого из них указана **черта**), является суперприведённой таблицей для *таблицы* **42**. В том, что это действительно так, следует убедиться самостоятельно, хотя это можно увидеть чуть ниже по *таблице* **46**.

7.3.5 Суперприведенная подтаблица, эквивалентная суперприведённой таблице.

Пусть уже получена суперприведённая таблица для заданной таблицы. Но в суперприведённой таблице могут содержаться строки, удаление которых не изменит выполнимости полученной подтаблицы, то есть исходная суперприведённая таблица и суперприведённая подтаблица являются эквивалентными в том смысле, что выполняющие наборы таблицы и подтаблицы совпадают. Например, как уже указывалось выше, для *таблицы* **42** суперприведённой таблицей является *таблица* **45**, из которой безусловно удалены **8** операторов: это *таблица* **46**. Но в *таблице* **46** имеются такие операторы, удаление которых из таблицы даст нам подтаблицу (в нашем случае - это *таблица* **47**), эквивалентную *таблице* **46**.

Итак, как получить из заданной суперприведённой таблицы эквивалентную ей подтаблицу ?

Решение этой задачи достаточно простое и состоит в следующем.

Над таблицей выполняем анализ. Исходы анализа в суперприведённой таблице могут быть от **2** и до **6**. В случаях исходов **2** — **5** исключаем условно некоторое число операторов, занося в служебный столбец указатели, но среди этих указателей для каждого исхода отмечаем $*$ (*звёздочкой*) только один указатель, при этом в случаях исходов **4** и **5** указатель со *звёздочкой* заносится в служебный столбец против того оператора, начало которого находится в анализируемом столбце, а в случаях исходов **2** и **3** выбор отмечаемого оператора (*звёздочкой*) произволен. Достижение исходов **2** или **3** означает:

1) все помеченные *звёздочкой* операторы включаются (если ещё не включены) в формируемую подтаблицу;

2) анализ таблицы продолжается с первой слева направо точки ветвления (в которой, как мы знаем, указатель T заменяется на **5**, а указатель T^* — на **4**). Если же точки ветвления нет, то анализ закончен.

Замечание 39. Операторы свёртки из таблицы в подтаблицу могут войти полностью или только один из них, что зависит от сформированных в результате анализа указателей.

Предлагается проследить за переносом операторов из *таблицы* **46** в *таблицу* **47**.

7.3.6 Особенность программной реализации итогового алгоритма.

Решение задачи по итоговому алгоритму требует многократных свёрток и развёрток операторов, которых можно избежать, ограничившись однократными свёртками пар операторов. Таким образом, с учётом того, что сворачивать и разворачивать операторы в промежуточных выкладках не следует, *итоговый* алгоритм сохраняет своё описание и лишь требует дополнительного запоминания того, какие операторы сворачиваются в один. Для того, чтобы хранить эту информацию, мы отводим ещё один служебный столбец (*второй* служебный столбец). В наших выкладках, представленных *таблицами* **48 — 50**, варианты *второго* служебного столбца отведены с *левой* стороны у таблиц.

В последовательностях операторов **1 — 9**, **11**, **12**, **14 — 17** (в *правых* столбцах) указаны номера свёрток (для нумераций свёрток используются последовательные номера) тех операторов, которые должны быть свёрнуты в один оператор согласно итоговому алгоритму, хотя в конечном результате некоторые из этих номеров могут быть заменены на новые, и, таким образом, свёртки операторов будут выполнены лишь над теми операторами, которые сохраняются до конца анализа и преобразования таблицы.

Теперь отметим некоторые особенности, отражённые в *таблицах* **48 — 50**. В *таблице* **48** перенесены все операторы из *таблицы* **42** кроме операторов, получивших в служебном столбце (в *первом* варианте) *указатели* **8** и **9**, так как операторы с такими указателями будут условно исключены на начальных вариантах анализа. (Присоединение операторов из *таблицы* **42** с *указателями* **8** произведено в *таблице* **49**, а операторов с *указателями* **9** — в *таблице* **50**).

Образовавшаяся в *первом* варианте последовательности пара операторов (они получили *номер* **1**), во *втором* варианте попали (*оба*) под прополку, а образовавшаяся в третьем варианте пара операторов (они получили *номер* **4**) в *четвёртом* варианте потеряла (в результате прополки) *второй* оператор, а позже в *восьмом* варианте потеряла и *первый* оператор. Образовавшаяся во *втором* варианте последовательности пара операторов (они получили *номер* **2**), в *четвёртом* варианте *второй* оператор пары попадает в новую пару (под *номером* **5**) и, таким образом, пара (с *номером* **2**) разрушается: от неё остается *один* оператор. Все такого рода явления легко проследить по *таблицам* **48 — 50** и представленным последовательностям **1 — 9**, **11**, **12**, **14 — 17** операторов.

В итоге: анализ заканчивается *таблицей* **50**, которая является суперприведённой.

Замечание 40. Обращаем внимание на то, что в **17**–ом варианте служебной строки *таблицы* **50** выход на *исход* **1** означает: `конец`

анализа (нет продукций T или T^*). Однако и для этого варианта последовательность операторов должна быть построена, а таблица пополнена соответствующими операторами (что и сделано).

Таблица 46

	2	5	4	5	4	5	5	5	**4**		2
	3	5	4	5	5	4	4	T	4	1	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&	
				τ	T^*	T^*		T^*		5	8
		τ			T^*		T	T^*		7	8
	τ		T^*	T^*				T^*		4	8
	τ	T^*		T			T			7	2
				$\bar{\tau}$	T	T	T			7	5
		τ	T^*		T^*	T				6	2
					τ	T^*	T^*	T^*		5^*	8
		τ	T				T	T		8	3
	τ		T		T			T		8	5
			$\bar{\tau}$			T		T	T^*	8	3^*
	$\bar{\tau}$		T				T		T^*	7	3
			τ	T^*		$\bar{E}$	T	L		$7^*.4$	8.4
			$\bar{E}$	T^*	T^*	R	T			7	4
									$\bar{\tau}$	9^*	$\mathbf{9}^*$
		τ		E^*		T^*		T^*	L	$4^*.2^*$	8
		$\bar{\tau}$	E^*	T^*				T^*	T^*	4	8
					$\bar{E}$	T	T^*		L	6^*	7
		$\bar{E}$	T^*		T^*	R	T^*			6.5	7
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*	8	$5^*.4^*$
				$\bar{E}$		T^*	T	R	L	8.7	6
		τ		$\bar{E}^*$	T^*	T^*	L		T^*	5	7.6
			$\bar{\tau}$	T		T^*	E^*	R	T^*	8.3^*	$7^*.6$
		τ	T^*			E^*		R	T^*	8.2	$6^*.2^*$
	τ		E	T		T^*		R	L	8.1^*	6
τ	T		E^*	T		L		T	L	8	6.1
$\bar{\tau}$	$\bar{E}$	T	L	R		L		T		8	6.1^*

Таблица 47

	2	5	4	5	4	5	5	5	**4**		2
	3	5	4	5	5	4	4	T	4	1	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&	
					τ	T^*	T^*	T^*		5^*	8
			$\bar\tau$			T		T	T^*	8	3^*
							$\bar\tau$	T^*		7^*	8
									$\bar\tau$	9^*	$\mathbf{9}^*$
		τ		E^*		T^*		T^*	L	4^*	8
						$\bar\tau$	T^*		T^*	6^*	7
				τ	$\bar{E}^*$	R	R	T	T^*	8	$5^*.4^*$
			$\bar\tau$	T		T^*	E^*	R	T^*	8.3^*	$7^*.6$
		τ	T^*			E^*		R	T^*	8.2^*	$6^*.2^*$
	τ		T^*	T		T^*				1^*	6
$\bar\tau$	T	T						T		8	1^*

Для того, чтобы выделить из этой таблицы эквивалентную ей подтаблицу, поступим так, как это описано в **п.7.3.5**, с той лишь разницей (что, конечно, проще), что операторы не свёрнуты (и мы пока их сворачивать не будем).

Дальнейшие выкладки над *таблицей* **50** представлены в *таблице* **51**, которая и содержит операторы *таблицы* **50**. *Таблица* **52** является эквивалентной подтаблицей для *таблицы* **51**. Как видно из представленного служебного столбца *таблицы* **52**: в ней следует лишь вместо строк с пометкой **27** записать одну свёртку: $\langle\, \bar{E}\, T^*\, R\, T^* \,\rangle$.

Замечание 41. Сравнивая *таблицу* **52** с *таблицей* **47**, видим, что одна и та же таблица может иметь много различных суперприведённых таблиц и эквивалентных им подтаблиц. Процесс выделения из суперприведённой таблицы эквивалентной ей подтаблицы будем называть **сжатием таблицы**.

Таблица 48

												5	$\mathbf{T}^*$					5
4						1	T	T	4	5	**4**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}^*$				4	
	3					1	5	T	5	T	4	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}^*$			3		
		2					1	4	4	5	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}^*$		2			
			1					1	4	T	T^*	T	T^*	1				
				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&				
				$\bar\tau$			T		T^*				T			5	3	
					$\bar\tau$			T^*		T^*			T		6		6	
						$\bar\tau$	T			T^*			T		6	2*	6	
3	3	3					$\bar\tau$	T^*	T^*		T				3*	7	**7**	
								τ	T^*	T^*		T^*		4*	6	5	6	8
					τ	T			T^*				T			5		
						τ				T^*		T^*			6	2*	6	8
						τ			T^*		T	T^*				7	**7**	8
4	4						τ			T^*			T		6	3*	6	
					τ		T^*	T^*				T^*				3		8
								$\bar\tau$		T^*	T			4*	6	7	**7**	
					τ		T^*	T		T^*					6	4	6	
					τ	T^*		T			T				4	7	**7**	
—	—	—	1						$\bar\tau$		T	T^*		5*	5*	—	—	—
									$\bar\tau$	T^*	T		T	5	6	7	**7**	
							τ	T	T				T	5	5	4	5	
								$\bar\tau$		T	T	T^*		6	4*	—	—	—
								$\bar\tau$	T	T	T			6	5	7	**7**	
2	2	2					τ	T^*		T	T			6	3*	7	**7**	
						τ	T^*		T^*	T				6		6		
						τ				T			T	6		6	2*	
				τ				T^*		T			T	6		6		
6									$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	6	5*	
									τ	T^*	T^*	T^*		7	**7**	5*	6	8
						$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	5		
7						$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**	5	2*	
						τ	T				T^*		T	7	**7**		3	
—	—	—	1							τ	T	T^*			6*	—	—	—
5	2	2									$\bar\tau$	T^*				7*	**7***	8
3	3	3						τ	T^*	T	T					7	**7**	
—	4									τ		T^*	T				6*	—
5												τ	T					8*
6										$\bar\tau$	T^*		T					
7									τ	T	T^*		T					

Таблица 49

				1	5	5	5	4	5	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$				8	
	7			1	5	5	4	**5**	$\mathbf{T}$	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$			7		
		6		1	5	5	T^*	5	T	5	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$		6			
			5				1	4	4	T	5	5	$\mathbf{T}^*$	5				
				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&				
				$\bar\tau$			T		T^*				T		0^*	3	5	–
					$\bar\tau$			T^*		T^*			T		6	**6**	**6**	–
						$\bar\tau$	T			T^*			T		6	**6**	**6**	–
	3	3	3				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			3^*	4	**4**	5	
								τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	
	14	10			τ	T			T^*				T		1^*	1^*	5	–
						τ				T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	
						τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	
	4	4	4				τ			T^*			T	3^*	6	**6**	**6**	–
					τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	**8**	
	8	8	8					$\bar\tau$		T^*	T			4	6	**6**	**6**	
					τ		T^*	T		T^*				4	6	**6**	**6**	
					τ	T^*		T			T			4	2	2	4	
									$\bar\tau$	T^*	T		T	5^*	–	–	–	–
							τ	T	T				T	5	5	**5**	4	–
16								$\bar\tau$	T	T	T			6	5	**5**	4^*	
	2	2	2				τ	T^*		T	T			6	4	**4**	3^*	
						τ	T^*		T^*	T				6	3	2	5	
	13	9				τ				T			T	6	2^*	2^*	2^*	–
				τ				T^*		T			T	6	4	**4**	0^*	–
	6	6	6						$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	**7**	**7**	
									τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	**8**	
						$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	**7**	**7**	
	7	7	7			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	–
						τ	T				T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	–
											τ	T	T	7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	–
						τ	T				T	T			2	3	2	
					τ		T		T			T		5	5	**5**	1^*	
				$\bar\tau$	T	T						T				0^*	0^*	
	15	11		τ	T			T				T		4	0^*	0^*	4	
	5	5	5								$\bar\tau$	T^*		8	**8**	**8**	**8**	
	12	3	3					τ	T^*	T	T			6	4^*	$\mathbf{4}^*$	5	
	5	5	5									τ	T	8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	–
	6	6	6							$\bar\tau$	T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	–
	7	7	7						τ	T	T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	–
	8	8	8							τ	T		T		6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	–
	9	9					$\bar\tau$	T	T^*	T		T	T			3^*	5	–
	10	10				$\bar\tau$	T	T	T^*			T	T			3	5	–
	11	11			$\bar\tau$		T	T	T^*			T	T			3	5	–
	12								τ	T	T	T	T				5^*	–
	13							$\bar\tau$	T^*	T		T	T				5	–
	14					$\bar\tau$		T	T^*			T	T				5	–
	15				$\bar\tau$	T		T				T					4	
16													$\bar\tau$					

Таблица 50

									1	5	4	5	5	**4**	**4**	**5**	**4**										17
	16									1	4	5	T	4	4	**5**	**4**									16	
		15										1	T	4	$\mathbf{T}^*$	**5**	**4**								15		
			14									1	5	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$	**5**	**4**							14			
									2	5	4	5	T	T^*	T^*	5	**4**						13				
				12						1	4	5	**4**	**5**	**4**	**T**	**4**					12					
					11					1	4	T	4	5	**4**	**T**	**4**				11						
									3	5	4	5	**5**	**T**	**4**	**T**	**4**			10							
						9				1	T	T	5	T	4	T	4	9									
							8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&									
	3	3	3	3	3	3	3				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			7	**7**	**7**	**7**	4	5		7	**7**
												τ	T^*	T^*		T^*		5	**5**	6	**6**	8	**8**	**8**	**8**	**8**
										τ				T^*		T^*		2*	2*	6	**6**	8	**8**	**8**	**8**	**8**
										τ			T^*		T	T^*		7	**7**	**7**	**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**
									τ		T^*	T^*				T^*			4		4	8	**8**	**8**	**8**	**8**
	8	8	8	8	8	8	8					$\bar\tau$		T^*	T			7	**7**	**7**	**7**	6	**6**	4*	7	**7**
									τ		T^*	T		T^*				4	1*	6	**6**	6	**6**			1*
									τ	T^*		T			T			7	**7**	**7**	**7**	2			7	**7**
	16	16	16	16	16	16	16					$\bar\tau$	T	T	T			7	**7**	**7**	**7**	5	4*	6	7	**7**
	2	2	2	2	2	2	2				τ	T^*		T	T			7	**7**	**7**	**7**	4		6	7	**7**
										τ	T^*		T^*	T				6	**6**	2*	2*	2*	5	6	6	**6**
	20	20	20	20	6	6	6						$\bar\tau$	T	T^*			6	**6**	5*	**5***	7	**7**	**7**	6	**6**
													τ	T^*	T^*	T^*		5*	**5***	6	**6**	8	**8**	**8**	**8**	**8**
	21	21	21	21						$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			5	**5**		2*	7	**7**	**7**	2*	5
										τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**	3			7	**7**
									τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**	5		5	5	
								$\bar\tau$	T	T						T		8	**8**	**8**	**8**	1				
	15	15	15	15	15	15	15	τ	T			T				T		8	**8**	**8**	**8**	1				
28	24	23	22									τ				T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	4*	4*	4*	4*	4*
29	25										$\bar\tau$	T		T^*			T^*	4	3*	6	**6**	6	**6**		3*	3*
											$\bar\tau$			T		T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	3*		6	6	**6**
	—	—	—	—	18						$\bar\tau$			T	T^*		T^*	6	**6**	3*	3*	—	—	—	—	—
30										τ	T^*						T^*		2			2				2*
	26									τ			T^*	T^*			T^*	5	**5**	6	**6**	6	**6**		2*	5
	19	19	19	19	19	17				$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	2*	4	2*	4	8	**8**	**8**	**8**	**8**
									$\bar\tau$		T				T		T^*	7	**7**	**7**	**7**	3			7	**7**
	5	5	5	5	5	5	5								$\bar\tau$	T^*		7*	**7***	**7***	**7***	8	**8**	**8**	**8**	**8**
	12	12	12	12	12	12	12					τ	T^*	T	T			7	**7**	**7**	**7**	4	5	6	7	**7**
31	15	15	15	15	15	15	15		$\bar\tau$	T		T				T		8	**8**	**8**	**8**	1*				1*
	16	16	16	16	16	16	16										$\bar\tau$	9*	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***
	17	17	17	17	17	17						τ		T^*		T^*	T^*		4*	6	**6**	8	**8**	**8**	**8**	**8**
	18	18	18	18	18							τ	T^*	T	T^*	T^*	T^*				4*	8	**8**	**8**	**8**	**8**
	19	19	19	19	19						τ	T^*	T^*	T		T^*	T^*				4	8	**8**	**8**	**8**	**8**
27	20	20	20	20										$\bar\tau$	T^*		T^*					7	**7**	**7**	6*	**6***
	21	21	21	21							τ		T^*	T	T^*							7	**7**	**7**	6	**6**
	22	22	22										$\bar\tau$	T	T	T	T^*							6	7	**7**
	23	23												τ	T	T	T^*								7	**7**
	24												τ	T^*	T^*	T	T^*									5*
	25											$\bar\tau$	T^*	T^*	T^*		T^*									5
	26										τ		T^*	T^*	T^*		T^*									5
	27														τ	T	T^*									
	28													τ		T	T^*									
	29											$\bar\tau$		T^*		T	T^*									
	30										τ	T		T^*		T	T^*									
	31									$\bar\tau$	T^*	T		T^*		T										

Таблица 51

			3	5	4	5	5	4	4	4	**4**		2
			2	5	4	5	4	5	5	T^*	4	1	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&	
	3				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			4	7
						τ	T^*	T^*		T^*		8	5
				τ				T^*		T^*		8	2
				τ			T^*		T	T^*		8	7
			τ		T^*	T^*				T^*		8	4
	8					$\bar\tau$		T^*	T			6	7
*			τ		T^*	T		T^*				6	1^*
			τ	T^*		T			T			2	7
	16					$\bar\tau$	T	T	T			5	7
	2				τ	T^*		T	T			4	7
*				τ	T^*		T^*	T				2^*	6
	20						$\bar\tau$	T	T^*			7	6
*							τ	T^*	T^*	T^*		8	5^*
	21			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	5
				τ	T				T	T		3	8
			τ		T		T			T		5	8
		$\bar\tau$	T	T						T		1	8
	15	τ	T			T				T		1	8
*	28					τ				T	T^*	4^*	8
*	29				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	6	3^*
*					$\bar\tau$			T		T	T^*	3^*	8
*				τ	T^*						T^*	2	2^*
	26			τ			T^*	T^*			T^*	6	5
	19			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	8	4
			$\bar\tau$		T				T		T^*	3	7
*	5								$\bar\tau$	T^*		8	7^*
	12					τ	T^*	T	T			4	7
*	31		$\bar\tau$	T		T				T		1^*	8
*	16										$\bar\tau$	9^*	$\mathbf{9}^*$
*	17					τ		T^*		T^*	T^*	8	4^*
	18					τ	T^*	T	T^*	T^*	T^*	8	6
	19				τ	T^*	T^*	T		T^*	T^*	8	6
*	27							$\bar\tau$	T^*		T^*	7	6^*
	21				τ		T^*	T	T^*			7	6
*	22						$\bar\tau$	T	T	T	T^*	5^*	8
*	23							τ	T	T	T^*	6^*	8
	24						τ	T^*	T^*	T	T^*	7	8
	25					$\bar\tau$	T^*	T^*	T^*		T^*	7	5
	26				τ		T^*	T^*	T^*		T^*	7	5
*	27								τ	T	T^*	7^*	8
	28							τ		T	T^*	6	8
	29					$\bar\tau$		T^*		T	T^*	6	8
	30				τ	T		T^*		T	T^*	6	8
	31			$\bar\tau$	T^*	T		T^*		T		6	8

Таблица 52

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		τ		T^*	T		T^*			
			τ	T^*		T^*	T			
						τ	T^*	T^*	T^*	
28					τ				T	T^*
29				$\bar\tau$	T		T^*			T^*
				$\bar\tau$			T		T	T^*
			τ	T^*						T^*
5								$\bar\tau$	T^*	
31		$\bar\tau$	T		T				T	
16										$\bar\tau$
17					τ		T^*		T^*	T^*
27							$\bar\tau$	T^*		T^*
22						$\bar\tau$	T	T	T	T^*
23							τ	T	T	T^*
27								τ	T	T^*

Выкладки над *таблицами* **48** — **50** с последовательностями операторов за номерами: **1** — **9**, **11**, **12**, **14** — **17**.

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					τ	T^*	T^*		T^*		•
4^*					$\bar\tau$		T^*	T			•
5^+						τ	T^*	T	T^*		–
5^*						$\bar\tau$		T	T^*		1
6^+							τ	T	T^*		1

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3^*				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			3
3^*				τ	T^*		T	T			2
4^+					τ	T^*	T	T			3
4^*					$\bar\tau$		T	T	T^*		–
5^+						τ	T	T	T^*		–
5^*						$\bar\tau$		T	T^*		–
6^+							$\bar\tau$	T	T^*		–
6^*							τ	T	T^*		–
7^+								$\bar\tau$	T^*		2

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar\tau$	T			T^*			T	•
2^*			τ				T^*		T^*		•
3^+				$\bar\tau$			T^*		T^*	T	—
3^*				τ			T^*			T	4
6^+							τ		T^*	T	4

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ				T			T	•
2^*			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7
5^+						τ	T	T^*		T	7
5^*						$\bar\tau$	T	T^*			6
6^+							$\bar\tau$	T^*		T	6
6^*							τ		T^*	T	—
7^+								τ	T^*	T	—
7^*								$\bar\tau$	T^*		5
8^+									τ	T	5

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3^*				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			•
3^*				τ			T^*			T	•
4^+					τ	T^*	T^*	T		T	—
4^*					$\bar\tau$		T^*	T			8
5^+						τ	T^*	T		T	—
5^*						$\bar\tau$	T^*	T		T	—
6^+							τ	T		T	8

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	$\bar\tau$			T		T^*				T	•
0^*	τ	T			T				T		11
1^+		$\bar\tau$		T	T	T^*			T	T	11
1^*		τ	T			T^*				T	10
2^+			$\bar\tau$	T	T	T^*			T	T	10
2^*			τ				T			T	9
3^+				$\bar\tau$	T	T^*	T		T	T	9

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	$\bar{\tau}$	T	T						T		•
0^*	τ	T			T				T		15
1^+		$\bar{\tau}$	T		T				T		15
1^*		τ	T			T^*				T	14
2^+			$\bar{\tau}$		T	T^*			T	T	14
2^*			τ				T			T	13
4^+					$\bar{\tau}$	T^*	T		T	T	13
4^*					τ	T^*	T	T			12
5^+						τ	T	T	T	T	12

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0^*	τ				T^*		T			T	–
0^*	$\bar{\tau}$	T	T						T		•
1^+		$\bar{\tau}$	T		T^*		T		T	T	–
1^*		τ		T		T			T		•
2^+			$\bar{\tau}$	T	T^*	T	T		T	T	–
2^*			τ				T			T	–
3^+				$\bar{\tau}$	T^*	T	T		T	T	–
3^*				τ	T^*		T	T			•
4^+					τ	T	T	T	T	T	–
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T			16
5^+						$\bar{\tau}$	T	T	T	T	–
5^*						τ	T	T	T	T	–
6^+							$\bar{\tau}$	T	T	T	–
6^*							τ	T		T	–
7^+								$\bar{\tau}$	T	T	–
7^*								τ	T	T	–
8^+									$\bar{\tau}$	T	–
8^*									τ	T	–
9^+										$\bar{\tau}$	16

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ				T^*		T^*		•
2^*			$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*	17
4^+					τ		T^*		T^*	T^*	17

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*		T^*	T				$\bullet$
2^*			$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*	19
3^+				τ	T^*	T^*	T		T^*	T^*	19
3^*				$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	18
4^+					τ	T^*	T	T^*	T^*	T^*	18

12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			τ	T^*		T^*	T				$\bullet$
2^*			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			21
3^+				τ		T^*	T	T^*			21
3^*				$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	—
5^+						τ	T	T^*		T^*	—
5^*						$\bar{\tau}$	T	T^*			20
6^+							$\bar{\tau}$	T^*		T^*	20

14	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T			$\bullet$
4^*					τ				T	T^*	22
5^+						$\bar{\tau}$	T	T	T	T^*	22

15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4^*					$\bar{\tau}$		T^*	T			$\bullet$
4^*					τ				T	T^*	23
6^+							τ	T	T	T^*	23

16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2^*			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			$\bullet$
2^*			τ			T^*	T^*			T^*	26
3^+				τ		T^*	T^*	T^*		T^*	26
3^*				$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	25
4^+					$\bar{\tau}$	T^*	T^*	T^*		T^*	25
4^*					τ				T	T^*	24
5^+						τ	T^*	T^*	T	T^*	24

17	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1^*		τ		T^*	T		T^*				$\bullet$
1^*		$\bar{\tau}$	T		T				T		31
2^+			$\bar{\tau}$	T^*	T		T^*		T		31
2^*			τ	T^*						T^*	30
3^+				τ	T		T^*		T	T^*	30
3^*				$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	29
4^+					$\bar{\tau}$		T^*		T	T^*	29
4^*					τ				T	T^*	28
6^+							τ		T	T^*	28
6^*							$\bar{\tau}$	T^*		T^*	27
7^+								τ	T	T^*	27

7.4 Технология итогового алгоритма

Все основные составляющие итогового алгоритма суперприведения нами рассмотрены. Теперь сформулируем технологию решения задачи суперприведения по итоговому алгоритму со вспомогательными элементами подготовки и детализации этого алгоритма с иллюстрацией на примере решения задачи, представленной в *таблице* **42**.

Последовательность исполнения итогового алгоритма содержит следующие этапы:

1. Приведение таблицы.

2. Методы сегментации таблицы.

3. Суперприведение сегментов таблицы.

4. Сжатие сегментов таблицы.

5. Суперприведение и сжатие всей таблицы.

6. Свёртка некоторых операторов в сжатой суперприведённой таблице.

7.4.1 Приведение таблицы.

Приведение таблиц рассматривалось нами выше: *правое приведение* (см. **7.2.4**) и *левое приведение* (см. **7.1.6**), причём правое приведение рассматривалось в связи с теми сегментациями, которые там рекомендовались.

Здесь мы останавливаемся на алгоритме *левого приведения*, как на более предпочтительном в связи с теми сегментациями, которые предполагаются к использованию ниже, при этом мы не исключаем из нашего арсенала *правое приведение* с соответствующими сегментациями и для итогового алгоритма.

Итак, в *таблице* **53** представлены операторы из *таблицы* **42**, записанные в порядке следования: вначале операторы *ранга* **3**, а затем — операторы *ранга* **4** (это сделано лишь для того, чтобы легче считать ранги столбцов подтаблиц). Под чертой таблицы записаны: ранги столбцов подтаблиц с операторами *ранга* **3**, а затем — *ранга* **4**. Результат левого приведения *таблицы* **53** — это *таблица* **54** (без последних *трёх* столбцов).

7.4.2 О методах сегментации таблицы.

О роли и предназначении сегментации сказано в **7.2.4** и поэтому здесь повторяться нет надобности. Пополним лишь список методов ещё следующими способами сегментации: *левая сегментация* и *правая сегментация* (строго говоря, предполагается, что таблица приведена по алгоритму *левого приведения*, хотя такую сегментацию можно выполнять и без приведения).

Левая сегментация. Пусть в левой сегментации таблицы ранга R, содержащей n столбцов и m строк, указывается некоторое число p, означающее, что примерное число непересекающихся сегментов, на которые делится исходная таблица, не должно превышать p (это число мы задаём директивно). Вычисляем число

$$q = \frac{m}{p} - \frac{R}{m} = \frac{m^2 - p \cdot R}{p \cdot m} \cdot \tag{7.36}$$

Теперь выделяем из заданной таблицы сегменты, придерживаясь такого правила: пусть некоторое целое число r пробегает значения $0, 1, 2, \ldots$. Когда r принимает значение r_0, то из таблицы удаляем строки, имеющие начало в таблице r_0, и переносим их в формируемый нами сегмент. Считаем число a таких строк в сегменте. Если это число

Таблица 53

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3			τ				T^*		T^*	
3				τ			T^*			T
3					$\bar\tau$		T^*	T		
3						$\bar\tau$		T	T^*	
3			τ				T			T
3						$\bar\tau$	T	T^*		
3								τ	T	T
3					τ				T	T^*
3				τ	T^*					T^*
4	$\bar\tau$			T		T^*				T
4		$\bar\tau$			T^*		T^*			T
4			$\bar\tau$	T			T^*			T
4				$\bar\tau$	T^*	T^*		T		
4					τ	T^*	T^*		T^*	
4		τ	T			T^*				T
4			τ			T^*		T	T^*	
4		τ		T^*	T^*				T^*	
4		τ		T^*	T		T^*			
4		τ	T^*		T			T		
4						$\bar\tau$	T^*	T		T
4				τ	T	T				T
4					$\bar\tau$		T	T	T^*	
4					$\bar\tau$	T	T	T		
4				τ	T^*		T	T		
4			τ	T^*		T^*	T			
4	τ				T^*		T			T
4						τ	T^*	T^*	T^*	
4			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*		
4			$\bar\tau$			T^*		T^*		T
4			τ	T				T^*		T
4			τ	T				T	T	
4		τ		T		T			T	
4	$\bar\tau$	T	T						T	
4	τ	T			T				T	
4				$\bar\tau$	T		T^*			T^*
4				$\bar\tau$			T		T	T^*
4				$\bar\tau$			T	T^*		T^*
4			τ			T^*	T^*			T^*
4			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*
4		$\bar\tau$		T				T		T^*
3	0	0	3	2	2	2	5	4	4	5
4	4	9	12	16	14	14	15	14	11	15

Таблица 54

	1	1	4	1	5	T^*	T	T	T^*			1
0	1	4	5	3	2	7	8	6	9	S_2	S_3	&
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	S_2	S_3	&
					τ		T^*	T^*		2	4	5^*
				τ				T^*	T	2	3	4^*
		$\bar\tau$				T		T^*		1	2	2^*
			$\bar\tau$			T	T^*			2	3	3^*
					τ			T	T	2	4	8
			$\bar\tau$			T^*		T		2	3	8
						τ	T		T	2	4	7
		τ					T		T^*	1	2	9
				τ	T^*				T^*	2	3	9
$\bar\tau$			T^*	T					T	1	1	4
	$\bar\tau$	T^*						T^*	T	1	1	1^*
				$\bar\tau$	T			T^*	T	2	3	4^*
		τ	T^*	T		T				1	2	4
		τ	T^*				T^*	T^*		1	2	2^*
	τ		T^*		T				T	1	1	1^*
			τ		T^*	T	T^*			2	3	5
	τ	T^*		T^*			T^*			1	1	1^*
	τ	T		T^*				T^*		1	1	2
	τ	T			T^*	T				1	1	5
			$\bar\tau$			T		T^*	T	2	3	3^*
		$\bar\tau$	T	T^*					T	1	2	3
		$\bar\tau$				T	T^*	T		1	2	8
		$\bar\tau$	T			T		T		1	2	8
		τ		T^*		T		T		1	2	8
			τ	T^*	T^*			T		2	3	8
τ		T^*						T	T	1	1	8
			τ			T^*	T^*	T^*		2	3	6
			τ	T^*	T	T^*				2	3	6
			τ		T	T^*			T	2	3	6
				$\bar\tau$	T^*	T^*			T	2	3	6
				$\bar\tau$	T^*	T	T			2	3	7
	τ		T	T			T			1	1	7
$\bar\tau$	T				T		T			1	1	7
τ	T	T					T			1	1	7
		$\bar\tau$		T				T^*	T^*	1	2	9
				$\bar\tau$			T	T	T^*	2	3	9
				$\bar\tau$		T^*		T	T^*	2	3	9
			τ		T^*			T^*	T^*	2	3	9
		τ			T		T^*		T^*	1	2	9
	$\bar\tau$			T		T			T^*	1	1	9

Таблица 55

		4	4	**4**	5	4		5			
1		1	1	4	1	5					1
•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
1						τ		T^*	T^*		7
2					τ				T^*	T	
			$\bar\tau$				T		T^*		
				$\bar\tau$			T	T^*			7
		$\bar\tau$	T^*						T^*	T	
					$\bar\tau$	T			T^*	T	–
			τ	T^*				T^*	T^*		7
		τ		T^*		T				T	5
		τ	T^*		T^*			T^*			7
				$\bar\tau$			T		T^*	T	
1								τ	T^*	T	7
2						$\bar\tau$			T^*	T	5

К таблице 55

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
4^*					τ				T^*	T	2
4^*					$\bar\tau$	T			T^*	T	–
5^+						$\bar\tau$			T^*	T	2
5^*						τ		T^*	T^*		1
7^+								τ	T^*	T	1

$a \le q$, то переходим на следующее значение r, то есть r получает значение $r_0 + 1$, иначе сегмент сформирован. Формирование следующего сегмента начинается со значения r, равного $r_0 + 1$. Если в таблице осталось неудалённых число строк $m_0 \le \frac{m}{p} + \frac{R}{m}$, то из такой таблицы больше не выделяются сегменты, а оставшиеся строки составляют последний (или *остаточный*) сегмент.

Для примера рассмотрим левую сегментацию *таблицы* **54** в случае $p = 2$, а затем $p = 3$.

Так как для *таблицы* **54** имеем $m = 40$, $R = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 31 = 151$, то когда $p = 2$, имеем:

$q = \frac{1600 - 2 \cdot 151}{2 \cdot 40} \approx 16,2; \qquad m_0 = \frac{1600 + 2 \cdot 151}{2 \cdot 40} \approx 23,8.$

Значит, в *первый* сегмент попадают строки для $r = 0, 1, 2,$ так как в этом случае имеем число строк в сегменте, равное $4 + 7 + 10 = 21.$ Во второй сегмент попадают остальные **19** строк.

Для этой же таблицы, когда $p = 3$ имеем:

$$q = \frac{1600 - 3 \cdot 151}{3 \cdot 40} \approx 9,6, \qquad m_0 = \frac{1600 + 3 \cdot 151}{3 \cdot 40} \approx 13,7.$$

Значит, в *первый* сегмент попадают строки для $r = 0, 1;$ во *второй* сегмент — для $r = 2;$ в *третий* — для $r = 3, 4,$ так как в этом случае имеем число строк в *первом* сегменте, равное $4 + 7 = 11;$ во *втором* — равное 10; в *третьем* — равное $9 + 7 = 16.$ Оставшиеся **3** строки составляют остаточный сегмент за *номером* **4** (строки которого присоединяются к последнему, к *третьему* сегменту).

В последних *трёх* столбцах *таблицы* **54** указателями выделены *сегменты* **1** и **2** (это в *третьем* справа столбце). В предпоследнем столбце выделены *сегменты* **1**, **2**, **3** и остаточный *сегмент* **4**.

Правая сегментация. В правой сегментации всегда выделяется *один* сегмент из таблицы, он преобразуется, возвращается в исходную таблицу, из которой вновь аналогичным образом происходит выделение опять – таки *одного* сегмента и *так далее.*

Выделение сегмента в правой сегментации имеет не **директивный**, а **‘‘естественный’’** характер и выполняется в результате анализа таблицы, описанного в **7.2.1**, при этом имеет такие отличия. В случае *исхода* **6 б)** в служебную строку записываем ту из продукций T или T^*, которая имеет меньшее (включая и *нулевое*) вхождение в анализируемый столбец из неисключённых строк. Далее, если в анализируемом столбце имеем *исход* **4** или **5**, то все строки, имеющие начало в анализируемом столбце, условно исключаются указателями со $*$ (*звёздочкой*), в то время как остальные исключаемые строки имеют указатели без $*$.

Если же в анализируемом столбце имеется *исход* **1**, то некая переменная w, имевшая до этого значение **0**, получит значение **1**, а затем указателями со $*$ исключаются все строки, имеющие начало в анализируемом столбце и уже потом поступаем так, как будто имеем в этом столбце *исход* **6** (*см. замечание* **43**, ниже). Анализ продолжается, пока не будет достигнут *исход* **2** или **3** (строки, дающие *исход* **2** или **3**, получают указатели без $*$), или все строки таблицы окажутся условно исключёнными.

В итоге: все те строки, которые в результате этого анализа получили указатели со $*$, выделяются в искомый сегмент.

Над этим сегментом и следует выполнить суперприведение, а результат этого суперприведения вернуть в таблицу.

Замечание 42. Если выделение сегмента закончено и переменная w осталась равной *нулю*, то это значит, что задача выполнима, а выполняющий набор строится по служебной строке, иначе нет оснований делать такое заключение. Следует переменную w обнулить и продолжить работу.

В *таблице* **54**, в самом *правом* столбце, показан результат правой сегментации. Указателями со $*$ отмечены строки, составляющие результат правой сегментации: это подтаблица, состоящая из *десяти* операторов (представлена *таблица* **55**).

Обращаем внимание на *столбец* **4**. В нём имеется *исход* **1**, но после того, как указателями 4^* исключены *два* оператора, мы видим, что вхождение T меньше, чем вхождение T^*, а поэтому указателем T (который подразумевается, но не указывается в служебной строке) исключаем ещё один оператор. Аналогичное положение и в *столбце* **2**.

Замечание 43. В *исходе* **1** после того, как исключены операторы, имеющие начало в анализируемом столбце, иногда мы можем иметь не *исход* **6**, а *исход* **2** или **3**, означающие конец анализа, а иногда в таблице может больше не оставаться операторов (как это случилось у нас в **1**–ом столбце). Это тоже конец анализа.

7.4.3 Суперприведение сегментов таблицы.

Хотя суперприведение рассмотрено в **7.3.4**, мы здесь вновь возвращаемся к суперприведению сегментов таблицы и рассматриваем суперприведение сегментов, полученных в результате *правой* сегментации. В такого рода сегментах, выделенных из таблицы (в виде подтаблиц), в служебную строку заносятся лишь числовые указатели, а клетки, которые были заняты буквенными указателями, остаются свободными. (Остаётся свободным и служебный столбец подтаблицы). Над этими подтаблицами выполняются преобразования суперприведения, которое, точнее, должно носить название: `условное`. Условность связана с тем, что в подтаблице пустые клетки служебной строки могут быть заполнены числовыми указателями лишь в результате добавления операторов из последовательности операторов, как результаты резолюций.

Сами же последовательности операторов строятся аналогично тому, как это делалось выше, а именно, так. В служебной строке подтаблицы справа налево отыскиваетя столбец с *указателем* **1**. Это значит, что из подтаблицы можно извлечь пару операторов, которые обеспечили этот исход. Эти *два* оператора с началом в s–ом столбце и дают *первую* пару согласованных операторов s^* и s^*. Над ними выполним резолюцию, результат которой даёт резолюционный оператор r^+, где $r > s$. Далее, проверяем на прополку операторы s^* и s^* и, если r^+ пропалывает *один* или *оба* оператора, то осуществляем это.

Если в столбце r был *указатель* **4** или **5**, то это значит, что в подтаблице имеется оператор r^*, который с оператором r^+ дают новую пару согласованных операторов с *исходом* **1**. Над этими *двумя* операторами и выполняется резолюция, которая вновь приведёт к очередному резолюционному оператору, для которого вновь рассмотрим указатель в служебной строке и *так далее* до тех пор, пока начало резолюционного оператора не окажется в столбце с пустой клеткой в служебной строке. Это значит, что последовательность операторов построена. Последним резолюционным оператором следует проверить на прополку все операторы последовательности, а затем указателями отметить те пары, которые могут быть свёрнуты в *один* (не выполняя самой свёртки).

Непрополотыми резолюционными операторами пополним подтаблицу и внесём изменения в столбцах служебной строки, вызванных началами вносимых операторов. Осуществим и условное исключение строк подтаблицы, вызванное этими пополнениями. Затем продолжим поиск следующей пары операторов, приводящей к *исходу* **1**.

Замечание 44. Иногда, первоначально полученные в подтаблице *исходы* **1** после выполнения преобразований над некоторыми из них исчезают из–за условного исключения операторов, связанного с пополнением подтаблицы.

Если такой пары нет, то сегмент считается условно суперприведённым, при этом операторы, исключённые из сегмента в результате прополки, должны быть исключены из таблицы, а операторы, пополнившие сегмент (непрополотые резолюционные операторы), должны пополнить таблицу.

Как иллюстрационный пример к сказанному может служить *первый* сегмент (ниже мы увидим ещё примеры), выделенный из *таблицы* **54** и представленный в *таблице* **55** (без последних *двух* операторов).

Столбец **4** — это первый справа налево столбец с *исходом* **1**. В последовательности к *таблице* **55** вынесены соответствующие операторы и выполнены резолюции (обратим внимание, что резолюционный оператор 5^+ пропалывает *второй* оператор 4^*). Таким образом, результат этой последовательности приводит к тому окончательному состоянию, которое представлено в *таблице* **55** (заметим, что сказанное в *замечании* **44**, как раз здесь и реализуется). Изменения в служебной строке записаны в строке над ней и вызваны последними операторами (операторами над чертой *таблицы* **55**), которыми и определены указатели в служебном столбце.

7.4.4 Суперприведение (и выполнимость) всей таблицы.

Если результат условного (или безусловного) суперприведения сегмента (*то есть* подтаблицы) внести в таблицу, а затем выделить (новый сегмент) подтаблицу, для которой вновь выполнить суперприведение, и *так далее*, то в конечном итоге мы получим суперприведённую таблицу. При этом следует иметь ввиду следующие *две* особенности.

I. Если в результате выделения очередного сегмента мы получим, что $w = 0$, то, как указано в *замечании* **42**, имеется выполнимость и дальнейшие преобразования могут быть прекращены, а решение построено по служебной строке.

II. Если же мы желаем иметь суперприведённую таблицу, то преобразования должны быть продолжены и продолжение (в случаях выхода на *исходы* **2** или **3**) должно быть с указателя T или T^* (первого слева направо в служебном столбце), который получит соответственно значение **4** или **5**.

Замечание 45. Поскольку выполнимость таблицы есть очень важная задача, то указанные *две* особенности должны быть предусмотрены в технологии решения *задач* **ВЫП**.

Теперь, если вернуться к нашей *таблице* **54** после внесения в неё результатов преобразования сегмента, представленного в *таблице* **55**, то получаем *таблицу* **56** (без последних *девяти* операторов).

Таблица 56

			1	5	5	4	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$					6
•			3	4	1	T^*	4	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$				5	
•			1	5	4	5	$\mathbf{T}^*$	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$			4		
	•		1	1	5	T	T^*	5	5	T^*	5	$\mathbf{T}^*$		3			
		•	1	5	1	4	1	4	5	5	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}^*$	2				
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&				
1	1	1						τ		T^*	T^*		7	8	**8**	**8**	**8**
—	—	2					τ				T^*	T	4^*	—	—	—	—
					$\bar\tau$				T		T^*		2^*	8	**8**	**8**	**8**
						$\bar\tau$			T	T^*			7	7	**7**	**7**	**7**
								τ			T	T	**8**	5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$
						$\bar\tau$			T^*		T		**8**	6	**6**	**6**	**6**
3	3	3							τ	T		T	6^*	6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$
					τ					T		T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
							τ	T^*				T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
			$\bar\tau$			T^*	T					T	0^*	0^*	3	4	**4**
				$\bar\tau$	T^*						T^*	T	2	8	**8**	**8**	**8**
6	6	4			τ	T^*	T		T				2^*	2^*	3	4	**4**
					τ	T^*				T^*	T^*		7	8	**8**	**8**	**8**
				τ		T^*		T				T	5	1^*	3	3	1^*
						τ		T^*	T	T^*			7	7	**7**	**7**	**7**
				τ	T^*		T^*			T^*			7	7	**7**	**7**	**7**
				τ	T		T^*				T^*		4	8	**8**	**8**	**8**
				τ	T			T^*	T				1^*	5	**5**	**5**	**5**
						$\bar\tau$			T		T^*	T	3^*	8	**8**	**8**	**8**
					$\bar\tau$	T	T^*					T	4	4	**4**	2^*	3
					$\bar\tau$				T	T^*	T		**8**	7	**7**	**7**	**7**
					$\bar\tau$	T			T		T		**8**	3	2^*	2^*	3
11					τ		T^*		T		T		**8**	4	**4**	2^*	2^*
						τ	T^*	T^*			T		**8**	5	**5**	**5**	**5**
			τ		T^*						T	T	**8**	2	0^*	0^*	2
						τ			T^*	T^*	T^*		7	8	**8**	**8**	**8**
						τ	T^*	T	T^*				6	6	**6**	**6**	**6**
						τ		T	T^*			T	6	6	**6**	**6**	**6**
							$\bar\tau$	T^*	T^*			T	6	6	**6**	**6**	**6**
							$\bar\tau$	T^*	T	T			4^*	5	**5**	**5**	**5**
9				τ		T	T			T			3	3	1^*	4	**4**
10			$\bar\tau$	T				T		T			5	0^*	0^*	1	0^*
5	5	5	τ	T	T					T			0^*	0^*	2	2	0^*
					$\bar\tau$		T				T^*	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
							$\bar\tau$			T	T	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
							$\bar\tau$		T^*		T	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
						τ		T^*			T^*	T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
					τ			T		T^*		T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
				$\bar\tau$			T		T			T^*	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
—	—	1								τ	T^*	T	7^*	—	—	—	—
—	—	2						$\bar\tau$			T^*	T	5^*	—	—	—	—
3	3	3									τ	T		8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$
4	4	4				τ	T	T^*	T	T		T		5	**5**	**5**	**5**
7	7	5		$\bar\tau$	T	T^*	T			T		T		1^*	3	4	**4**
8	6					τ	T	T	T	T		T			3^*	4	**4**
7	7				$\bar\tau$	T^*	T	T		T		T			3	4	**4**
8							$\bar\tau$	T	T	T	T	T				4^*	$\mathbf{4}^*$
9					τ	T	T	T		T	T	T				4	**4**
10				$\bar\tau$	T^*			T		T	T	T				1^*	2
11						$\bar\tau$	T^*		T		T	T					3^*

За дальнейшими преобразованиями (с выделением подтаблиц в правой сегментации) можно проследить по представленным *вариантам* **2** — **6** *таблицы* **56**, выделенным сегментам (*таблиц* **57** — **61**) и последовательностям операторов к каждому из них.

Замечание 46. Обращаем внимание на то, что при выделении сегмента те операторы, которые получили указатели a^* в преобразуемый сегмент могут не включаться, если только $a < b$, где b — номер самого *левого* столбца, в котором имелся *исход* **1**.

Таблица 57

	1	5	5		4		5		5		
$\bullet$	1	5	1	4	1	4	5	5			2
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
					τ				T^*	T	–
			$\bar{\tau}$				T		T^*		8
3							τ	T		T	
	$\bar{\tau}$			T^*	T					T	3
4			τ	T^*	T		T				3
		τ	T			T^*	T				
				$\bar{\tau}$			T		T^*	T	8
					$\bar{\tau}$	T^*	T	T			
5	τ	T	T					T			
								τ	T^*	T	–
						$\bar{\tau}$			T^*	T	–
3									τ	T	
4				τ	T	T^*	T	T		T	
5		$\bar{\tau}$	T	T^*	T			T		T	3

К таблице 57

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
4^*					τ				T^*	T	–
4^*					$\bar\tau$	T^*	T	T			•
5^+						τ	T	T	T^*	T	–
5^*						$\bar\tau$			T^*	T	–
6^+							$\bar\tau$	T	T^*	T	–
6^*							τ	T		T	3
7^+								$\bar\tau$	T^*	T	–
7^*								τ	T^*	T	–
8^*									τ	T	3

К таблице 57

$2'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
0^*	$\bar\tau$			T^*	T					T	•
0^*	τ	T	T					T			5
1^+		$\bar\tau$	T	T^*	T			T		T	5
1^*		τ	T			T^*	T				•
2^+			$\bar\tau$	T^*	T	T^*	T	T		T	–
2^*			τ	T^*	T		T				4
3^+				τ	T	T^*	T	T		T	4

Таблица 58

	4										
•	1	1	5			5	5		5		3
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
						τ			T	T	
							τ	T		T	
	$\bar\tau$			T^*	T					T	3
6			τ	T^*	T		T				3
		τ		T^*		T				T	3
	$\bar\tau$	T				T		T			
	τ	T	T					T			2
									τ	T	
7		$\bar\tau$	T	T^*	T			T		T	3
6				τ	T	T	T	T		T	
7			$\bar\tau$	T^*	T	T		T		T	3

К таблице 58

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
1^*		τ		T^*		T				T	•
1^*		$\bar\tau$	T	T^*	T			T		T	7
2^+			$\bar\tau$	T^*	T	T		T		T	7
2^*			τ	T^*	T		T				6
3^+				τ	T	T	T	T		T	6

Таблица 59

	5				4						
•	1	5	4	5		5	5		5		4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
						τ			T	T	
							τ	T		T	
			$\bar\tau$	T			T		T		
	τ		T^*						T	T	
9		τ		T	T			T			4
10	$\bar\tau$	T				T		T			1
									τ	T	
8				τ	T	T	T	T		T	4
8					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	4
9			τ	T	T	T		T	T	T	4
10		$\bar\tau$	T^*			T		T	T	T	1

К таблице 59

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
0^*	τ		T^*						T	T	•
0^*	$\bar\tau$	T				T		T			10
1^+		$\bar\tau$	T^*			T		T	T	T	10
1^*		τ		T	T			T			9
2^+			τ	T	T	T		T	T	T	9
2^*			$\bar\tau$	T			T		T		•
3^+				$\bar\tau$	T	T	T	T	T	T	–
3^*				τ	T	T	T	T		T	8
4^+					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	8

Таблица 60

•			1		4	5	5		5		5
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
						τ			T	T	
							τ	T		T	
			$\bar{\tau}$	T	T^*					T	3
			$\bar{\tau}$	T			T		T		3
11			τ		T^*		T		T		
									τ	T	
					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	T	
11				$\bar{\tau}$	T^*		T		T	T	3

К таблице 60

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
2^*			$\bar{\tau}$	T	T^*					T	•
2^*			τ		T^*		T		T		11
3^+				$\bar{\tau}$	T^*		T		T	T	11

Таблица 61

•	1	5	5	4	4	5	5		5		6
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
						τ			T	T	
12							τ	T		T	7
13		τ		T^*		T				T	
			τ		T^*		T		T		
	$\bar{\tau}$	T				T		T			7
14	τ	T	T					T			7
									τ	T	
					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	T	7
				$\bar{\tau}$	T^*		T		T	T	
12								$\bar{\tau}$	T	T	7
13			$\bar{\tau}$	T^*		T		T		T	7
14		$\bar{\tau}$	T			T		T			7

К таблице 61

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bullet$
0^*	$\bar{\tau}$	T				T		T			$\bullet$
0^*	τ	T	T					T			14
1^+		$\bar{\tau}$	T			T		T			14
1^*		τ		T^*		T				T	13
2^+			$\bar{\tau}$	T^*		T		T		T	13
2^*			τ		T^*		T		T		$\bullet$
3^+				τ	T^*	T	T	T	T	T	–
3^*				$\bar{\tau}$	T^*		T		T	T	$\bullet$
4^+					τ	T	T	T	T	T	–
4^*					$\bar{\tau}$	T	T	T	T	T	–
5^+						$\bar{\tau}$	T	T	T	T	–
5^*						τ			T	T	$\bullet$
6^+							$\bar{\tau}$	T	T	T	–
6^*							$\bar{\tau}$	T		T	12
7^+								$\bar{\tau}$	T	T	12

То, что сказано в *замечании* **46**, можно увидеть на примере сегмента, представленного в *таблице* **60**.

Продолжение преобразований после **6**–го варианта представлены в *таблице* **62** *вариантами* **7** — **9**, сегментом, представленным в *таблице* **63** и последовательностями операторов к *вариантам* **7** и **9**, а также к *таблице* **63**.

Обращаем внимание, что, как и раньше, резолюционный оператор $\langle\, \bar{\tau}\, \rangle$, полученный в последовательности операторов к *варианту* **9**, является пропалывающим оператором не только для этой последовательности, но и для всей таблицы.

Таким образом, завершить анализ и поиск выполняющих наборов с одновременным суперприведением таблицы следует на таблице, полученной из *таблицы* **62** после её прополки (в самом правом столбце этой таблицы отмечены “–” (`чертой`) прополотые операторы).

Таблица 62

	3	5	T	1	T	5	4	**4**	**5**	$\mathbf{T}^*$			9	
•	1	5	1	4	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**5**	$\mathbf{T}^*$		8		
•	3	5	1	4	T	5	T^*	4	**5**	$\mathbf{T}^*$	7			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&			
1						τ		T^*	T^*		**8**	**8**	**8**	
			$\bar\tau$				T		T^*		**8**	**8**	**8**	
16				$\bar\tau$			T	T^*			3*	3*	6	
						τ			T	T	5*	**5***	5*	–
				$\bar\tau$			T^*		T		6	**6**	3*	
12							τ	T		T	7	**7**	**7**	–
			τ					T		T^*	**9**	**9**	**9**	
					τ	T^*				T^*	**9**	**9**	**9**	
	$\bar\tau$			T^*	T					T	4	0*	4	–
		$\bar\tau$	T^*						T^*	T	**8**	**8**	**8**	–
6			τ	T^*	T		T				4	2*	6	
			τ	T^*				T^*	T^*		**8**	**8**	**8**	
13		τ		T^*		T				T	1*	1*	1*	
				τ		T^*	T	T^*			5	**5**	6	
		τ	T^*		T^*			T^*			1*	4	1*	
		τ	T		T^*				T^*		**8**	**8**	**8**	
		τ	T			T^*	T				5	**5**	6	
				$\bar\tau$			T		T^*	T	**8**	**8**	**8**	–
			$\bar\tau$	T	T^*					T	3	4	3	–
15			$\bar\tau$				T	T^*	T		2*	2*	–	–
			$\bar\tau$	T			T		T		3	3	6	
11			τ		T^*		T		T		2*	4	6	
				τ	T^*	T^*			T		5	**5**	5	
17	τ		T^*						T	T	0*	0*	0*	–
				τ			T^*	T^*	T^*		**8**	**8**	**8**	
				τ	T^*	T	T^*				6	**6**	3*	
				τ		T	T^*			T	6	**6**	3*	–
					$\bar\tau$	T^*	T^*			T	6	**6**	5	–
					$\bar\tau$	T^*	T	T			7	**7**	**7**	
9		τ		T	T			T			7	**7**	**7**	
10	$\bar\tau$	T				T		T			7	**7**	**7**	
14	τ	T	T					T			7	**7**	**7**	
			$\bar\tau$		T				T^*	T^*	**9**	**9**	**9**	
					$\bar\tau$			T	T	T^*	**9**	**9**	**9**	
					$\bar\tau$		T^*		T	T^*	**9**	**9**	**9**	
				τ		T^*			T^*	T^*	**9**	**9**	**9**	
			τ			T		T^*		T^*	**9**	**9**	**9**	
		$\bar\tau$			T		T			T^*	**9**	**9**	**9**	
3									τ	T	**8***	**8***	**8**	–
4				τ	T	T^*	T	T		T	7	**7**	**7**	–
7		$\bar\tau$	T	T^*	T			T		T	7	**7**	**7**	–
8				τ	T	T	T	T		T	7	**7**	**7**	–
7			$\bar\tau$	T^*	T	T		T		T	7	**7**	**7**	–
8					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	7	**7**	**7**	–
9			τ	T	T	T		T	T	T	7	**7**	**7**	–
10		$\bar\tau$	T^*			T		T	T	T	7	**7**	**7**	–
11				$\bar\tau$	T^*		T		T	T	3*	4	6	–
12								$\bar\tau$	T	T	7*	**7***	**7***	–
13			$\bar\tau$	T^*		T		T		T	7	**7**	**7**	–
14		$\bar\tau$	T			T		T			7	**7**	**7**	
15					τ		T	T^*	T			4*	–	–
16							$\bar\tau$	T^*	T				6*	
17			τ	T^*	T				T	T			4	–
										$\bar\tau$				

Последовательность к варианту 7

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
2^*			τ		T^*		T		T		•
2^*			$\bar\tau$				T	T^*	T		15
4^+					τ		T	T^*	T		15

Таблица 63

•	1	5	1	4	5	5		4	5		8
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
16				$\bar\tau$			T	T^*			6
						τ			T	T	
	$\bar\tau$			T^*	T					T	
			τ	T^*	T		T				6
		τ		T^*		T				T	
			$\bar\tau$				T	T^*	T		–
17	τ		T^*						T	T	2
									τ	T	
								$\bar\tau$	T	T	
					τ		T	T^*	T		–
16							$\bar\tau$	T^*	T		6
17			τ	T^*	T				T	T	2

К таблице 63

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
2^*			τ	T^*	T		T				•
2^*			$\bar\tau$				T	T^*	T		–
3^+				τ	T		T	T^*	T		–
3^*				$\bar\tau$			T	T^*			16
4^+					$\bar\tau$		T	T^*	T		–
4^*					τ		T	T^*	T		–
6^+							$\bar\tau$	T^*	T		16

К таблице 63

$8'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bullet$
0^*	$\bar{\tau}$			T^*	T					T	$\bullet$
0^*	τ		T^*						T	T	17
2^+			τ	T^*	T				T	T	17

Последовательность к варианту 9

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bullet$
3^*				$\bar{\tau}$			T^*		T		$\bullet$
3^*				τ		T	T^*			T	–
5^+						$\bar{\tau}$	T^*		T	T	–
5^*						τ			T	T	–
6^+							τ		T	T	–
6^*							$\bar{\tau}$	T^*	T		$\bullet$
7^+								τ	T	T	–
7^*								$\bar{\tau}$	T	T	–
8^+									$\bar{\tau}$	T	–
8^*									τ	T	–
9^+										$\bar{\tau}$	$\bullet$

7.4.5 О процессе сжатия таблицы и свёртки операторов.

В технологии *правой* сегментации сжатие сегментов таблицы проводить не следует и процесс сжатия следует проводить на всей таблице только после того, как процесс суперприведения закончен на ней.

Процесс свёртки операторов следует проводить тоже лишь в том случае, когда такая необходимость имеется и тоже в конце, то есть на всей суперприведённой таблице.

Такие заключения являются не только результатом простых соображений, но они получили и опытное подтверждение при решении конкретных задач.

7.4.6 О программных проработках.

О характере и содержании программных проработок сказано в *8.14*.

Глава 8

Выполнимость в σ-нотации

Использование σ–нотации в исследовании выполнимости — это ещё один метод, начала которого изложены в этой главе. Заметим, что параграфы **8.7** — **8.10** могли бы быть размещены после параграфа **7.1**, однако такое их размещение связано с желанием провести параллель между FS–операторами и σ–нотации и показать возможность использования последней в совершенствовании преобразований.

8.1 Пример задачи ВЫП, представленной σ–операторами

Рассмотрим пример задачи, записанной в *таблице* **5** *главы* **7**, которая представлена ниже в *таблице* **1**, где, кроме того, для каждого дизъюнкта рядом записан его σ–оператор.

Если относительно *таблицы* **1** решать задачу **ВЫП**, то, как знаем (см. **3.5.4**), можно найти конъюнкцию всех операторов этой задачи и по результирующему оператору сделать заключение о выполнимости. Однако последовательность выполнения конъюнкций играет важную роль, в чем будем иметь возможность убедиться не раз. Чтобы указать, над какими операторами выполняется конъюнкция, в *столбце* "a" *таблицы* **1** одинаковыми цифрами помечены пары операторов, а в *таблице* **2** в *столбце* "a" указаны те же номера уже для результирующих операторов.

Выбор таких пар, строго говоря, является произвольным, что означает: можно выполнять конъюнкции подряд или в какой–то иной последовательности. Но нами выбрана такая последовательность из соображений удобства *"ручного"* выполнения этих операций. В *столбце* "b" вновь одинаковыми цифрами помечены пары операторов, результат конъюнкций над которыми представлен в *таблице* **3** (обозначения в которой аналогичны *таблице* **2**).

Теперь легко убедиться в том, что конъюнкция над *шестёркой* операторов *таблицы* **3** (вначале попарно, как это указано в *столбце* "b", а затем последовательно) даёт следующий σ–оператор:

$$\langle\langle\, \nu_1\, \bar\tau\, \nu\, \nu_2\, \nu_3\, (\, \nu_1\, \bar\tau\, \nu\, \nu_2\,)^1\, \rangle\rangle. \tag{8.1}$$

Таблица 1

a	0	1	2	3	4	5	σ–оператор	b
1			τ		T^*	T	$\langle\langle\, \bar\nu_3\, \tau\, \bar\nu_4\, \rangle\rangle$	
2	τ	T^*				T	$\langle\langle\, (\, \bar\nu\, \tau)^3\, \bar\nu_4\, \rangle\rangle$	0
7	$\bar\tau$		T		T		$\langle\langle\, ((\, \bar\tau^1\, \bar\nu_1\,)^1\, \bar\nu_3\,)^1\, \rangle\rangle$	0
10		τ	T^*	T^*			$\langle\langle\, (\, \bar\nu_2\, \bar\nu_1\, \tau_1\,)^2\, \rangle\rangle$	
1	$\bar\tau$				T^*	T^*	$\langle\langle\, \bar\nu_4\, \bar\nu_3\, \bar\tau^3\, \rangle\rangle$	
7		τ		T^*	T^*		$\langle\langle\, (\, \bar\nu_3\, \bar\nu_2\, \tau_1^1\,)^1\, \rangle\rangle$	
8	$\bar\tau$		T^*		T^*		$\langle\langle\, (\, \bar\nu_3\, (\bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^1\,)^1\, \rangle\rangle$	
10		$\bar\tau$	T	T			$\langle\langle\, (\, \bar\tau_1\, \bar\nu_1\, \bar\nu_2\,)^2\, \rangle\rangle$	1
2	$\bar\tau$				T	T^*	$\langle\langle\, \bar\nu_4\, \bar\tau^3\, \bar\nu_3\, \rangle\rangle$	
9		τ	T^*		T^*		$\langle\langle\, (\, \bar\nu_3\, (\, \bar\nu_1\, \tau_1\,)^1\,)^1\, \rangle\rangle$	
11	$\bar\tau$		T		T^*		$\langle\langle\, (\, \bar\nu_3\, (\, \bar\tau^1\, \bar\nu_1\,)^1\,)^1\, \rangle\rangle$	
12		$\bar\tau$	T	T^*			$\langle\langle\, (\, \bar\nu_2\, \bar\tau_1\, \bar\nu_1\,)^2\, \rangle\rangle$	
3			τ	T^*		T	$\langle\langle\, (\, \bar\nu_2\, \tau_2\,)^1\, \bar\nu_4\, \rangle\rangle$	
4		τ		T		T	$\langle\langle\, (\, \tau_1^1\, \bar\nu_2\,)^1\, \bar\nu_4\, \rangle\rangle$	1
11	τ	T^*	T^*				$\langle\langle\, (\, \bar\nu_1\, \bar\nu\, \tau\,)^3\, \rangle\rangle$	2
5	$\bar\tau$		T^*			T	$\langle\langle\, (\, \bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^2\, \bar\nu_4\, \rangle\rangle$	2
3		τ	T			T^*	$\langle\langle\, \bar\nu_4\, (\, \tau_1\, \bar\nu_1\,)^2\, \rangle\rangle$	
12	τ	T		T^*			$\langle\langle\, (\, \bar\nu_2\, (\, \tau\, \bar\nu\,)^1\,)^2\, \rangle\rangle$	
4			τ	T^*		T^*	$\langle\langle\, \bar\nu_4\, (\, \bar\nu_2\, \tau_2\,)^1\, \rangle\rangle$	
6		τ			T	T	$\langle\langle\, \tau_1^2\, \bar\nu_3\, \bar\nu_4\, \rangle\rangle$	1
5		τ		T^*		T^*	$\langle\langle\, \bar\nu_4\, (\, \bar\nu_2\, \tau_1^1\,)^1\, \rangle\rangle$	
8		$\bar\tau$		T^*	T		$\langle\langle\, (\, \bar\nu_2\, \bar\tau_1^1\, \bar\nu_3\,)^1\, \rangle\rangle$	
9	τ			T^*	T		$\langle\langle\, (\, \bar\nu_2\, \tau^2\, \bar\nu_3\,)^1\, \rangle\rangle$	
6	$\bar\tau$			T		T^*	$\langle\langle\, \bar\nu_4\, (\, \bar\tau^2\, \bar\nu_2\,)^1\, \rangle\rangle$	

Таблица 2

a	σ–оператор	b
1	$\langle\langle\, \bar\nu_3\, \tau_2^1\, \bar\nu_3\, \bar\tau^3 \,\rangle\rangle$	1
2	$\langle\langle\, (\bar\nu\, \tau)^3\, \bar\tau^3\, \bar\nu_3 \,\rangle\rangle$	1
3	$\langle\langle\, (\bar\nu_2\, \tau_2)^1\, (\,\tau_1\, \bar\nu_1\,)^2 \,\rangle\rangle$	2
4	$\langle\langle\, (\,\tau_1^1\, \bar\nu_2\,)^1\, (\,\bar\nu_2\, \tau_2\,)^1 \,\rangle\rangle$	2
5	$\langle\langle\, (\,\bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^2\, (\,\bar\nu_2\, \tau_1^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	3
6	$\langle\langle\, \tau_1^2\, \bar\nu_3\, (\,\bar\tau^2\, \bar\nu_2\,)^1 \,\rangle\rangle$	3
7	$\langle\langle\, ((\,\bar\tau^1\, \bar\nu_1\,)^1\, \bar\nu_2\, \tau_1^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	4
8	$\langle\langle\, (\,\bar\nu_2\, \tau_1^1\, (\,\bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	4
9	$\langle\langle\, (\,\bar\nu_2\, \tau^2\, (\,\bar\nu_1\, \tau_1\,)^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	5
10	$\langle\langle\, (\,\bar\tau_1\, \bar\nu_1\, \bar\nu_1\, \tau_1\,)^2 \,\rangle\rangle$	6
11	$\langle\langle\, ((\,\bar\nu_1\, \bar\nu\, \tau\,)^1\, (\,\bar\tau^1\, \bar\nu\, \tau\,)^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	5
12	$\langle\langle\, (\,\bar\nu_2\, \bar\tau_1\, \tau\, \bar\nu\,)^2 \,\rangle\rangle$	6

Таблица 3

a	σ–оператор	b
1	$\langle\langle\, (\,\bar\nu\, \tau\,)^2\, (\,\bar\nu\, \tau\, \nu_1\,)^1\, \bar\tau^4 \,\rangle\rangle$	1
2	$\langle\langle\, (\,\tau_1^1\, \tau_2\,)^1\, (\,\tau_1\, \bar\nu_1\, \tau_1\, \nu_1\,)^1 \,\rangle\rangle$	1
3	$\langle\langle\, (\,\tau_1\, \bar\tau\, \nu\,)^1\, (\,\bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^1\, (\,\bar\tau^2\, \tau_1^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	2
4	$\langle\langle\, (\,\bar\tau^1\, \bar\nu_1\, \bar\tau\, \nu\, \tau_1\, \bar\nu_1\, \bar\tau^1\, \tau_1\, \bar\tau\, \nu\,)^1 \,\rangle\rangle$	2
5	$\langle\langle\, (\,\bar\nu_1\, \bar\nu\, \tau\, \tau^2\, (\,\bar\tau^1\, \tau_1\,)^1\,)^1 \,\rangle\rangle$	3
6	$\langle\langle\, (\,\bar\tau_1\, \bar\nu_1\, \bar\tau_1\, \tau\, \nu\,)^2 \,\rangle\rangle$	3

Выкладки над σ–операторами *таблиц* **2** и **3** выполнялись с использованием *свойств* **3.5.2** и следующих равенств (верность которых устанавливается развёрнутыми записями, заключёнными между *первым* и *последним* знаками равенств каждой строки):

$$
\begin{aligned}
\langle\langle\, \tau_2^1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, (\,\bar\nu\, \tau\,)^2 \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, (\,\bar\nu_1\, \nu_1\,)^1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, (\,\bar\nu\, \tau\,)^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\,\bar\nu\, \tau\, \nu_1\,)^1 \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \tau_1\, \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau_2 \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \tau_1\, \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \bar\nu\, \nu_1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau_1\, \nu_1 \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, (\,\bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau_1^2 \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, (\,\bar\nu_1\, \bar\tau^1\,)^1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, (\,\tau_1\, \tau_1\,)^1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\,\tau_1\, \bar\tau\, \nu\,)^1 \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \bar\tau^1\, \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau_1^1 \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \bar\tau^1\, \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau_1\, \tau_1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \bar\tau\, \nu\, \tau_1 \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \bar\nu_1\, \bar\tau^1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau_1^1 \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \bar\nu_1\, \bar\tau^1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau_1\, \tau_1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau_1\, \bar\tau\, \nu \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \bar\nu_1\, \bar\nu\, \tau \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau^2 \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \bar\nu_1\, \bar\nu\, \tau \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau^1\, \tau\, \tau \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau^2 \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \tau_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \bar\nu\, \tau \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \bar\nu\, \nu \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \bar\nu\, \tau \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau_1 \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \tau_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau\, \bar\nu \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \bar\nu\, \nu \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \tau\, \bar\nu \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau\, \nu \,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\, \tau_1 \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \bar\tau\, \nu \,\rangle\rangle &= \langle\langle\, \bar\nu\, \nu \,\rangle\rangle \,\overline{/}\, \langle\langle\, \bar\tau\, \nu \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \bar\tau\, \nu \,\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

Построенный σ–оператор **(8.1)** является результатом конъюнкции над всеми σ–операторами *таблицы* **1**. По этому оператору можем сделать заключение: задача *таблицы* **1** имеет *три* выполняющих набора и даже записать их:

$$(\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\theta), \quad (\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\theta\,\bar\theta), \quad (\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\theta\,\bar\theta\,\bar\theta).$$

Разумеется, что только для того, чтобы установить выполнимость задачи, представленной в *таблице* **1**, нет необходимости находить конъюнкцию всех операторов *таблицы* **1**, то есть строить σ–оператор **(8.1)**: можно найти конъюнкцию лишь определенной части операторов. Каких именно ?

Обратимся вновь к *таблице* **1**. В её *столбец* "b" занесены цифры **0**, **1** и **2** против некоторых σ–операторов. Конъюнкция операторов, помеченных цифрой **0**, даёт σ–оператор:

$$\langle\langle\, (\bar{\nu}\,\tau)^3\,\bar{\nu}_4\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\, ((\bar{\tau}^1\,\bar{\nu}_1)^1\,\bar{\nu}_3)^1\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\bar{\tau}\,\nu\,\bar{\nu}\,\tau)^1\,(\bar{\nu}\,\tau)^2\,(\bar{\tau}^1\,\bar{\nu}_1)^1\,\bar{\nu}_3\,\rangle\rangle, \tag{8.2}$$

а помеченных цифрой **1** — σ–оператор:

$$\langle\langle\, (\bar{\tau}_1\,\bar{\nu}_1\,\bar{\nu}_2)^2\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\, (\tau_1^1\,\bar{\nu}_2)^1\,\bar{\nu}_4\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\nu_1\,\tau_1\,\bar{\nu}_2)^1\,(\bar{\tau}_1\,\bar{\nu}_1\,\bar{\nu}_2)^1\,\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle(\nu_1\tau_1\bar{\nu}_2)^1(\bar{\tau}_1\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2)^1\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\tau_1^2\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\nu_1\tau_1\tau_1^1\nu_1\tau_1\bar{\nu}_2(\bar{\tau}_1\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2)^1\rangle\rangle. \tag{8.3}$$

И, наконец, находим конъюнкцию операторов, помеченных цифрой **2**:

$$\langle\langle\, (\bar{\nu}_1\,\nu\,\tau)^3\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\, (\bar{\nu}_1\,\tau^1)^2\,\bar{\nu}_4\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\bar{\nu}_1\,\bar{\tau}\,\nu)^2\,(\bar{\nu}_1\,\bar{\nu}\,\tau)^2\,\rangle\rangle. \tag{8.4}$$

Конечно, сейчас можно было бы найти конъюнкцию σ–операторов **(8.2)**, **(8.3)** и **(8.4)**, но, на самом деле, достаточно заметить, что указанные σ–операторы имеют соответственно начала:

$$\langle\langle\, \bar{\tau}\,\nu\,\bar{\nu}\,\tau\,\ldots\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, \nu_1\,\tau_1\,\ldots\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, \bar{\nu}_1\,\bar{\tau}\,\nu\,\ldots\rangle\rangle,$$

которые в конъюнкции дают общее начало:

$$\langle\langle\, \nu_1\,\bar{\tau}\,\nu\,\ldots\rangle\rangle, \tag{8.5}$$

указывающие на выполнимость задачи *таблицы* **1**, поскольку операторы *таблицы* **1** с пустыми клетками в *столбце* "b" имеют одно из начал

$$\langle\langle\, \bar{\nu}_2\,\ldots\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, \bar{\nu}_3\,\ldots\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, \bar{\nu}_4\,\ldots\rangle\rangle,$$

и в конъюнкции изменить начало **(8.5)** не могут.

Итак, вместо конъюнкции над *двадцатью четырьмя* σ–операторами мы обошлись конъюнкцией над *семью* σ–операторами, решая лишь **задачу ВЫП**, при этом, как мы видим, могли бы обойтись лишь началами этих *семи* операторов. Разумеется, что если бы начала этих σ–операторов оказались бы такими, что их конъюнкция давала бы общий оператор с началом $\langle\langle\, \nu_2\,\ldots\rangle\rangle$, то необходимо было бы увеличить порядок начал операторов и тем самым расширить и список включённых в конъюнкцию σ–операторов и так далее.

Сущность решения **задачи ВЫП** с использованием σ–операторов видна из рассмотренного примера, но более глубокий анализ будет изложен ниже. Он заключается в установке последовательности и способах выполнения конъюнкций над σ–операторами, составляющих содержание исчисления σ–операторов.

8.2 Последовательность σ–операторов в таблице задачи ВЫП

Из предыдущего примера знаем, что удачный выбор последовательности выполнения конъюнкций над σ–операторами может позволить сделать вывод о выполнимости до того, как будет найдена конъюнкция над всеми операторами таблицы.

Чтобы проанализировать этот процесс, обратимся к задаче, записанной в *таблице* **28** *главы* **7**, которая представлена ниже в *таблице* **4**, где для каждого дизъюнкта рядом записан ещё и его σ–оператор. Последовательность операторов в *таблице* **4** отличается от последовательности операторов *таблицы* **28** *главы* **7**: в *таблице* **4** оператор записаны в неубывающей последовательности, то есть в последовательности неубывания их длины. Обращаем ещё внимание на то, что операторы в *таблице* **4** занумерованы. Нумерация выполнена для того, чтобы легче следить за тем, какие операторы из *таблицы* **4** попали во вновь образованные подтаблицы из операторов *таблицы* **4**.

Искомая последовательность операторов определяется путём деления таблицы *задачи* **ВЫП** на непересекающиеся подтаблицы (сегменты таблицы) из выделенных операторов. Само выделение операторов базируется на упрощённом анализе таблицы, аналогичном описанному в **7.2**, но с некоторой особенностью. Поэтому здесь вновь сформулируем, как проводится такой анализ с расстановкой указателей в **III** служебной строке и служебном столбце таблицы.

Анализ (чтение содержимого столбца) проводится справа налево по столбцам, начиная с самого правого, последовательно без пропусков. При анализе столбца с номером k в **III** служебную строку этого столбца заносим один из указателей T или T^* (здесь не указываем какой: это будет сделано ниже), а в служебный столбец против тех операторов, которые в k–ом столбце имеют продукцию, совпадающую с указателем **III** служебной строки, заносим указатель k, если только до анализа этого столбца не был уже занесён указатель. При этом, если в анализируемом k–ом столбце имеется продукция τ или $\bar{\tau}$ (одна или несколько) и оператор с такой продукцией ещё не получил указателя, то теперь он его получает, но этот указатель будет со $*$, то есть указателем будет k^*. Анализ заканчивается тогда, когда все строки служебного столбца получат указатели. Строки, получившие в служебном столбце одинаковые указатели k (без $*$), составляют сегмент с номером k. Все строки, получившие указатели со *звездой*, составляют сегмент, называемый *шапочным* сегментом.

Таблица 4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	σ–оператор
1								τ	T	T	$\langle\langle\tau_7\,\bar\nu_7\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
2						$\bar\tau$	T^*	T		T	$\langle\langle(\bar\nu_5\,\bar\tau_5\,\bar\nu_6)^1\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
3						$\bar\tau$	T	T^*			$\langle\langle(\bar\nu_6\,\bar\tau_5\,\bar\nu_5)^2\rangle\rangle$
4						$\bar\tau$		T	T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,\bar\tau_5^1\,\bar\nu_6)^1\rangle\rangle$
5						τ	T^*	T^*	T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,\bar\nu_6\,\bar\nu_5\,\tau_5)^1\rangle\rangle$
6					$\bar\tau$	T	T	T			$\langle\langle(\bar\tau_4\,\bar\nu_4\,\bar\nu_5\,\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$
7					$\bar\tau$		T^*	T			$\langle\langle(\bar\nu_5\,\bar\tau_4^1\,\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$
8					$\bar\tau$		T	T	T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,\bar\tau_4^1\,\bar\nu_5\,\bar\nu_6)^1\rangle\rangle$
9					τ	T^*	T^*		T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,(\bar\nu_5\,\bar\nu_4\,\tau_4)^1\,)^1\rangle\rangle$
10					τ				T	T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,\tau_4^3\,\bar\nu_7\rangle\rangle$
11				τ	T	T				T	$\langle\langle(\tau_3\,\bar\nu_3\,\bar\nu_4)^3\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
12				τ			T^*			T	$\langle\langle(\bar\nu_5\,\tau_3^2)^2\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
13				τ	T^*		T	T			$\langle\langle((\bar\nu_3\,\tau_3)^1\,\bar\nu_5\,\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$
14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			$\langle\langle((\bar\nu_4\,\bar\nu_3\,\bar\tau_3)^1\,\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$
15				$\bar\tau$			T		T	T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,(\bar\tau_3^2\,\bar\nu_5)^1\,\bar\nu_7\rangle\rangle$
16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,(\bar\nu_5(\bar\tau_3\,\bar\nu_3)^1\,)^2\rangle\rangle$
17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,(\bar\nu_6\,\bar\tau_3^2\,\bar\nu_5)^1\rangle\rangle$
18			τ				T			T	$\langle\langle(\tau_2^3\,\bar\nu_5)^2\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
19			$\bar\tau$	T			T^*			T	$\langle\langle(\bar\nu_5\,(\bar\tau_2\,\bar\nu_2)^2)^2\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
20			τ	T				T^*		T	$\langle\langle(\bar\nu_6\,(\tau_2\,\bar\nu_2)^3)^1\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	$\langle\langle(\bar\nu_6\,(\bar\nu_4\,\bar\tau_2^2)^1)^1\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
22			τ	T				T	T		$\langle\langle((\tau_2\,\bar\nu_2)^3\,\bar\nu_6\,\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$
23			τ	T^*		T^*	T				$\langle\langle(\bar\nu_4\,(\bar\nu_2\,\tau_2)^1\,\bar\nu_5)^3\rangle\rangle$
24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			$\langle\langle(\bar\nu_6\,(\bar\nu_4\,(\bar\nu_2\,\bar\tau_2)^1)^1)^2\rangle\rangle$
25			τ			T^*		T	T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,(\bar\nu_4\,\tau_2^2)^1\,\bar\nu_6)^1\rangle\rangle$
26			τ				T^*		T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,(\bar\nu_5\,\tau_2^3)^1)^1\rangle\rangle$
27			τ	T^*						T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,(\bar\nu_2\,\tau_2)^5\rangle\rangle$
28			τ			T^*	T^*			T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,(\bar\nu_5\,\bar\nu_4\,\tau_2^2)^2\rangle\rangle$
29			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,\bar\nu_7\,(\bar\nu_3\,\bar\tau_2^1)^3\rangle\rangle$
30		τ	T			T^*				T	$\langle\langle(\bar\nu_4\,(\tau_1\,\bar\nu_1)^2)^3\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T	$\langle\langle(\bar\nu_5\,(\bar\nu_3\,\bar\tau_1^2)^1)^2\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
32		τ		T		T			T		$\langle\langle(((\tau_1^1\,\bar\nu_2)^1\,\bar\nu_4)^2\,\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$
33		τ	T^*		T			T			$\langle\langle(((\bar\nu_1\,\tau_1)^1\,\bar\nu_3)^2\,\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$
34		τ		T^*	T		T^*				$\langle\langle(\bar\nu_5\,(\bar\nu_2\,\tau_1^1\,\bar\nu_3)^1)^3\rangle\rangle$
35		τ		T^*	T^*				T^*		$\langle\langle(\bar\nu_7\,(\bar\nu_3\,\bar\nu_2\,\tau_1^1)^3)^1\rangle\rangle$
36		$\bar\tau$		T				T		T^*	$\langle\langle\bar\nu_8\,((\bar\tau_1^1\,\bar\nu_2)^3\,\bar\nu_6)^1\rangle\rangle$
37	τ				T^*		T			T	$\langle\langle((\bar\nu_3\,\tau^3)^1\,\bar\nu_5)^2\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
38	$\bar\tau$			T		T^*				T	$\langle\langle(\bar\nu_4\,(\bar\tau^2\,\bar\nu_2)^1)^3\,\bar\nu_8\rangle\rangle$
39	τ	T			T				T		$\langle\langle(((\tau\,\bar\nu)^2\,\bar\nu_3)^3\,\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$
40	$\bar\tau$	T	T						T		$\langle\langle((\bar\tau\,\bar\nu\,\bar\nu_1)^5\,\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$

Таблица 5

III			T^*	T^*	T^*	T^*	T^*	T^*	T^*	T^*	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
1								τ	T	T	7^*
6					$\bar\tau$	T	T	T			4^*
11				τ	T	T				T	3^*
18			τ				T			T	2^*
22			τ	T				T	T		2^*
32		τ		T		T			T		1^*
40	$\bar\tau$	T	T						T		0^*
39	τ	T			T				T		0^*
33		τ	T^*		T			T			2
13				τ	T^*		T	T			4
37	τ				T^*		T			T	4
30		τ	T			T^*				T	5
38	$\bar\tau$			T		T^*				T	5
23			τ	T^*		T^*	T				5
14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			5
2						$\bar\tau$	T^*	T		T	6
7					$\bar\tau$		T^*	T			6
12				τ			T^*			T	6
19			$\bar\tau$	T			T^*			T	6
34		τ		T^*	T		T^*				6
31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T	6
3						$\bar\tau$	T	T^*			7
20			τ	T				T^*		T	7
21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7
24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7
4						$\bar\tau$		T	T^*		8
8					$\bar\tau$		T	T	T^*		8
35		τ		T^*	T^*				T^*		8
25			τ			T^*		T	T^*		8
26			τ				T^*		T^*		8
9					τ	T^*	T^*		T^*		8
5						τ	T^*	T^*	T^*		8
10					τ				T	T^*	9
15				$\bar\tau$			T		T	T^*	9
36		$\bar\tau$		T				T		T^*	9
27			τ	T^*						T^*	9
16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	9
28			τ			T^*	T^*			T^*	9
17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	9
29			$\bar\tau$		T				T^*	T^*	9

Таблица 6

III			T	T^*	T	T^*	T	T	T^*	T	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&
10					τ				T	T^*	4^*
32		τ		T		T			T		1^*
40	$\bar\tau$	T	T						T		2
27			τ	T^*						T^*	3
16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	4
34		τ		T^*	T		T^*				4
39	τ	T			T				T		4
24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			5
28			τ			T^*	T^*			T^*	5
3						$\bar\tau$	T	T^*			6
15				$\bar\tau$			T		T	T^*	6
17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	6
23			τ	T^*		T^*	T				6
6					$\bar\tau$	T	T	T			7
7					$\bar\tau$		T^*	T			7
13				τ	T^*		T	T			7
14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			7
22			τ	T				T	T		7
33		τ	T^*		T			T			7
36		$\bar\tau$		T				T		T^*	7
4						$\bar\tau$		T	T^*		8
5						τ	T^*	T^*	T^*		8
8					$\bar\tau$		T	T	T^*		8
9					τ	T^*	T^*		T^*		8
25			τ			T^*		T	T^*		8
26			τ				T^*		T^*		8
29			$\bar\tau$		T				T^*	T^*	8
35		τ		T^*	T^*				T^*		8
1								τ	T	T	9
2						$\bar\tau$	T^*	T		T	9
11				τ	T	T				T	9
12				τ			T^*			T	9
18			τ				T			T	9
19			$\bar\tau$	T			T^*			T	9
20			τ	T				T^*		T	9
21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	9
30		τ	T			T^*				T	9
31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T	9
37	τ				T^*		T			T	9
38	$\bar\tau$			T		T^*				T	9

Результаты двух различных сегментаций *таблицы* **4** представлены в *таблицах* **5** и **6**, в которых (для большей наглядности) двойными линиями разделены сегменты. Шапочный сегмент *таблицы* **5** содержит 8 операторов, а *таблицы* **6** — всего **2** оператора. В *таблице* **5** нет сегментов с *номерами* **1** и **3**, а в *таблице* **6** нет сегмента с *номером* **1**.

Замечание 1. Переставлять и переписывать операторы так, чтобы все они были расположены в сегменте подряд, а сегменты следовали бы в каком–то определённом порядке, строго говоря, нет никакой необходимости. Эту функцию прекрасно выполняет служебный столбец.

Замечание 2. Выбор указателей в **III** служебной строке определяется какими–то целями, которые могут быть наложены дополнительно. В частности, в *таблице* **5** все указатели суть T^*. Такой выбор связан с тем, что мы не только находим выполняющий набор, но кроме того, желаем найти в первую очередь выполняющий набор с минимальным номером. Если бы мы поставили цель: найти в первую очередь выполняющий набор с максимальным номером, то следовало бы принять все указатели в **III** служебной строке равными T (указанное заключение основано на способе нахождения выполняющего набора, о котором речь пойдёт ниже).

Замечание 3. Выбор указателей в **III** служебной строке *таблицы* **6** продиктован желанием включить в очередной сегмент максимальное число строк на каждом шаге анализа, то есть выбирается тот из указателей, который совпадает с максимальным вхождением продукции T или T^*, а в случае их одинакового вхождения (лишь для определённости) делается выбор в пользу T^*. Такой выбор способствует более быстрому нахождению выполняющего набора, что объясняется способом нахождения его и статистическими соображениями.

8.3 Декатенация σ–операторов

На примере **задачи ВЫП**, представленной в *таблице* **1**, мы убедились в том, что заключение о выполнимости можно сделать из анализа лишь части операторов и при этом можно рассматривать конъюнкции над частями σ–операторов, полученными в результате декатенации.

Под декатенацией σ–оператора $\langle\langle\, a^n \,\rangle\rangle$ следует понимать такую его запись в виде конкатенации, при которой σ–оператор порядка n представляется в виде двух частей (фрагментов) порядка $n-1$, и этот процесс представления с понижением порядка может быть продолжен на фрагментах самого малого порядка, что формально может быть записано так:

$$\begin{aligned} \langle\langle a^n\rangle\rangle \;&=\; \langle\langle a^{n-1}\, a^{n-1}\rangle\rangle \;=\; \langle\langle a^{n-2}\, a^{n-2}\, a^{n-1}\rangle\rangle \;=\; \langle\langle a^{n-1} a^{n-2} a^{n-2}\rangle\rangle \;= \\ &=\; \langle\langle a^{n-3}\, a^{n-3}\;\, a^{n-2}\, a^{n-1}\rangle\rangle \;=\; \langle\langle a^{n-2}\, a^{n-3}\, a^{n-3}\, a^{n-1}\rangle\rangle \;= \\ =\; \langle\langle a^{n-1}\, a^{n-3}\;\, &a^{n-3}\, a^{n-2}\rangle\rangle \;=\; \langle\langle a^{n-1}\, a^{n-2}\, a^{n-3}\, a^{n-3}\rangle\rangle \;=\; \ldots . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Поскольку в катенационной записи **(8.6)** всегда имеются *две* части самого малого порядка, то выбор нужной из них ведётся по **III** служебной строке таблицы **задачи ВЫП**, в которой выполнена сегментация.

Для примера, рассмотрим декатенацию σ–операторов из *таблицы* **4**, которые вошли в шапочный сегмент и в сегменты с номерами $2 \div 6$ *таблицы* **6**. Результаты этой декатенации представлены в *таблице* **7** как итог таких рассуждений:

σ–операторы *таблицы* **4** имеют порядок **10**. При декатенации (первом делении) получаем *два* подоператора *порядка* **9**. В строке N *таблицы* **7** мы их должны были обозначить: 9 и $9'$ (это левая и правая части деления σ–оператора или верхняя и нижняя его половина соответственно). Указатель T в *столбце* **9** в **III** служебной строке *таблицы* **6** (в соответствии с *замечанием* **13** из *главы* **7**) говорит о том, что поиск решения продолжается в нижней половине, то есть повторной декатенации подвергается нижняя (правая) половина, что приводит вновь к двум подоператорам порядка *восемь*: $9'.8$ и $9'.8'$. А поскольку в *столбце* **8** *таблицы* **6** имеем указатель T^*, то в результате *третьей* декатенации имеем: $9'.8.7$ и $9'.8.7'$ и так далее. Строго говоря, заполнение строки N в *таблице* **7** должно выглядеть так: 9; $9'.8'$; $9'.8.7$; $9'.8.7'.6$; $9'.8.7'.6'.5'$; $9'.8.7'.6'.5'$; $9'.8.7'.6'.5.4$; $9'.8.7'.6'.5.4'.3'$; $9'.8.7'.6'.5.4'.3.2$; $9'.8.7'.6'.5.4'.3.2'$. Однако мы внесли в *таблицу* **7** из этого перечня лишь последние цифры и при этом никаких недоразумений не должно возникнуть, так как в *таблицу* **7** заносим в ходе декатенации правую или левую (остающиеся) половины, записав их в соответствующей свободной части таблицы.

Замечание 4. При заполнении строки N *таблицы* **7** следует понимать, что объединение столбцов 2 и $2'$ даёт столбец 3; 3 и $3'$

даёт столбец $4'$; 4 и $4'$ даёт столбец 5 и так далее. Сам процесс декатенации можно закончить номером последнего справа налево столбцом, в котором имеется указатель (как для *строк* **32** и **40**), или когда фрагмент, подлежащий декатенации, есть $\langle\langle\bar{\nu}_k\rangle\rangle$ или $\langle\langle\nu_k\rangle\rangle$.

С использованием этого описания построена и *таблица* **8** (заметим, что описание позволяет строить декатенационные таблицы в самом общем случае, как только заполнена **III** служебная строка **задачи ВЫП**). В *таблице* **8** представлена декатенация σ–операторов *таблицы* **4**, которые вошли в шапочный сегмент и в сегменты с *номерами* **2**, **4** и **5** *таблицы* **5**. Разумеется, что сказанное относительно *таблицы* **7** в полной мере относится и к *таблице* **8**, как и к любой декатенационной таблице.

Таблица 7

<table>
<tr><th>N</th><th>9</th><th>7</th><th>6</th><th>4</th><th>2</th><th>$2'$</th><th>$3'$</th><th>$5'$</th><th>$8'$</th></tr>
<tr><td>10</td><td>$\bar{\nu}_8$</td><td>τ_4^2</td><td>τ_4^1</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td colspan="3">ν_3</td><td>τ_4</td><td>$\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>$((\tau_1^1\bar{\nu}_2)^1\bar{\nu}_4)^2\bar{\nu}_7$</td><td>$((\tau_1^1\bar{\nu}_2)^1\bar{\nu}_4)^1$</td><td>$(\tau_1^1\bar{\nu}_2)^1\bar{\nu}_4$</td><td>$\tau_1^1\bar{\nu}_2$</td><td>$\tau_1$</td><td>$\tau_1$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>40</td><td>$(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^5\bar{\nu}_7$</td><td>$(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^4$</td><td>$(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^3$</td><td>$(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^1$</td><td>$\bar{\tau}\bar{\nu}$</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>$\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1$</td><td>$(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^2$</td><td>$\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>27</td><td>$\bar{\nu}_8$</td><td>$(\bar{\nu}_2\tau_2)^3$</td><td>$(\bar{\nu}_2\tau_2)^2$</td><td>$\bar{\nu}_2\tau_2$</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_2$</td><td>τ_2</td><td>$(\bar{\nu}_2\tau_2)^1$</td><td>$(\bar{\nu}_2\tau_2)^4$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$\bar{\nu}_8$</td><td>$\bar{\nu}_5(\bar{\tau}_3\bar{\nu}_3)^1$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\tau}_3$</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\tau}_3\bar{\nu}_3$</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\tau}_3\bar{\nu}_3)^1)^1$</td></tr>
<tr><td>34</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3)^1)^2$</td><td>$\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3)^1$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_2\tau_1^1$</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3$</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3)^1)^1$</td></tr>
<tr><td>39</td><td>$((\tau\bar{\nu})^2\bar{\nu}_3)^3\bar{\nu}_7$</td><td>$((\tau\bar{\nu})^2\bar{\nu}_3)^2$</td><td>$((\tau\bar{\nu})^2\bar{\nu}_3)^1$</td><td>$(\tau\bar{\nu})^2$</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_3$</td><td>$(\tau\bar{\nu})^2\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>24</td><td>$(\bar{\nu}_6(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1)^1)^1$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_4$</td><td>$(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_6(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1)^1$</td></tr>
<tr><td>28</td><td>$\bar{\nu}_8$</td><td>$\bar{\nu}_5\bar{\nu}_4\tau_2^2$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_4$</td><td>$\tau_2^2$</td><td>$(\bar{\nu}_5\bar{\nu}_4\tau_2^2)^1$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$(\bar{\nu}_6\bar{\tau}_5\bar{\nu}_5)^1$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\tau}_5$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_6\bar{\tau}_5\bar{\nu}_5$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$\bar{\nu}_8$</td><td>$\bar{\tau}_3^2\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\tau}_3^2$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$\bar{\nu}_8$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\tau}_3^2$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_6\bar{\tau}_3^2\bar{\nu}_5$</td></tr>
<tr><td>23</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1\bar{\nu}_5)^2$</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_5$</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1\bar{\nu}_5)^1$</td></tr>
</table>

Таблица **8** позволяет понять, почему верно *замечание* **2**. В самом деле, по любой декатенационной таблице разумно искать выполняющий набор, выполняя конъюнкции над фрагментами операторов по столбцам декатенационной таблицы, причём выполнять конъюнкции над фрагментами столбцов с меньшим номером следует раньше, так как они имеют меньшую длину (фрагменты $\langle\langle\bar{\nu}_k\rangle\rangle$ в столбце с *номером* $k+1$ не изменяют значения конъюнкции). А первый из столбцов с *номером* $s+1$, имеющий отличную от $\langle\langle\nu_s\rangle\rangle$ результирующую конъюнкцию фрагментов этого столбца, и даёт возможность найти выполняющий набор с наименьшим номером.

Таблица 8

N	2	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
1	$\bar\nu_6$						ν_6	$\bar\nu_7$	$\bar\nu_8$
6	ν_3			$\bar\nu_3$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_6$	$\bar\tau_4\bar\nu_4\bar\nu_5\bar\nu_6$	$(\bar\tau_4\bar\nu_4\bar\nu_5\bar\nu_6)^1$
11	$\bar\nu_2$		ν_2	$\bar\nu_3$	$\bar\nu_4$	$\tau_3\bar\nu_3\bar\nu_4$	$(\tau_3\bar\nu_3\bar\nu_4)^1$	$(\tau_3\bar\nu_3\bar\nu_4)^2$	$\bar\nu_8$
18	$\bar\nu_1$	ν_1	τ_2	τ_2^1	τ_2^2	$\bar\nu_5$	$\tau_2^3\bar\nu_5$	$(\tau_2^3\bar\nu_5)^1$	$\bar\nu_8$
22	$\bar\nu_1$	ν_1	$\bar\nu_2$	$\tau_2\bar\nu_2$	$(\tau_2\bar\nu_2)^1$	$(\tau_2\bar\nu_2)^2$	$\bar\nu_6$	$\bar\nu_7$	$(\tau_2\bar\nu_2)^3\bar\nu_6\bar\nu_7$
32	τ_1	τ_1	$\bar\nu_2$	$\tau_1^1\bar\nu_2$	$\bar\nu_4$	$(\tau_1^1\bar\nu_2)^1\bar\nu_4$	$((\tau_1^1\bar\nu_2)^1\bar\nu_4)^1$	$\bar\nu_7$	$((\tau_1^1\bar\nu_2)^1\bar\nu_4)^2\bar\nu_7$
40	$\bar\tau\bar\nu$	$\bar\nu_1$	$\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1$	$(\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1)^1$	$(\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1)^2$	$(\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1)^3$	$(\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1)^4$	$\bar\nu_7$	$(\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1)^5\bar\nu_7$
39	$\tau\bar\nu$	$\tau\bar\nu$	$(\tau\bar\nu)^1$	$\bar\nu_3$	$(\tau\bar\nu)^2\bar\nu_3$	$((\tau\bar\nu)^2\bar\nu_3)^1$	$((\tau\bar\nu)^2\bar\nu_3)^2$	$\bar\nu_7$	$((\tau\bar\nu)^2\bar\nu_3)^3\bar\nu_7$
33	$\bar\nu_1$	τ_1	$\bar\nu_1\tau_1$	$\bar\nu_3$	$(\bar\nu_1\tau_1)^1\bar\nu_3$	$((\bar\nu_1\tau_1)^1\bar\nu_3)^1$	$\bar\nu_6$	$((\bar\nu_1\tau_1)^1\bar\nu_3)^2\bar\nu_6$	$(((\bar\nu_1\tau_1)^1\bar\nu_3)^2\bar\nu_6)^1$
13	$\bar\nu_3$			τ_3	$\bar\nu_3\tau_3$	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_6$	$(\bar\nu_3\tau_3)^1\bar\nu_5\bar\nu_6$	$((\bar\nu_3\tau_3)^1\bar\nu_5\bar\nu_6)^1$
37	$\bar\nu_3$			τ^3	$\bar\nu_3\tau^3$	$\bar\nu_5$	$(\bar\nu_3\tau^3)^1\bar\nu_5$	$((\bar\nu_3\tau^3)^1\bar\nu_5)^1$	$\bar\nu_8$
30	$\bar\nu_4$				$(\tau_1\bar\nu_1)^2$	$\bar\nu_4(\tau_1\bar\nu_1)^2$	$(\bar\nu_4(\tau_1\,\bar\nu_1)^2)^1$	$(\bar\nu_4(\tau_1\bar\nu_1)^2)^2$	$\bar\nu_8$
38	$\bar\nu_4$				$(\bar\tau^2\bar\nu_2)^1$	$\bar\nu_4(\bar\tau^2\bar\nu_2)^1$	$(\bar\nu_4(\bar\tau^2\,\bar\nu_2)^1)^1$	$(\bar\nu_4(\bar\tau^2\bar\nu_2)^1)^2$	$\bar\nu_8$
23	$\bar\nu_4$				$(\bar\nu_2\tau_2)^1$	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_4(\bar\nu_2\tau_2)^1\bar\nu_5$	$(\bar\nu_4(\bar\nu_2\tau_2)^1\bar\nu_5)^1$	$(\bar\nu_4(\bar\nu_2\tau_2)^1\bar\nu_5)^2$
14	$\bar\nu_4$				$\bar\nu_3\bar\tau_3$	$\bar\nu_4\bar\nu_3\bar\tau_3$	$\bar\nu_6$	$(\bar\nu_4\bar\nu_3\bar\tau_3)^1\bar\nu_6$	$((\bar\nu_4\bar\nu_3\bar\tau_3)^1\bar\nu_6)^1$

Теперь поясним *замечание* **3** на *таблице* **7**. По этой таблице мы не получаем прямого подтверждения для этого замечания, но видим, что если из *таблицы* **4** удалить лишь *один* оператор **10** или заменить в *операторе* **10** фрагмент $\langle\langle\tau_4\rangle\rangle$ на $\langle\langle\bar\tau_4\rangle\rangle$, то выполняющий оператор легко обнаруживается, так как уже в *столбце* **2** имеем:

$$\langle\langle\,\tau_1\,\rangle\rangle\,\overline{/}\,\langle\langle\,\bar\tau\,\bar\nu\,\rangle\rangle\;=\;\langle\langle\,\bar\tau\,\nu\,\rangle\rangle.$$

Только что приведённые к *замечанию* **3** пояснения приводят нас к мысли о сегментации таблицы с использованием принципа, симметричного к тому, который использовался при построении *таблицы* **6**, а именно: выбор указателей в **III** служебной строке осуществлять руководствуясь желанием включать в очередной сегмент минимальное вхождение продукций T или T^*, а в случае их одинакового вхождения (лишь для определённости) делается выбор в пользу T^*. Поскольку такой выбор приводит к максимизации шапочного сегмента (хотя и не всегда даёт максимально возможный шапочный сегмент), мы, тем не менее, будем называть его *принципом максимизации шапки*, а симметричный ему — *принципом минимизации шапки*.

Таблица 9

		T^*	T^*	T	T	T															5
		T^*	T^*	T^*	T															4	
		T^*	T^*	T^*	T	T	T										3				
			T^*	T	T	T										2		10		10	10
				T^*	T	T	T	T^*	T	T^*	1	10				10	10	$7'$		$7'$	$7'$
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&	6	$7'$	8	$9'$	6	$7'$	5	6	5	6
2						$\bar\tau$	T^*	T		T	5^*	–	–		–	–	–	–	–	–	–
4						$\bar\tau$		T	T^*		5^*		–	–		5^*	–	–	–	–	–
7					$\bar\tau$		T^*	T			4^*	–	–			–	–	–	–	–	–
9					τ	T^*	T^*		T^*		4^*	–		–		–	4^*	–	–	–	–
12				τ			T^*			T	3^*	–			–	–	3^*		–	3^*	–
14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			3^*		–			3^*	–	–	–	–	–
19			$\bar\tau$	T			T^*			T	2^*	–			–	–	2^*		–	2^*	–
25			τ			T^*		T	T^*		2^*		–	–		2^*	–	–	–	–	–
26			τ				T^*		T^*		2^*	–		–		–	2^*		–	2^*	–
30		τ	T			T^*				T	1^*				–	1^*	1^*	–		–	1^*
31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T	1^*	–			–	–	1^*		–	1^*	–
38	$\bar\tau$			T		T^*				T	0^*				–	3	0^*	–		–	3
35		τ		T^*	T^*				T^*		3			–		1^*	3			3	1^*
33		τ	T^*		T			T			4		–			4	–	–	–	–	–
34		τ		T^*	T		T^*				4	–				–	4		–	4	–
11				τ	T	T				T	5				–	5	4			4	5
6					$\bar\tau$	T	T	T			6		–			5	–	–	–	–	–
8					$\bar\tau$		T	T	T^*		6		–	–		4^*	–	–	–	–	–
13				τ	T^*		T	T			6		–			3^*	–	–	–	–	–
18			τ				T			T	6				–	2^*	6	**6**		**6**	2^*
23			τ	T^*		T^*	T				6					2^*	6	**6**		**6**	2^*
37	τ				T^*		T			T	6				–	0^*	6	**6**		**6**	0^*
3						$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**				**7**	6	**6**		**6**	5^*
5						τ	T^*	T^*	T^*		7	**7**		–		**7**	5^*	–	–	–	–
20			τ	T				T^*		T	7	**7**			–	**7**	2^*			2^*	3
21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**			–	**7**	1^*	–		–	2^*
24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**				**7**	3	–		–	2^*
1								τ	T	T	8	**8**	**8**		–	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
22			τ	T				T	T		8	**8**	**8**			**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
32		τ		T		T			T		8	**8**	**8**			**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
39	τ	T			T				T		8	**8**	**8**			**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
40	$\bar\tau$	T	T						T		8	**8**	**8**			**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
10					τ				T	T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
15				$\bar\tau$			T		T	T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
27			τ	T^*						T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
28			τ			T^*	T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
29			$\bar\tau$		T				T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
36		$\bar\tau$		T				T		T^*	9	**9**	**9**	**9**		**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**

Таблица 10

<table>
<tr><th>N</th><th>8</th><th>6</th><th>5</th><th>4</th><th>3</th><th>$3'$</th><th>$7'$</th><th>$9'$</th></tr>
<tr><td>2</td><td>$\bar{\nu}_5\bar{\tau}_5\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\nu_4$</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td>$\bar{\tau}_5$</td><td>ν_4</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_7\bar{\tau}_5^1\bar{\nu}_6$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\bar{\nu}_5\bar{\tau}_4^1\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\tau}_4$</td><td>$\nu_3$</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$(\bar{\nu}_5\bar{\tau}_4^1\bar{\nu}_6)^1$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td colspan="2">ν_3</td><td>$\bar{\nu}_5\bar{\nu}_4\tau_4$</td><td>$\bar{\nu}_7(\bar{\nu}_5\bar{\nu}_4\tau_4)^1$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$(\bar{\nu}_5\tau_3^2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>τ_3^1</td><td>τ_3</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>ν_2</td><td>$\bar{\nu}_5\tau_3^2$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>$(\bar{\nu}_4\bar{\nu}_3\bar{\tau}_3)^1\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_4\bar{\nu}_3\bar{\tau}_3$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>$\nu_2$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$((\bar{\nu}_4\bar{\nu}_3\bar{\tau}_3)^1\bar{\nu}_6)^1$</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\tau}_2\bar{\nu}_2)^2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$(\bar{\tau}_2\bar{\nu}_2)^1$</td><td>$\bar{\tau}_2\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\tau}_2$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\nu}_5(\bar{\tau}_2\bar{\nu}_2)^2$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>25</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td>$\bar{\nu}_4\tau_2^2$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>τ_2^1</td><td>τ_2</td><td>τ_2</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_7(\bar{\nu}_4\tau_2^2)^1\bar{\nu}_6$</td></tr>
<tr><td>26</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>τ_2^2</td><td>τ_2^1</td><td>τ_2</td><td>τ_2</td><td>$\bar{\nu}_5\tau_2^3$</td><td>$\bar{\nu}_7(\bar{\nu}_5\tau_2^3)^1$</td></tr>
<tr><td>30</td><td>$(\bar{\nu}_4(\tau_1\bar{\nu}_1)^2)^2$</td><td>$\bar{\nu}_4(\tau_1\bar{\nu}_1)^2$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$(\tau_1\bar{\nu}_1)^1$</td><td>$\tau_1\bar{\nu}_1$</td><td>$\tau_1\bar{\nu}_1$</td><td>$(\bar{\nu}_4(\tau_1\bar{\nu}_1)^2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>31</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_3\bar{\tau}_1^2)^1)^1$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_3\tau_1^2$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>$\tau_1^1$</td><td>$\tau_1^1$</td><td>$\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_3\tau_1^2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>38</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2)^1)^2$</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\tau}^2$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2)^1)^1$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>35</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td>$(\bar{\nu}_3\bar{\nu}_2\tau_1^1)^1$</td><td>$\bar{\nu}_3\bar{\nu}_2\tau_1^1$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$\tau_1^1$</td><td>$(\bar{\nu}_3\bar{\nu}_2\tau_1^1)^2$</td><td>$\bar{\nu}_7(\bar{\nu}_3\bar{\nu}_2\tau_1^1)^3$</td></tr>
<tr><td>33</td><td>$((\bar{\nu}_1\tau_1)^1\bar{\nu}_3)^2\bar{\nu}_6$</td><td>$((\bar{\nu}_1\tau_1)^1\bar{\nu}_3)^1$</td><td>$(\bar{\nu}_1\tau_1)^1\bar{\nu}_3$</td><td>$(\bar{\nu}_1\tau_1)^1$</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$(((\bar{\nu}_1\tau_1)^1\bar{\nu}_3)^2\bar{\nu}_6)^1$</td></tr>
<tr><td>34</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3)^1)^1$</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_2\tau_1^1$</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3)^1$</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\nu}_2\tau_1^1\bar{\nu}_3)^1)^2$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$(\tau_3\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4)^2$</td><td>$\tau_3\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4$</td><td>$\tau_3\bar{\nu}_3$</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_4$</td><td>$(\tau_3\bar{\nu}_3\bar{\nu}_4)^1$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\bar{\tau}_4\bar{\nu}_4\bar{\nu}_5\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\tau}_4\bar{\nu}_4$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$(\bar{\tau}_4\bar{\nu}_4\bar{\nu}_5\bar{\nu}_6)^1$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td>$\bar{\tau}_4^1$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_7\bar{\tau}_4^1\bar{\nu}_5\bar{\nu}_6$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$(\bar{\nu}_3\tau_3)^1\bar{\nu}_5\bar{\nu}_6$</td><td>$(\bar{\nu}_3\tau_3)^1$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_6$</td><td>$((\bar{\nu}_3\tau_3)^1\bar{\nu}_5\bar{\nu}_6)^1$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>$\tau_2^3\bar{\nu}_5)^1$</td><td>τ_2^3</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\tau_2^3\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>23</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1\bar{\nu}_5)^1$</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1\bar{\nu}_5$</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\tau_2)^1\bar{\nu}_5)^2$</td></tr>
<tr><td>37</td><td>$((\bar{\nu}_3\tau^3)^1\bar{\nu}_5)^1$</td><td>$(\bar{\nu}_3\tau^3)^1$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_5$</td><td>$(\bar{\nu}_3\tau^3)^1\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\bar{\nu}_6\bar{\tau}_5\bar{\nu}_5$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\tau}_5\bar{\nu}_5$</td><td>$(\bar{\nu}_6\bar{\tau}_5\bar{\nu}_5)^1$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\bar{\nu}_7$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_6$</td><td>$\bar{\nu}_5\tau_5$</td><td>$\bar{\nu}_7\bar{\nu}_6\bar{\nu}_5\tau_5$</td></tr>
<tr><td>20</td><td>$\bar{\nu}_6(\tau_2\bar{\nu}_2)^3$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_6$</td><td>$(\tau_2\bar{\nu}_2)^3$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>21</td><td>$\bar{\nu}_6(\bar{\nu}_4\bar{\tau}_2^2)^1$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_6$</td><td>$(\bar{\nu}_4\bar{\tau}_2^2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>24</td><td>$\bar{\nu}_6(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1)^1$</td><td colspan="5">$\bar{\nu}_6$</td><td>$(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1)^1$</td><td>$(\bar{\nu}_6(\bar{\nu}_4(\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2)^1)^1)^1$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>τ_7</td><td colspan="6">$\bar{\nu}_7$</td><td>$\bar{\nu}_8$</td></tr>
<tr><td>22</td><td>$(\tau_2\bar{\nu}_2)^3\bar{\nu}_6$</td><td colspan="6">$\bar{\nu}_7$</td><td>$(\tau_2\bar{\nu}_2)^3\bar{\nu}_6\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>$((\tau_1^1\bar{\nu}_2)^1\bar{\nu}_4)^2$</td><td colspan="6">$\bar{\nu}_7$</td><td>$((\tau_1^1\bar{\nu}_2)^1\bar{\nu}_4)^2\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>39</td><td>$((\tau\bar{\nu})^2\bar{\nu}_3)^3$</td><td colspan="6">$\bar{\nu}_7$</td><td>$((\tau\bar{\nu})^2\bar{\nu}_3)^3\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>40</td><td>$\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^5$</td><td colspan="6">$\bar{\nu}_7$</td><td>$(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\nu}_1)^5\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$\tau_4^3\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>15</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$(\bar{\tau}_3^2\bar{\nu}_5)^1\bar{\nu}_7$</td></tr>
<tr><td>16</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$(\bar{\nu}_5(\bar{\tau}_3\bar{\nu}_3)^1)^2$</td></tr>
<tr><td>17</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$(\bar{\nu}_6\bar{\tau}_3^2\bar{\nu}_5)^1$</td></tr>
<tr><td>27</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$(\bar{\nu}_2\tau_2)^5$</td></tr>
<tr><td>28</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$(\bar{\nu}_5\bar{\nu}_4\tau_2^2)^2$</td></tr>
<tr><td>29</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$\bar{\nu}_7(\bar{\nu}_3\bar{\tau}_2^1)^3$</td></tr>
<tr><td>36</td><td colspan="7">$\bar{\nu}_8$</td><td>$((\bar{\tau}_1^1\bar{\nu}_2)^3\bar{\nu}_6)^1$</td></tr>
</table>

Сегментация *таблицы* **4**, выполненная по принципу максимизации шапки, представлена в *таблице* **9**, а в *таблице* **10** даны в полном объеме декатенации σ–операторов сегментированной *таблицы* **9**.

Замечание 5. Если по *таблице* **10** восстановить те подтаблицы *таблицы* **9** из FS–операторов, которые порождают фрагменты σ–операторов *столбцов* 6, $7'$, 8 и $9'$ (почему не упоминаются остальные столбцы? — станет ясно ниже), то мы получим подтаблицы, которые имеют строки и столбцы, определяемые так. Столбцами таких подтаблиц станут соответственно столбцы: $0 \div 5$, $0 \div 6$, $0 \div 7$ и $0 \div 8$, а строками станут строки, которые соответствуют пустым клеткам в *столбцах* 6, $7'$, 8 и $9'$ *таблицы* **9** (эти столбцы следуют сразу справа от *первого* варианта служебного столбца). Обратим внимание, что исключение строк указателями столбца идёт в соответствии с требованиями **III** служебной строки, а с помощью “$-$″ (черты) по указателю, сопряжённому с указателем в *первом* слева направо исключаемом столбце, при этом учитываются и τ и $\bar{\tau}$ и, как обычно, τ отождествляется с T^*, а $\bar{\tau}$ — с T. Черте в r–ом столбце *таблицы* **9** соответствует фрагмент $\langle\langle\bar{\nu}_{r-1}\rangle\rangle$ в r–ом столбце *таблицы* **10**.

Что касается остальных столбцов *таблицы* **9**, то из того, что уже сказано выше, и из того, что будет сказано ниже, станет вполне ясным их предназначение.

8.4 Выполнимость методом декатенации

Рассмотрим, как делать заключения о выполнимости или противоречивости задачи **ВЫП** по декатенационным таблицам, начав с примера *таблицы* **10**. Прежде всего, по операторам шапочного сегмента делаем заключение: в столбце $6'$ (подвергнутому декатенации, в результате которой получены столбцы $5, 4, 3$ и $3'$) имеем фрагмент $\langle\langle\nu_5\rangle\rangle$, так как в строках **2** и **4** (достаточно было бы и одной) столбца 5 имеем фрагмент $\langle\langle\nu_4\rangle\rangle$, в строке **7** столбца 4 — фрагмент $\langle\langle\nu_3\rangle\rangle$, в строке **9**, объединении столбцов 3 и $3'$, дающих столбец $4'$, имеем тоже фрагмент $\langle\langle\nu_3\rangle\rangle$ (заметим, что этот же результат мы получаем и по строкам **12** и **14** в столбцах $3'$ и 3).

Теперь предстоит определить, каков же результат конъюнкций фрагментов операторов столбца 6, но вместо конъюнкции этих фрагментов мы выполним их декатенацию, то есть декатенацию фрагментов σ–операторов столбца 6 *таблицы* **10**. Однако прежде чем это делать, заметим, что в *таблице* **9** столбцу 6 из *таблицы* **10** соответствует подтаблица из столбцов $0 \div 5$ и строк, имеющих в служебном столбце указатели ≤ 6 (включая и помеченные $*$, то есть строк из шапочного сегмента). Так вот над этой подтаблицей и выполним сегментацию по *принципу максимизации шапки.* Результат этой сегментации (без перестановки, то есть с помощью одних лишь указателей) представлен в *варианте* **2 III** служебной строки и служебного столбца *таблицы* **9**, а результат декатенации сегментов σ–операторов можно увидеть в *таблице* **11**.

Замечание 6. В *таблице* **9**, во *втором* варианте служебного столбца, против тех операторов, которые в *столбце* **6** имеют продукцию T^*, *чертой* "–" исключены из анализа операторы подтаблицы, так как эти операторы в *таблице* **10** в указанных строках *столбца* **6** имеют фрагменты $\langle\langle\bar{\nu}_5\rangle\rangle$, никак не влияющие на конъюнкцию фрагментов столбца. Обратим внимание, что в *шестом* столбце **III** служебной строки был указатель T, а если бы там был указатель T^*, то чертой исключали бы из анализа операторы подтаблицы, имеющие в *столбце* **6** продукцию T. (Здесь ещё раз уточнено то, о чём сказано выше).

Сказанное в этом *замечании* должно иметься ввиду без напоминания.

По *таблице* **11**, точнее, по операторам её шапочного сегмента, видим, что в столбце 5 строки 4 имеем фрагмент $\langle\langle\nu_4\rangle\rangle$, в столбце 4 строки 8 — фрагмент $\langle\langle\nu_3\rangle\rangle$, по строкам 13 и 14 и столбцам $3'$ (это объединение столбцов 2 и $2'$) и 3 имеем в каждом из них фрагмент $\langle\langle\nu_2\rangle\rangle$.

Анализировать остальные строки *таблицы* **11** надобности нет, так как получаем, что столбец 6, который подвергся декатенации, имеет в конъюнкции фрагментов его операторов итоговый фрагмент $\langle\langle\nu_5\rangle\rangle$.

Замечание 7. Хотя и в *таблице* **10** и в *таблице* **11** выполняется декатенация как операторов шапочного сегмента, так и остальных сегментов, но фактически использовалась лишь часть операторов шапочного сегмента, более того, понятно, что декатенация операторов или фрагментов операторов вне шапочного сегмента не понадобится, так как в анализе мы интересуемся: имеются ли фрагменты $\langle\langle\nu_k\rangle\rangle$?

Это замечание в дальнейшем будет учитываться.

Таблица 11

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">6</td></tr>
<tr><td>N</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>$2'$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>ν_4</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_4$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\bar{\tau}_4$</td><td>ν_3</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_3$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$\bar{\nu}_3\tau_3$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td colspan="2">ν_2</td></tr>
<tr><td>14</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>ν_2</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_2$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>τ_2^2</td><td>τ_2^1</td><td>τ_2</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>ν_1</td></tr>
<tr><td>23</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_2\tau_2$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>ν_1</td></tr>
<tr><td>25</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>τ_2^1</td><td>τ_2</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>ν_1</td></tr>
<tr><td>30</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$(\tau_1\bar{\nu}_1)^1$</td><td>$\tau_1\bar{\nu}_1$</td><td>τ_1</td><td>$\bar{\nu}_1$</td></tr>
<tr><td>35</td><td>$\bar{\nu}_3\bar{\nu}_2\tau_1^1$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td><td>$\tau_1$</td><td>$\tau_1$</td></tr>
<tr><td>37</td><td>$\bar{\nu}_3\tau^3$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>τ^2</td><td>τ^1</td><td>τ^1</td></tr>
<tr><td>38</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\tau}^2$</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_2$</td></tr>
<tr><td>33</td><td>$(\bar{\nu}_1\tau_1)^1\bar{\nu}_3$</td><td>$(\bar{\nu}_1\tau_1)^1$</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_3$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\bar{\tau}_4$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_4$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$\tau_3\bar{\nu}_3$</td><td colspan="4">$\bar{\nu}_4$</td></tr>
</table>

Таблица 12

<table>
<tr><td></td><td colspan="7">$7'$</td></tr>
<tr><td>N</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>$1'$</td><td>$2'$</td><td>$3'$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td colspan="5">ν_4</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td colspan="4">ν_3</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>τ_3^1</td><td>τ_3</td><td colspan="3">$\bar{\nu}_2$</td><td>ν_2</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$(\bar{\tau}_2\bar{\nu}_2)^1$</td><td>$\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2$</td><td colspan="2">$\nu_1$</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td></tr>
<tr><td>20</td><td>$(\tau_2\bar{\nu}_2)^2$</td><td>$(\tau_2\bar{\nu}_2)^1$</td><td>$\tau_2\bar{\nu}_2$</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_1$</td><td>ν_1</td><td>$\bar{\nu}_2$</td></tr>
<tr><td>21</td><td>$\bar{\nu}_4\bar{\tau}_2^2$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\tau}_2^1$</td><td colspan="2">$\nu_1$</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>$\bar{\tau}_2$</td></tr>
<tr><td>26</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>τ_2^2</td><td>τ_2^1</td><td colspan="2">$\bar{\nu}_1$</td><td>ν_1</td><td>τ_2</td></tr>
<tr><td>30</td><td>$\bar{\nu}_4(\tau_1\bar{\nu}_1)^2$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$(\tau_1\bar{\nu}_1)^1$</td><td>$\bar{\nu}$</td><td>$\nu$</td><td>$\bar{\nu}_1$</td><td>$\tau_1\bar{\nu}_1$</td></tr>
<tr><td>31</td><td>$\bar{\nu}_5$</td><td>$\bar{\nu}_3\tau_1^2$</td><td>$\bar{\nu}_3$</td><td>$\bar{\nu}$</td><td>ν</td><td>τ_1</td><td>τ_1^1</td></tr>
<tr><td>38</td><td>$\bar{\nu}_4(\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2)^1$</td><td>$\bar{\nu}_4$</td><td>$\bar{\tau}^2\bar{\nu}_2$</td><td>$\bar{\tau}$</td><td>$\bar{\tau}$</td><td>$\bar{\tau}^1$</td><td>$\bar{\nu}_2$</td></tr>
</table>

Далее, определим, каков же результат конъюнкций фрагментов операторов столбца $7'$ *таблицы* **10**, используя, как и выше, декатенацию. Аналогично тому, как это делалось выше, выполним сегментацию по *принципу максимизации шапки* над соответствующей подтаблицей, заполнив в *варианте* 3 **III** служебную строку и служебный столбец. Декатенации операторов шапочного сегмента для этого случая представлены в *таблице* **12**, из которой видно, что столбец $5'$ (результат объединения столбцов $4, 1, 1', 2$ и $3'$ имеет фрагмент $\langle\langle\nu_4\rangle\rangle$ (см. *строку* 5). Столбцы 5 и 6 *таблицы* **12** нуждаются в дальнейшем изучении.

Для изучения столбца 5 *таблицы* **12** заполним в варианте **4** служебные строку и столбец *таблицы* **9**, выполнив сегментацию, а для изучения столбца 6 *таблицы* **12** заполним в *варианте* **5** служебные строку и столбец с соответствующей сегментацией, используя в обоих случаях принцип *максимизации шапочного сегмента.*

Эта работа привела к *таблицам* **13** и **14** (в них представлена декатенация шапочных сегментов), которые показывают, что в конечном итоге для столбца $7'$ *таблицы* **10** имеем фрагмент $\langle\langle\nu_6\rangle\rangle$.

Далее, чтобы исследовать столбец 8 *таблицы* **10**, из *таблицы* **9** следовало бы выделить подтаблицу, соответствующую этому столбцу, и если исследования приведут к фрагменту $\langle\langle\nu_7\rangle\rangle$, перейти к исследованию столбца 9, при этом наши рассуждения и действия были бы аналогичны тем, которые мы уже выполняли, однако заметим следующее.

Таблица 13

	$7'$				
	5				
N	4	1	$1'$	$2'$	$3'$
12	τ_3	$\bar{\nu}_2$			ν_2
19	$\bar{\tau}_2\bar{\nu}_2$	ν_1		$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$
20	$\tau_2\bar{\nu}_2$	$\bar{\nu}_1$		ν_1	$\bar{\nu}_2$
26	τ_2^1	$\bar{\nu}_1$		ν_1	τ_2
31	$\bar{\nu}_3$	$\bar{\nu}$	ν	τ_1	τ_1^1

Таблица 14

	$7'$					
	6					
N	5	4	3	1	$1'$	$2'$
3	ν_4	$\bar{\nu}_4$				
18	τ_2^2	τ_2^1	τ_2	$\bar{\nu}_1$		ν_1
21	$\bar{\nu}_4$	$\bar{\tau}_2^1$	$\bar{\tau}_2$	ν_1		$\bar{\nu}_1$
23	$\bar{\nu}_4$	$\bar{\nu}_2\tau_2$	$\bar{\nu}_2$	$\bar{\nu}_1$		ν_1
24	$\bar{\nu}_4$	$\bar{\nu}_2\bar{\tau}_2$	$\bar{\nu}_2$	ν_1		$\bar{\nu}_1$
30	$\bar{\nu}_4$	$(\tau_1\bar{\nu}_1)^1$	$\tau_1\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}$	ν	$\bar{\nu}_1$
35	$\bar{\nu}_3\bar{\nu}_2\tau_1^1$	$\bar{\nu}_3$	$\bar{\nu}_2$	$\bar{\nu}$	ν	τ_1
37	$\bar{\nu}_3\tau^3$	$\bar{\nu}_3$	τ^2	τ	τ	τ^1

Замечание 8. Всё предыдущее изложение имеет достаточно большой объём, который очень детально показывает: как и что получается и в результате каких рассуждений и выкладок. Однако, когда технология становится понятной, то бо́льшая часть выкладок может быть опущена без утраты верности выводов, но с бо́льшим выигрышем в реализации.

Здесь прерываем это изложение, но даём обещание вернуться к его продолжению ниже (в *п.* **8.6**), где будут устранены замеченные недостатки, в частности, указанное в *замечании* **7**. Это значит, что сегментация с выделением шапок по *принципу максимизации* или *минимизации* не может дать достаточно хорошего желаемого результата, поскольку не все операторы шапки эффективно используются. Следовательно, нужен способ выделения используемых операторов в динамике. Такой способ основан на так называемом методе *стандартизации* таблицы и выполнением многократного анализа.

Под стандартизацией понимается требование о выполнении следующих *двух* условий.

1. В таблице FS–операторы должны следовать сверху вниз в последовательности неубывания их длины. В такой последовательности FS–операторы, имеющие одинаковую длину, составляют блоки таблицы.

2. В каждом блоке таблицы FS–операторы с мысленно усечёнными началами (то есть без τ или $\bar{\tau}$) должны следовать сверху вниз в последовательности неубывания мысленно усечённой длины.

Пример стандартизованной таблицы и многократный её анализ будут приведены в **п. 8.6**.

8.5 Соглашения для конъюнкций σ–операторов

Напомним, что пример **задачи ВЫП**, представленной в *таблице* **1**, из m операторов (в *таблице* **1** параметр $m = 24$) в результате $(m-1)$–ой конъюнкций над её операторами, свёрнута в один оператор (для *таблицы* **1** — это оператор (1)). Такой пример должен заставить задуматься каждого, кто знает проблему соотношения между классами задач **P** и **NP**. Более того, было показано, что иногда (когда имеется выполняющий набор) нет необходимости даже выполнять все конъюнкции. Значит, для того, чтобы показанные там приёмы могли быть использованы более регулярным образом, следует более детально остановиться на конъюнкциях.

Чтобы выполнять конъюнкции над σ–операторами, удобно придерживаться некоторых обозначений и правил, позволяющих упростить весь процесс выкладок.

Прежде всего, полагаем, что всегда выполняется конъюнкция над *двумя* σ–операторами одного и того же порядка и, разумеется, результат сохраняет порядок. Далее, принимаем, что $\langle\langle A\rangle\rangle$ — некоторый σ–оператор порядка r.

А так как для $0 \le k < m$ имеем:

$$\langle\langle\, A^k\, A^k\, A^{k+1}\, A^{k+2} \ldots A^{m-2}\, A^{m-1}\, A^m \,\rangle\rangle \,=\, \langle\langle\, A^{m+1} \,\rangle\rangle, \tag{8.7}$$

где обе части в *равенстве* **(8.7)** имеют порядок $r+m+1$, то, принимая обозначение

$$\langle\langle\, A^{k,m} \,\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\, A^k\, A^{k+1} \ldots A^{m-2}\, A^{m-1}\, A^m \,\rangle\rangle, \tag{8.8}$$

порядок каждой из частей равенства **(8.9)** имеет значение $r+m+1$ с дефицитом $r+k$.

Равенство **(8.7)** может быть записано и в форме

$$\langle\langle\, A^m\, A^{m-1}\, A^{m-2} \ldots A^{k+1}\, A^k\, A^k \,\rangle\rangle \,=\, \langle\langle\, A^{m+1} \,\rangle\rangle \tag{8.9}$$

и тогда

$$\langle\langle\, A^{m,k}\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\, A^m\, A^{m-1}\, A^{m-2} \ldots A^{k+1}\, A^k \,\rangle\rangle. \tag{8.10}$$

Замечание 9. *Правые* части **(8.8)** и **(8.10)** указывают, в какую сторону изменяется верхний индекс в *левых* частях, в которых содержится требование $k < m$. Это требование может быть снято, если принять

$$\langle\langle\, A^{k,k} \,\rangle\rangle \,=\, \langle\langle\, A^k \,\rangle\rangle. \tag{8.11}$$

Из **(8.7)** и **(8.8)**, **(8.9)** и **(8.10)** следуют равенства

$$\langle\langle\, A^{m+1} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, A^{k}\, A^{k,m} \,\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, A^{m+1} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, A^{m,k}\, A^{k} \,\rangle\rangle. \tag{8.12}$$

Обратим внимание, что используя **(8.9)** и **(8.10)**, мы можем записать

$$\langle\langle\, \nu_k\, \nu_{k+1}\, \ldots\, \nu_{m-1}\, \nu_m \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \nu_{k,m} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \nu_{m,k} \,\rangle\rangle \tag{8.13}$$

$$\langle\langle\, \bar{\nu}_k\, \bar{\nu}_{k+1}\, \ldots\, \bar{\nu}_{m-1}\, \bar{\nu}_m \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \bar{\nu}_{k,m} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \bar{\nu}_{m,k} \rangle\rangle, \tag{8.14}$$

где каждая часть равенств **(8.13)** и **(8.14)** имеет порядок $2+m$ с дефицитом $1+k$.

Для $i \geq 1$ имеем:

$$\langle\langle\, \tau_i \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \tau^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \tau^{i-1}\, \nu_{i-1} \,\rangle\rangle, \tag{8.15}$$

$$\langle\langle\, \tau_i \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\tau}^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \bar{\tau}^{i-1}\, \nu_{i-1} \,\rangle\rangle, \tag{8.16}$$

$$\langle\langle\, \bar{\tau}_i \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \tau^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \nu_{i-1}\, \tau^{i-1} \,\rangle\rangle, \tag{8.17}$$

$$\langle\langle\, \bar{\tau}_i \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\tau}^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \nu_{i-1}\, \bar{\tau}^{i-1} \,\rangle\rangle. \tag{8.18}$$

Для $q+s \,=\, j+i$ и $q \,>\, j \,\leq\, 1$ имеем:

$$\langle\langle\, \tau_q^{s} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \tau_j^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\tau_j^{i-s-1}\, \nu_{q-1}\,)^{s} \,\rangle\rangle, \tag{8.19}$$

$$\langle\langle\, \tau_q^{s} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\tau}_j^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\bar{\tau}_j^{i-s-1}\, \nu_{q-1}\,)^{s} \,\rangle\rangle, \tag{8.20}$$

$$\langle\langle\, \bar{\tau}_q^{s} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \tau_j^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\nu_{q-1}\, \tau_j^{i-s-1}\,)^{s} \,\rangle\rangle, \tag{8.21}$$

$$\langle\langle\, \bar{\tau}_q^{s} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\tau}_j^{i} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, (\nu_{q-1}\, \bar{\tau}_j^{i-s-1}\,)^{s} \,\rangle\rangle. \tag{8.22}$$

Теперь отметим верность ещё следующих равенств:

$$\langle\langle\, \bar{\nu}_{r+m-1} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, A^{m} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, A^{m} \,\rangle\rangle, \tag{8.23}$$

$$\langle\langle\, \nu_{r+m-1} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, A^{m} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, \nu_{r+m-1} \,\rangle\rangle. \tag{8.24}$$

Замечание 10. Последние два равенства, **(8.23)** и **(8.24)**, наводят на мысль, что удобнее, чтобы порядок σ–оператора $\langle\langle\, A \,\rangle\rangle$ совпадал с порядком $\langle\langle\, \nu \,\rangle\rangle$, а значит, и с порядками $\langle\langle\, \bar{\nu} \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, \tau \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, \bar{\tau} \,\rangle\rangle$, которые равны **1**. Кроме того, было бы хорошо, чтобы индексы указывали на порядок оператора. Поэтому здесь вводим понятие о *нормированном порядке* (сокращённо: *нп*), который на **1** меньше истинного порядка, то есть σ–операторы $\langle\langle\, \nu_i \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, \bar{\nu}_i \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, \tau_i \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, \bar{\tau}_i \,\rangle\rangle$ имеют равный i *нп*. Кроме того, принимаем, что по умолчанию любая малая литера латинского алфавита, используемая в записи σ–оператора, имеет `нулевой` *нп*, так что верхний или нижний её индекс будет указывать на *нп*, то есть операторы

$$\langle\langle\, a_j \,\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, a^i \,\rangle\rangle, \quad \langle\langle\, a_j^i \,\rangle\rangle$$

суть j–го, i–го и $(j+i)$–го *нп* соответственно.

Принятые дополнительные обозначения **(8.8)**, **(8.10)** и **(8.12)** для σ–операторов позволяют в `таблице` **ВЫП** записывать некоторые её операторы в ещё более краткой форме. Например (номер, предшествующий каждому σ–оператору, — это его номер в *таблице* **4**):

1) $\langle\langle\, \tau_7\, \bar{\nu}_7\, \bar{\nu}_8 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \tau_7\, \bar{\nu}_{7,8} \,\rangle\rangle$, 5) $\langle\langle\, (\bar{\nu}_7\, \bar{\nu}_6\, \bar{\nu}_5\, \tau_4\,)^1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\bar{\nu}_{7,4}\, \nu_4\,)^1 \,\rangle\rangle$,

6) $\langle\langle\, (\bar{\tau}_4\, \bar{\nu}_4\, \bar{\nu}_5\, \bar{\nu}_6\,)^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\nu_3\, \bar{\nu}_{3,6}\,)^2 \,\rangle\rangle$, 9) $\langle\langle\, (\bar{\nu}_7\, (\bar{\nu}_5\, \bar{\nu}_4\, \tau_4\,)^1\,)^1 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\bar{\nu}_7\, (\bar{\nu}_{5,3}\, \nu_3\,)^1\,)^1 \,\rangle\rangle$,

11) $\langle\langle\, (\tau_3\, \bar{\nu}_3\, \bar{\nu}_4\,)^3\, \bar{\nu}_8 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, (\tau_3\, \bar{\nu}_{3,4}\,)^3\, \bar{\nu}_8 \,\rangle\rangle$, 13) $\langle\langle\, ((\bar{\nu}_3\, \tau_3\,)^1\, \bar{\nu}_5\, \bar{\nu}_6\,)^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, ((\bar{\nu}_{3,2}\, \nu_2\,)^1\, \bar{\nu}_{5,6}\,)^2 \,\rangle\rangle, \;\ldots\;.$

Замечание 11. В дополнение к *замечанию* **10** обращаем внимание, что дефицит указывается тоже в *нп*, если порядок оператора *нормирован* (при этом может прямо не упоминаться, но должен подразумеваться по умолчанию), то есть оператор $\langle\langle\, a^{m,k} \,\rangle\rangle$ имеет *нп*, равный $m+1$ с дефицитом k.

Использование абстрактных σ–операторов $\langle\langle\, a \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, b \,\rangle\rangle$, $\langle\langle\, c \,\rangle\rangle, \ldots$ (с различными индексами) базируется на их определении и при этом, скажем, операторы $\langle\langle\, a_i \,\rangle\rangle$ и $\langle\langle\, a_j \,\rangle\rangle$ не зависят друг от друга и до их определения можно утверждать лишь то, что это некие σ–операторы с *нп* i и j соответственно.

К принятым соглашениям об абстрактных операторах, примем ещё такое: будем считать, что $\langle\langle\, \lambda_j^k \,\rangle\rangle$ — это особый абстрактный оператор с *нп*, равным j, который становится осмысленным лишь после своего определения. И если нам необходимо записать $\langle\langle\, (\lambda_j^k\,)^i \,\rangle\rangle$, то будем это записывать так: $\langle\langle\, \lambda_j^{k,i} \,\rangle\rangle$, то есть в этом случае речь идёт о k–ом особом абстрактном операторе с *нп*, равным $j+i$.

Использование абстрактных операторов и дополнительные обозначения позволяют сформулировать следующую лемму.

Лемма 1. Равенства

$$\langle\langle\, a_{k+r}^{0,j} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, b_k^{r,j+r} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, c_{k+r}^{0,j} \,\rangle\rangle, \tag{8.25}$$

$$\langle\langle\, a_{k+r}^{j,0} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, b_k^{j+r,r} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, c_{k+r}^{j,0} \,\rangle\rangle, \tag{8.26}$$

являются следствием равенства:

$$\langle\langle\, a_{k+r} \,\rangle\rangle \;\bar{/}\; \langle\langle\, b_k^r \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, c_{k+r} \,\rangle\rangle. \tag{8.27}$$

Доказательство. В самом деле, по **(8.8)** имеем:

$$\begin{aligned} \langle\langle\, a_{k+r}^{0,j} \,\rangle\rangle \;&=\; \langle\langle\, a_{k+r}\, a_{k+r}^{1}\, a_{k+r}^{2}\, \ldots\, a_{k+r}^{j} \,\rangle\rangle, \\ \langle\langle\, b_k^{r,j+r} \,\rangle\rangle \;&=\; \langle\langle\, b_k^{r}\, b_k^{r+1}\, b_k^{r+2}\, \ldots\, b_k^{r+j} \,\rangle\rangle \end{aligned}$$

и, если воспользоваться **(8.27)**, выполнив пофрагментно над *правыми* частями конъюнкцию, то получим

$$\langle\langle\, c_{k+r}\, c_{k+r}^{1}\, c_{k+r}^{2}\, \ldots\, c_{k+r}^{j} \,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\, c_{k+r}^{0,j} \,\rangle\rangle.$$

Аналогичные выкладки с использованием **(8.10)** показывают, что **(8.26)** следует из **(8.27)**.

В принятых соглашениях покажем в *таблице* **15**, как записывать некоторые операторы *таблицы* **4** с использованием σ–операторов (список и последовательность выбранных операторов из *таблицы* **4** и включённых в *таблицу* **15** станет понятным ниже).

Определения абстрактных σ–операторов введено так, чтобы последующий фрагмент оператора выражался через пару предыдущих фрагментов. А затем в столбце *“Итоговый”* представлен общий вид абстрактного σ–оператора. Такой способ не единственный, но здесь придерживаемся этого способа с единственной целью: придать определениям более регулярный вид, позволяющий достаточно однообразно выполнять конъюнкции или декатенации σ–операторов.

Таблица 15

N	σ–оператор	Определение абстрактных σ–операторов	Итоговый
12	$\langle\langle(\bar\nu_5\tau_3^2)^2\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle a_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5\tau_3^2\rangle\rangle$	$\langle\langle a_6^2\bar\nu_8\rangle\rangle$
14	$\langle\langle((\bar\nu_4\bar\nu_3\bar\tau_3)^1\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle a_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_3\bar\tau_3\rangle\rangle,\ \langle\langle a_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_4 a_4\rangle\rangle,\ \langle\langle a_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle a_5^1\bar\nu_6\rangle\rangle$	$\langle\langle a_7^2\rangle\rangle$
7	$\langle\langle(\bar\nu_5\tau_4^1\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle b_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5\bar\tau_4^1\rangle\rangle,\ \langle\langle b_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle b_6\bar\nu_6\rangle\rangle$	$\langle\langle b_7^2\rangle\rangle$
2	$\langle\langle(\bar\nu_5\bar\tau_5\bar\nu_6)^1\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle c_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5\bar\tau_5\rangle\rangle,\ \langle\langle c_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle c_6\bar\nu_6\rangle\rangle$	$\langle\langle c_7^1\bar\nu_8\rangle\rangle$
37	$\langle\langle((\bar\nu_3\tau^3)^1\bar\nu_5)^2\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle d_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_3\tau^3\rangle\rangle,\ \langle\langle d_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle d_4^1\bar\nu_5\rangle\rangle$	$\langle\langle d_6^2\bar\nu_8\rangle\rangle$
40	$\langle\langle((\bar\tau\bar\nu\bar\nu_1)^5\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle d_1\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau\bar\nu\rangle\rangle,\ \langle\langle d_2\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle d_1\bar\nu_1\rangle\rangle,\ \langle\langle d_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle d_2^5\bar\nu_7\rangle\rangle$	$\langle\langle d_8^1\rangle\rangle$
32	$\langle\langle(((\tau_1^1\bar\nu_2)^1\bar\nu_4)^2\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle c_3\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\tau_1^1\bar\nu_2\rangle\rangle,\ \langle\langle c_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle c_3^1\bar\nu_4\rangle\rangle,\ \langle\langle c_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle c_5^2\bar\nu_7\rangle\rangle$	$\langle\langle c_8^1\rangle\rangle$
18	$\langle\langle(\tau_2^3\bar\nu_5)^2\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle e_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\tau_2^3\bar\nu_5\rangle\rangle$	$\langle\langle e_6^2\bar\nu_8\rangle\rangle$
13	$\langle\langle((\bar\nu_3\tau_3)^1\bar\nu_5\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle f_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_3\tau_3\rangle\rangle,\ \langle\langle f_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle f_4^1\bar\nu_5\rangle\rangle,\ \langle\langle f_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle f_6\bar\nu_6\rangle\rangle$	$\langle\langle f_7^2\rangle\rangle$
6	$\langle\langle(\bar\tau_4\bar\nu_4\bar\nu_5\bar\nu_6)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle g_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_4\bar\nu_4\rangle\rangle,\ \langle\langle g_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle g_5\bar\nu_5\rangle\rangle,\ \langle\langle g_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle g_6\bar\nu_6\rangle\rangle$	$\langle\langle g_7^2\rangle\rangle$
38	$\langle\langle(\bar\nu_4(\bar\tau^2\bar\nu_2)^1)^3\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle e_3\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau^2\bar\nu_2\rangle\rangle,\ \langle\langle e_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_4 e_3^1\rangle\rangle$	$\langle\langle e_5^3\bar\nu_8\rangle\rangle$
39	$\langle\langle(((\tau\bar\nu)^2\bar\nu_3)^3\bar\nu_7)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle g_1\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\tau\bar\nu\rangle\rangle,\ \langle\langle g_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle g_1^2\bar\nu_3\rangle\rangle,\ \langle\langle g_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle g_4^3\bar\nu_7\rangle\rangle$	$\langle\langle d_8^1\rangle\rangle$
30	$\langle\langle(\bar\nu_4(\tau_1\bar\nu_1)^2)^3\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle f_2\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\tau_1\bar\nu_1\rangle\rangle,\ \langle\langle f_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_4 f_2^2\rangle\rangle$	$\langle\langle f_5^3\bar\nu_8\rangle\rangle$
1	$\langle\langle\tau_7\bar\nu_7\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle f_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\tau_7\bar\nu_7\rangle\rangle$	$\langle\langle f_8\bar\nu_8\rangle\rangle$
8	$\langle\langle(\bar\nu_7\bar\tau_4^1\bar\nu_5\bar\nu_6)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle h_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_4^1\bar\nu_5\rangle\rangle,\ \langle\langle h_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle h_6\bar\nu_6\rangle\rangle,\ \langle\langle h_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_7 h_7\rangle\rangle$	$\langle\langle h_8^1\rangle\rangle$
4	$\langle\langle(\bar\nu_7\bar\tau_5^1\bar\nu_6)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle i_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_5^1\bar\nu_6\rangle\rangle,\ \langle\langle i_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_7 i_7\rangle\rangle$	$\langle\langle i_8^1\rangle\rangle$
21	$\langle\langle(\bar\nu_6(\bar\nu_4\bar\tau_2^2)^1)^1\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle j_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_4\bar\tau_2^2\rangle\rangle,\ \langle\langle j_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_6 j_5^1\rangle\rangle$	$\langle\langle j_7^1\bar\nu_8\rangle\rangle$
3	$\langle\langle(\bar\nu_6\bar\tau_5\bar\nu_5)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle k_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_5\bar\nu_5\rangle\rangle,\ \langle\langle k_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_6 k_6\rangle\rangle$	$\langle\langle k_7^2\rangle\rangle$
19	$\langle\langle(\bar\nu_5(\bar\tau_2\bar\nu_2)^2)^2\bar\nu_8\rangle\rangle$	$\langle\langle i_3\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_2\bar\nu_2\rangle\rangle,\ \langle\langle i_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5 i_3^2\rangle\rangle$	$\langle\langle i_6^2\bar\nu_8\rangle\rangle$
26	$\langle\langle(\bar\nu_7(\bar\nu_5\tau_2^3)^1)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle j_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5\tau_2^3\rangle\rangle,\ \langle\langle j_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_7 j_6^1\rangle\rangle$	$\langle\langle j_8^1\rangle\rangle$
9	$\langle\langle(\bar\nu_7(\bar\nu_5\bar\nu_4\tau_4)^1)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle l_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_4\tau_4\rangle\rangle,\ \langle\langle l_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5 l_5\rangle\rangle,\ \langle\langle l_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_7 l_6^1\rangle\rangle$	$\langle\langle l_8^1\rangle\rangle$
27	$\langle\langle\bar\nu_8(\bar\nu_2\tau_2)^5\rangle\rangle$	$\langle\langle j_3\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_2\tau_2\rangle\rangle$	$\langle\langle\bar\nu_8 j_3^5\rangle\rangle$
29	$\langle\langle\bar\nu_8\bar\nu_7(\bar\nu_3\bar\tau_2^1)^3\rangle\rangle$	$\langle\langle k_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_3\bar\tau_2^1\rangle\rangle,\ \langle\langle k_8\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_7 k_4^3\rangle\rangle$	$\langle\langle\bar\nu_8 k_8\rangle\rangle$
17	$\langle\langle\bar\nu_8(\bar\nu_6\bar\tau_3^2\bar\nu_5)^1\rangle\rangle$	$\langle\langle m_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_3^2\bar\nu_5\rangle\rangle,\ \langle\langle m_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_6 m_6\rangle\rangle$	$\langle\langle\bar\nu_8 m_7^1\rangle\rangle$
24	$\langle\langle\bar\nu_6(\bar\nu_4(\bar\nu_2\bar\tau_2)^1)^1)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle n_3\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_2\bar\tau_2\rangle\rangle,\ \langle\langle n_5\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_4 n_3^1\rangle\rangle,\ \langle\langle n_7\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_6 n_5^1\rangle\rangle$	$\langle\langle n_7^2\rangle\rangle$
34	$\langle\langle(\bar\nu_5(\bar\nu_2\tau_1^1\bar\nu_3)^1)^3\rangle\rangle$	$\langle\langle b_3\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_2\tau_1^1\rangle\rangle,\ \langle\langle b_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle b_3\bar\nu_3\rangle\rangle,\ \langle\langle n_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5 b_4^1\rangle\rangle$	$\langle\langle n_6^3\rangle\rangle$
16	$\langle\langle\bar\nu_8(\bar\nu_5(\bar\tau_3\bar\nu_3)^1)^2\rangle\rangle$	$\langle\langle i_4\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\tau_3\bar\nu_3\rangle\rangle,\ \langle\langle\sigma_6\rangle\rangle \rightleftharpoons \langle\langle\bar\nu_5 i_4^1\rangle\rangle$	$\langle\langle\bar\nu_8\sigma_6^2\rangle\rangle$

8.6 Исчисление конъюнкций σ–операторов в задаче ВЫП

В *п.* **8.4** мы прервали изложение на определении *стандартизации* **таблицы задачи ВЫП**. В *таблице* **16** представлена **задача ВЫП**, записанная FS–операторами в *таблице* **4**. Однако *таблица* **16** отличается от *таблицы* **4** ещё и тем, что она стандартизована. В *первом* (слева) столбце записаны номера операторов, которые они получили (в порядке их следования в *таблице* **4**), когда было выполнено *первое* условие стандартизации. Затем они были переставлены (вместе со своими номерами) так, чтобы было выполнено *второе* условие. Обращаем внимание на то, что здесь мы имеем ввиду лишь исходную таблицу и не ведём рассуждения об операторах со *штрихованными* номерами, о которых речь пойдёт ниже.

Теперь рассмотрим сегментацию стандартизованной таблицы с использованием указателей. Такая сегментация выполняется выделением подтаблиц в результате заполнения **III** служебной строки и служебного столбца. *Третья* служебная строка (в соответствии с **7.2**) заполняется указателями, совпадающими с номерами исходов от **1** до **5**, а в случае *исхода* **6** — выбором между T, T^* и, быть может, M. Указателями, совпадающими с номером (из **I** служебной строки) анализируемого столбца, заполняются строки служебного столбца. Некоторые из указателей могут быть помечены $*$ (что будет уточнено ниже). Внесение указателей в служебные строку и столбец условно исключает столбец и строки, выделяя для дальнейшего анализа лишь те строки и столбцы, против которых нет указателей. Следует иметь ввиду, что после того, как указатель внесён в столбец **III** служебной строки, должны быть внесены указатели и в свободные клетки служебного столбца (в какие ? — будет сказано ниже) и лишь после этого может быть осуществлён переход к анализу следующего столбца (напомним, что анализ ведётся справа налево, начиная со столбца с самым большим номером).

Теперь некоторые пояснения и уточнения к сказанному выше.

Стандартизация определена и объяснена выше. Здесь укажем лишь на то, что стандартизация позволяет быстрее находить номера исходов, так как не требует чтения всего столбца, а достаточно прочитать лишь его часть, что будет видно, когда будет дано объяснение выбора указателя в анализе r–го столбца, а иногда и сокращать число вариантов анализа, обеспечиваемое *вторым* пунктом стандартизации.

i–ый вариант анализа состоит из:

а) выбора указателя в r–ом столбце **III** служебной строки;

б) занесение указателей в некоторых строках служебного столбца;

в) перехода на анализ столбца с номером $(r-1)$, если только номер исхода в r–ом столбце больше **3**.

Пункт **в)** пояснений не требует, поэтому поясним лишь пункты **а)** и **б)**.

а) Выбор указателя в r–ом столбце **III** служебной строки выполняется так: если *первая* (сверху вниз) продукция r–го столбца неисключённой строки есть одна из продукций: T или T^*, то указатель должен быть сопряжён к этой продукции, то есть быть T^* или T соответственно, а иначе указатель должен совпадать с номером исхода.

Замечание 12. Если все неисключённые продукции столбца суть M, то и указатель будет M, что не потребует никаких исключений строк.

б) Если указатель в r–ом столбце выбран, то условно исключаются неисключённые строки с помощью указателя r, заносимого в служебный столбец против строки, имеющей в анализируемом столбце продукцию, совпадающую с указателем **III** служебной строки (при этом указатели **4** (или **2**) и **5** (или **3**) и продукции $\bar{\tau}$ и τ воспринимаются как T и T^* соответственно).

Замечание 13. Каждому из указателей **4** и **5** **III** служебной строки отвечает в служебном столбце `один` и `только один` (*первый* сверху вниз) указатель r^*. Выход же на *указатель* **1** (*исход* **1**) в служебной строке требует отметить указателем r^* *первую* (сверху вниз) пару строк, обеспечивающих *исход* **1**, но только *одну* пару.

Анализ *таблицы* **16** (варианты 1 — 8) и продолжение его — *таблица* **17** (варианты 9 — 13) позволяет выделить FS–операторы, получившие в результате этого анализа $*$ (эти операторы и были собраны в *таблицу* **15**, где и получили абстрактные определения). Используя **III** служебную строку соответствующего варианта, σ–операторы, получившие $*$ в каждом из вариантов и их абстрактные представления из *таблицы* **15**, сформируем их декатенационные таблицы. *Вариант* **1** приводит к *таблице* **18**, которая показывает, что в столбце $4'$ имеем фрагмент ν_3 (это результат конъюнкций фрагментов операторов **12** и **14** в столбце $4'$), в

Таблица 16

			1	5	T^*	5	4	**4**	**4**	$\mathbf{T}^*$								8		
			1	T	T	4	T^*	4	**4**	$\mathbf{T}^*$							7			
					1	4	5	T^*	4	$\mathbf{T}^*$						6				
	1	5	5	4	**5**	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$					5					
	1	5	5	T^*	5	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$				4						
				1	T	4	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$			3							
	1	5	5	5	4	T^*	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	$\mathbf{T}^*$		2								
				1	4	4	T	5	T^*	T^*	1									
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&									
1								τ	T	T	7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$	–	–	–	–
4						$\bar\tau$		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	5^*	7	**7**	
3						$\bar\tau$	T	T^*			7	**7**	**7**	**7**	**7**	7	5^*	6	
2						$\bar\tau$	T^*	T		T	5^*	–	–	–	–	–	–	–	–
5						τ	T^*	T^*	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	7	6	5^*	
10					τ				T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
7					$\bar\tau$		T^*	T			4^*	6	**6**	**6**	**6**	6	7	**7**	
8					$\bar\tau$		T	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	4^*	7	**7**	
9					τ	T^*	T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	6	6	5	
6					$\bar\tau$	T	T	T			6	4^*	5	**5**	**5**	5	7	**7**	
17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
12				τ			T^*			T	3^*	6	**6**	**6**	**6**	6	6	3^*	–
15				$\bar\tau$			T		T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			3^*	5	3^*	4	**4**		7	**7**	
13				τ	T^*		T	T			6	3^*	3^*	4	**4**		7	**7**	
16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
11				τ	T	T				T	5	4	5	**5**	**5**	5	5	3	
18			τ				T			T	6	2^*		2^*	2^*		2^*	6	
26			τ				T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	6	6	2^*	
28			τ			T^*	T^*			T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	**7**	7	2^*	5	
25			τ			T^*		T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**		7	**7**	
29			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			7	**7**	**7**	**7**	**7**	7		5	
22			τ	T				T	T			2		2	3	8	**8**	**8**	
19			$\bar\tau$	T			T^*			T		6		**6**	**6**	6	6	2^*	–
27			τ	T^*						T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
20			τ	T				T^*		T	7	**7**	**7**	**7**	**7**	7	3		
23			τ	T^*		T^*	T				6	5		3	2			6	
31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T		6	**6**	**6**	**6**	6	6	4	
36		$\bar\tau$		T				T		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
32		τ		T		T			T		5	1^*	5	**5**	**5**	8	**8**	**8**	
35		τ		T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**			4	
34		τ		T^*	T		T^*				4	6	**6**	**6**	**6**	6	6	3	
33		τ	T^*		T			T			4	4	4	2	2		7	**7**	
30		τ	T			T^*				T		5		1^*	1^*			5	
37	τ				T^*		T			T	6	0^*		4	**4**			6	
38	$\bar\tau$			T		T^*				T		5		0^*	3		3	5	
39	τ	T			T				T		4	4	4	0^*	0^*	8	**8**	**8**	
40	$\bar\tau$	T	T						T			0^*			0^*	8	**8**	**8**	
$1'$							τ	T		T		6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	6^*	7	**7**	–
$2'$						$\bar\tau$	T	T	T	T			5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	–	–	–	–
$3'$					τ	T^*	T	T						4^*	$\mathbf{4}^*$	4^*	7	**7**	
$4'$				$\bar\tau$	T	T^*	T		T	T					3^*	–	–	–	–
$5'$									$\bar\tau$	T						8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	–
$6'$								$\bar\tau$	T^*	T							7^*	$\mathbf{7}^*$	–
$7'$							$\bar\tau$	T^*		T								6^*	–
$8'$										$\bar\tau$									

Таблица 17

		3	5	4	T^*	5	4	**4**	**T**	**4**					13
			1	4	5	**4**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**T**	**4**				12	
			1	4	T	4	T^*	4	**T**	**4**			11		
					1	4	5	$\mathbf{T}^*$	**T**	**4**		10			
					1	4	T	T^*	T	4	9				
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&				
4						$\bar{\tau}$		T	T^*		5^*	5^*	—	—	—
3						$\bar{\tau}$	T	T^*			7	**7**	5^*	$\mathbf{5}^*$	6
5						τ	T^*	T^*	T^*		7	**7**	6	**6**	5^*
10					τ				T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**
7					$\bar{\tau}$		T^*	T			4^*	6	7	**7**	**7**
8					$\bar{\tau}$		T	T	T^*		6	4^*	—	—	—
9					τ	T^*	T^*		T^*		4^*	6	6	**6**	5
6					$\bar{\tau}$	T	T	T			6	5	7	**7**	**7**
17				$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	7	**7**	3^*	3^*	—
15				$\bar{\tau}$			T		T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**
14				$\bar{\tau}$	T^*	T^*		T					7	**7**	**7**
13				τ	T^*		T	T			6		7	**7**	**7**
16				$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*		6	6	**6**	3^*
11				τ	T	T				T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
18			τ				T			T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
26			τ				T^*		T^*			6	6	**6**	2^*
28			τ			T^*	T^*			T^*		6	6	**6**	5
21			$\bar{\tau}$			T^*		T^*		T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
25			τ			T^*		T	T^*				7	**7**	**7**
29			$\bar{\tau}$		T^*				T^*	T^*			2^*	4	4
24			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			7	**7**		2^*	5
22			τ	T				T	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**
27			τ	T^*						T^*			2^*	2^*	2
20			τ	T				T^*		T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
23			τ	T^*		T^*	T				6				6
31		$\bar{\tau}$			T^*		T^*			T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
36		$\bar{\tau}$		T				T		T^*			7	**7**	**7**
32		τ		T		T			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**
35		τ		T^*	T^*				T^*					4	4
34		τ		T^*	T		T^*					6	6	**6**	1^*
33		τ	T^*		T			T					7	**7**	**7**
30		τ	T			T^*				T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
37	τ				T^*		T			T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
38	$\bar{\tau}$			T		T^*				T	9	**9**	**9**	**9**	**9**
39	τ	T			T				T		8	**8**	**8**	**8**	**8**
40	$\bar{\tau}$	T	T						T		8	**8**	**8**	**8**	**8**
$3'$					τ	T^*	T	T			6	4^*	7	**7**	**7**
$8'$										$\bar{\tau}$	9^*	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$
$9'$							τ	T	T^*			6^*	—	—	—
$10'$								$\bar{\tau}$	T^*				7^*	$\mathbf{7}^*$	$\mathbf{7}^*$
$11'$					τ		T	T^*	T^*	T^*				4^*	—
$12'$							$\bar{\tau}$	T^*		T^*					6^*

Выкладки *(начало)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
1	12				τ			T^*			T	
	14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			
						τ	T^*	T^*	T		T	
	7					$\bar\tau$		T^*	T			
							τ	T^*	T		T	
	2						$\bar\tau$	T^*	T		T	—
	1′							τ	T		T	
2	37	τ				T^*		T			T	
	40	$\bar\tau$	T	T						T		
			$\bar\tau$	T		T^*		T		T	T	
	32		τ		T		T			T		
				$\bar\tau$	T	T^*	T	T		T	T	
	18			τ				T			T	
					$\bar\tau$	T^*	T	T		T	T	
	13				τ	T^*		T	T			
						τ	T	T	T	T	T	
	6					$\bar\tau$	T	T	T			
	2′						$\bar\tau$	T	T	T	T	
3	13				τ	T^*		T	T			
	14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			
	3′					τ	T^*	T	T			
4	38	$\bar\tau$			T		T^*				T	
	39	τ	T			T				T		
			$\bar\tau$		T	T	T^*			T	T	
	30		τ	T			T^*				T	
				$\bar\tau$	T	T	T^*			T	T	
	18			τ				T			T	
	4′				$\bar\tau$	T	T^*	T		T	T	
5	39	τ	T			T				T		
	40	$\bar\tau$	T	T						T		
			$\bar\tau$	T		T				T		
	30		τ	T			T^*				T	
				$\bar\tau$		T	T^*			T	T	
	18			$\bar\tau$				T			T	
						$\bar\tau$	T^*	T		T	T	
	3′					τ	T^*	T	T			
							τ	T	T	T	T	
	2′						$\bar\tau$	T	T	T	T	—
								$\bar\tau$	T	T	T	
	1′							τ	T		T	
									$\bar\tau$	T	T	
	1								τ	T	T	—
	5′									$\bar\tau$	T	

Выкладки *(продолжение)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
6	8					$\bar\tau$		T	T	T^*		
	3′					τ	T^*	T	T			
							τ	T	T	T^*		
	4						$\bar\tau$		T	T^*		
								$\bar\tau$	T	T^*		
	1′							τ	T		T	
	6′								$\bar\tau$	T^*	T	
7	18			τ				T			T	
	21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	
							τ	T	T^*		T	
	3						$\bar\tau$	T	T^*			
	7′							$\bar\tau$	T^*		T	
8	19			$\bar\tau$	T			T^*			T	—
	26			τ				T^*		T^*		
					$\bar\tau$			T^*		T^*	T	
	12				τ			T^*			T	—
								τ		T^*	T	
	7′							$\bar\tau$	T^*		T	—
									τ	T^*	T	
	6′								$\bar\tau$	T^*	T	—
										τ	T	
	5′									$\bar\tau$	T	—
	8′										$\bar\tau$	
9	7					$\bar\tau$		T^*	T			
	9					τ	T^*	T^*		T^*		
							τ	T^*	T	T^*		
	4						$\bar\tau$		T	T^*		
	9′							τ	T	T^*		
10	8					$\bar\tau$		T	T	T^*		—
	3′					τ	T^*	T	T			
							τ	T	T	T^*		
	4						$\bar\tau$		T	T^*		—
								$\bar\tau$	T	T^*		
	9′							τ	T	T^*		—
	10′								$\bar\tau$	T^*		
11	27			τ	T^*						T^*	
	29			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	
					τ	T^*				T^*	T^*	
	17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*	
	11′					τ		T	T^*	T^*	T^*	

Выкладки *(продолжение)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
12	24			$\bar{\tau}$	T^*		T^*		T^*			
	27			τ	T^*						T^*	
					τ		T^*		T^*		T^*	
	17				$\bar{\tau}$			T	T^*		T^*	–
							τ	T	T^*		T^*	
	3						$\bar{\tau}$	T	T^*			
	12′							$\bar{\tau}$	T^*		T^*	

Таблица 18

N	6	5	4	4′	7′	8′	9′
12	$\bar{\nu}_5$	τ_3^1	τ_3	$\underline{\tau_3}$	a_6	a_6^1	$\bar{\nu}_8$
14	a_5	$\bar{\nu}_4$	$\bar{\nu}_3$	$\underline{\bar{\tau}_3}$	$\bar{\nu}_6$	a_7	a_7^1
7	$\bar{\nu}_5$	$\bar{\tau}_4$	$\underline{\nu_3}$	$\bar{\nu}_3$	$\bar{\nu}_6$	b_7	b_7^1
2	$\bar{\nu}_5$	$\underline{\nu_4}$	$\bar{\nu}_4$		$\bar{\nu}_6$	c_7	$\bar{\nu}_8$
$\bar{/}$	a_5	$\underline{\nu_5}$			a_6	λ_7^1	λ_8^1

столбце 4 — фрагмент ν_3 (по оператору **7**), в столбце 5 — фрагмент ν_4 (по оператору **2**) и, таким образом, получаем, что объединение столбцов 4 и 4′ даёт столбец 5, который в объединении со столбцом 5′ образует столбец 6′. Значит, в конечном итоге имеем в столбце 6′ фрагмент ν_5, представленный в итоговой конъюнкционной (помеченной *символом* $\bar{/}$) строке *таблицы* **18**, где

$$\langle\langle\, \lambda_7^1 \,\rangle\rangle \;\rightleftharpoons\; \langle\langle\, a_6^1 \,\rangle\rangle \;\bar{/}\; \langle\langle\, a_7 \,\rangle\rangle \;\bar{/}\; \langle\langle\, b_7 \,\rangle\rangle \;\bar{/}\; \langle\langle\, c_7 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, \lambda_8^1 \,\rangle\rangle \;\rightleftharpoons\; \langle\langle\, a_7^1 \,\rangle\rangle \;\bar{/}\; \langle\langle\, b_7^1 \,\rangle\rangle.$$

Выход на *исход* **1** в r–ом столбце **III** служебной строки означает, что мы имеем *пару* операторов (см. *замечание* **13**), помеченных указателем r^*. Эта *пара* операторов в резолюции (см **(7.27)**) порождает новый оператор $\langle\, A_1 \,\rangle$ с началом в столбце r_1, где $r_1 > r$. Если в служебном столбце имеется оператор, помеченный указателем r_1^*, то такой оператор в резолюции с оператором $\langle\, A_1 \,\rangle$ породит следующий новый оператор $\langle\, A_2 \,\rangle$ с началом в столбце r_2, где $r_2 > r_1$, и *так далее* до тех пор, пока не получим новый оператор $\langle\, A_s \,\rangle$ с началом в столбце r_s, $r_s > r_{s-1}$, но уже в служебном столбце нет указателя с r_s^*. Это значит, что построенный нами оператор является искомым дополнительным оператором. Он получает *штрихованный* номер и записывается под чертой исходной таблицы, входя в состав её дополнения. Этот дополнительный оператор определяет начало анализа в $(i+1)$–ом варианте. А именно, все указатели в **III** служебной строке, левее r_s–го столбца стираются; стираются и все указатели в служебном столбце с номерами $\leq r_s$. В r_s–ый столбец строки заносится указатель, диктуемый началом оператора $\langle A_s \rangle$ (сам оператор $\langle A_s \rangle$ в служебном столбце получает указатель r_s^*) и в служебный столбец заносятся указатели, диктуемые указателем столбца r_s, после чего анализ (i + 1)–го варианта продолжается так, как это было описано выше, в *варианте* i.

Замечание 14. Следует проверить: не пропалываются ли дополнительным оператором $\langle A_s \rangle$ дополнительные операторы, появившиеся до $\langle A_s \rangle$, и все операторы основной таблицы, использовавшиеся при построении оператора $\langle A_s \rangle$. Те операторы, которые пропалываются, должны быть прополоты, то есть безусловно исключены из таблицы и её дополнения.

Замечание 15. Если построение дополнительных операторов завершается построением вырожденного оператора $\langle \theta \rangle$, то процесс анализа и поиска закончен с выводом: `таблица задачи` **ВЫП** — `противоречива`.

Рассмотрим иллюстрации к приведённым выше объяснениям на *таблицах* **15** и **16** и расположенными рядом с ними (с *правой* стороны) выкладкам. Если обозначения в таблицах должны быть понятны, то для выкладок следует сделать общие пояснения.

В столбце *“в”* указан номер варианта, в столбце *“N”* приводятся номера операторов (по нумерации в таблицах) и в столбце *“p”* — результат прополки (если указана “–” (черта), то оператор, против которого она указана, `прополот`) последним дополнительным оператором (который снабжается номером со штрихом).

Ещё раз подчеркнём, что на прополку проверяются лишь последним оператором варианта и только те операторы, которые имеют в столбце *“N”* номера; операторы промежуточные (без номеров в столбце *“N”*) не проверяются. Операторы, получившие в столбце *“p”* черту, из таблицы безусловно исключаются, то есть считается, что в таблице их больше нет при последующих анализах. Как только дополнительный оператор записывается в таблицу под чертой, он должен быть использован как пропалывающий для всех операторов под чертой, которые к этому моменту имеются. Те операторы, которые им пропалываются, получают в служебном столбце черту, то есть безусловно исключаются.

После этих пояснений продолжим. *Второй* вариант анализа приводит к декатенационной *таблице* **19**.

Таблица 19

N	4	1	$1'$	$2'$	$3'$	$5'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
37	$\bar\nu_3$	$\underline{\tau}$	τ	τ^1	τ^2	d_4	$\bar\nu_5$	d_6	d_6^1	$\bar\nu_8$
40	d_2^1	$\underline{\bar\tau}$	$\bar\nu$	$\bar\nu_1$	d_2	d_2^2	d_2^3	d_2^4	$\bar\nu_7$	d_8
32	c_3	$\bar\nu$	$\underline{\nu}$	τ_1	$\bar\nu_2$	$\bar\nu_4$	c_5	c_5^1	$\bar\nu_7$	c_8
18	τ_2	$\bar\nu_1$		$\underline{\nu_1}$	τ_2	τ_2^2	$\bar\nu_5$	e_6	e_6^1	$\bar\nu_8$
13	$\bar\nu_3$	$\bar\nu_2$			$\underline{\nu_2}$	f_4	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_6$	f_7	f_7^1
6	$\underline{\nu_3}$	$\bar\nu_3$				ν_4	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_6$	g_7	g_7^1
$\overline{/}$	$\underline{\nu_4}$					λ_4^1	λ_5^1	λ_6^1	λ_7^2	λ_8^2

Внимательный взгляд и сравнение декатенационных *таблиц* **18** и **19** должен привести нас к следующим замечаниям.

Замечание 16. Если нас интересуют фрагменты ν_r (без раскрытия фрагментов λ_m^t) в окончательной результирующей строке декатенационной таблицы, то незачем производить декатенацию каждого из операторов, имеющих в соответствующем варианте указатель со $*$. Достаточно понять, что:

исход 1 в столбце r **III** служебной строки означает наличие фрагмента ν_r в столбце $(r+1)'$ или $(r+1)$ в зависимости от того, будет ли следующий указатель (справа) в **III** служебной строке **4** или **5** соответственно (здесь указатель T отождествляется указателю 4, а T^* — указателю 5);

исход 4 или **5** в столбце r **III** служебной строки означает наличие фрагмента ν_{r-1} в столбце r или r' (соответственно) результирующей строки.

Замечание 17. *Замечание* **16** должно быть применено ко всем операторам со $*$ рассматриваемого варианта независимо от того, из основной таблицы или из её дополнения этот оператор. Кроме того, заполняя результирующую строку следующего варианта, надо учитывать уже полученный результат.

Представим ниже варианты анализа окончательными результирующими строками в *две* колонки: слева заполнение в развёрнутом виде, а затем окончательный вид (справа), начав с первого варианта. Когда левый вариант окончательный, правого нет.

в	6	5	4	$4'$	$7'$	$8'$	$9'$
1	λ_6^1	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^1	λ_8^1

,

в	6	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
1	λ_6^1	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^1	λ_8^1

.

в	4	1	$1'$	$2'$	$3'$	$5'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
2	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu}$	$\underline{\nu}$	$\underline{\nu_1}$	$\underline{\nu_2}$	λ_4^1	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^2	λ_8^2

,

в	5	$5'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
2	$\underline{\nu_4}$	λ_4^1	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^2	λ_8^2

.

в	5	4	$4'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
3	$\underline{\nu_4}$	λ_3^1	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^3	λ_8^3

,

в	5	1	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
4	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu}$	$\underline{\nu}$	$\underline{\nu_1}$	λ_2^1	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^4	λ_8^4

,

в	5	3	$3'$	$4'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
4	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_2}$	λ_2^1	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^4	λ_8^4

.

в	5	3	1	$1'$	$2'$	$4'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
5	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu}$	$\underline{\nu}$	$\underline{\nu_1}$	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_6}$	λ_7^5	λ_8^5

,

в	8	$8'$	$9'$
5	$\underline{\nu_7}$	λ_7^5	λ_8^5

.

в	8	5	$5'$	$6'$	$7'$	$9'$
6	$\underline{\nu_7}$	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_5}$	λ_6^1	λ_8^6

,

в	8	7	$7'$	$9'$
6	$\underline{\nu_7}$	$\underline{\nu_6}$	λ_6^1	λ_8^6

.

в	8	7	5	4	3	$3'$	$6'$	$9'$
7	$\underline{\nu_7}$	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu_2}$	λ_5^2	λ_8^7

,

в	8	7	6	$6'$	$9'$
7	$\underline{\nu_7}$	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_5}$	λ_5^2	λ_8^7

.

Замечание 18. Обращаем внимание на то, что если бы выполнили чисто формальное заполнение строки в *варианте* **7**, то в столбцах 4 и 3 должны были бы записать λ_3^2 и λ_2^2 вместо ν_3 и ν_2. Верные записи выполнены на основе такого положения: в операторах 18 и 21, обеспечивших *исход* **1** в столбце 2 *варианта* **7**, имеются начала τ_2^3 и $\bar{\tau}_2^2$, которые дают ν_2 в столбце $3'$, ν_2 в столбце 3 и ν_3 в столбце 4. В самом деле, операторы 18 и 21 в декатенационной развёртке дают:

N	8	7	5	4	3	$3'$	$6'$	$9'$
18	e_6^1	e_6	τ_2^2	$\underline{\tau_2^1}$	$\underline{\tau_2}$	$\underline{\tau_2}$	$\bar{\nu}_5$	$\bar{\nu}_8$
21	j_7	$\bar{\nu}_6$	ν_4	$\underline{\bar{\tau}_2^1}$	$\underline{\bar{\tau}_2}$	$\underline{\bar{\tau}_2}$	j_5	$\bar{\nu}_8$

Отмеченное в *замечании* **18** положение имеет такую общую формулировку.

Если *два* оператора, обеспечивающих *исход* **1** в столбце r некоторого варианта, имеют начала τ_r^q и $\bar{\tau}_r^p$, то в столбцах $(r+1)$ и $(r+1)'$ и следующих $s-1$ столбцов (со *штрихами* или без них) имеются фрагменты ν_r, ν_r, ν_{r+1}, ν_{r+2}, $\ldots$, ν_{r+s-1}, где $s = min(q,p)$.

Учитывая сказанное, продолжим представлять варианты анализа окончательными результирующими строками в *вариантах* **8** – **12**.

в	8	7	6	3	$3'$	$4'$	$5'$	$9'$
8	$\underline{\nu_7}$	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu_3}$	$\underline{\nu_4}$	λ_8^8

,

в	9	$9'$
8	$\underline{\nu_8}$	λ_8^8

.

в	9	8	6	5	$5'$	$7'$
9	$\underline{\nu_8}$	λ_7^6	λ_5^3	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_4}$	λ_6^2

,

в	9	8	6	$6'$	$7'$
9	$\underline{\nu_8}$	λ_4^6	λ_5^3	$\underline{\nu_5}$	λ_6^2

.

в	9	8	5	$5'$	$6'$	$7'$
10	$\underline{\nu_8}$	λ_7^7	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_5}$	λ_6^3

,

в	9	8	7	$7'$
10	$\underline{\nu_8}$	λ_7^7	$\underline{\nu_6}$	λ_6^3

.

в	9	8	7	5	4	3	$3'$	$6'$
11	$\underline{\nu_8}$	λ_7^8	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_4}$	λ_3^2	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu_2}$	λ_5^4

,

в	9	8	7	5	4	$4'$	$6'$
11	$\underline{\nu_8}$	λ_7^8	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_4}$	λ_3^2	$\underline{\nu_3}$	λ_5^4

.

в	9	8	7	5	3	$3'$	$4'$	$6'$
12	$\underline{\nu_8}$	λ_7^9	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_4}$	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu_2}$	$\underline{\nu_3}$	λ_5^5

,

в	9	8	7	6	$6'$
12	$\underline{\nu_8}$	λ_7^9	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_5}$	λ_5^5

.

И, наконец, остановимся на *варианте* **13**. В нём мы имеем следующую результирующую строку:

в	9	8	7	6	3	2	$2'$	$4'$	$5'$
13	$\underline{\nu_8}$	λ_7^{10}	$\underline{\nu_6}$	$\underline{\nu_5}$	$\underline{\nu_2}$	τ_1	$\underline{\nu_1}$	λ_3^3	$\underline{\nu_4}$

Эта строка в столбце 2 имеет фрагмент $\langle\langle\,\tau_1\,\rangle\rangle = \langle\langle\,\bar{\nu}\,\nu\,\rangle\rangle$, который не может быть изменён остальными строками таблицы: в *таблице* **17**, в служебном столбце 13–го варианта нет строк без указателей и строк с указателями **0** и **1**. Имеется лишь *одна* строка (это *строка* **27**) с указателем 2, но строка 27 в декатенации, в столбце 2, имеет фрагмент $\bar{\nu}_1$, который в конъюнкции не изменит фрагмент $\langle\langle\,\tau_1\,\rangle\rangle$ (во *втором* столбце). Значит, наборы с номерами $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 = 968$ и 969 являются выполняющими для исследуемой таблицы. Поиск остальных выполняющих наборов (если в этом имеется надобность) состоит в раскрытии структуры столбцов 8 и $4'$, то есть фрагментов $\langle\langle\,\lambda_7^{10}\,\rangle\rangle$ и $\langle\langle\,\lambda_3^3\,\rangle\rangle$.

Развёрнутое выше исчисление конъюнкций в применении к решению `задач` **ВЫП** основано на декатенации σ–операторов. Его недостатками являются: необходимость в неоднократной декатенации некоторых σ–операторов и пополнение таблицы `задачи` **ВЫП** операторами, полученными от резолюции над парами операторов, дающих *исход* **1** при анализе таблицы.

Оба эти недостатка преодолеваются в результате конъюнкции над σ–операторами, причём последовательность выполнения этих конъюнкций диктуется операторами, получившими $*$ в анализе.

Иллюстрациями к сказанному могут служить конъюнкции над абстрактными σ–операторами *таблицы* **15** в порядке их следования.

$$
\begin{aligned}
\langle\langle\,p_9\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,a_6^2\,\bar{\nu}_8\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_7^2\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,a_6^2\,\bar{\nu}_8\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_7^1\,a_7^1\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,p_7^1\,a_7^1\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,p_7\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,a_6^1\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_7\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,a_6\,a_6\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_5^1\,\bar{\nu}_6\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,p_6\,a_6\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,p_6\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,a_6\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_5^1\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\bar{\nu}_5\,\tau_3^2\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_5\,a_5\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,a_5\,p_5\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,p_5\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,\tau_3^2\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_5\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\tau_3^1\,\tau_3^1\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\bar{\nu}_4\,a_4\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\tau_3^1\,p_4\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,p_4\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,\tau_3^1\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,a_4\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\tau_3\,\tau_3\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\bar{\nu}_3\,\bar{\tau}_3\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\tau_3\,\nu_3\,\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\langle\,q_9\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,p_9\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_7^2\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,p_7^1\,a_7^1\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_7^1\,b_7^1\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,q_7^1\,r_7^1\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,q_7\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,p_7\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_7\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,p_6\,a_6\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_6\,\bar{\nu}_6\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,q_6\,a_6\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,q_6\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,p_6\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_6\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,a_5\,p_5\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\bar{\nu}_5\,\bar{\tau}_4^1\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,a_5\,q_5\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,q_5\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,p_5\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\bar{\tau}_4^1\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\tau_3^1\,p_4\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\bar{\tau}_4\,\bar{\tau}_4\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,q_4\,\nu_4\,\rangle\rangle,\\
\langle\langle\,q_4\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,\tau_3^1\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\bar{\tau}_4\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,\nu_3\,\tau_3\,\rangle\rangle;\\
\langle\langle\,r_7\,\rangle\rangle \;&\rightleftharpoons\; \langle\langle\,a_7\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_7\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,a_5^1\,\bar{\nu}_6\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,b_6\,\bar{\nu}_6\,\rangle\rangle \;=\; \langle\langle\,r_6\,\bar{\nu}_6\,\rangle\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle\, r_6 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, a_5^1 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, b_6 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, a_5\, a_5 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \bar\nu_5\, \bar\tau_4^1 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, a_5\, r_5 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, r_5 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, a_5 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \bar\tau_4^1 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\nu_4\, a_4 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \bar\tau_4\, \bar\tau_4 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\tau_4\, r_4 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, r_4 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, a_4 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \bar\tau_4 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\nu_3\, \bar\tau_3 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \nu_3\, \bar\nu_3 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \nu_3\, \bar\tau_3 \,\rangle\!\rangle.
\end{aligned}
$$

Замечание 19. Обозначения через p с индексами для абстрактных σ–операторов использовались в определениях q и r с индексами и, таким образом, поскольку они оказались свободными, вновь могут быть использованы в дальнейших определениях. Аналогичные приёмы могут быть применены и к другим свободным переменным без особого напоминания.

Итак, продолжим с учётом *замечания* **19**.

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle\, p_9 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, q_9 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, c_7^1\, \bar\nu_8 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, q_7^1\, r_7^1 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, c_7^1\, \bar\nu_8 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, p_7^1\, r_7^1 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, p_7 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, q_7 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, c_7 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, q_6\, a_6 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, c_6\, \bar\nu_6 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, p_6\, a_6 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, p_6 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, q_6 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, c_6 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, a_5\, q_5 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \bar\nu_5\, \bar\tau_5 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, a_5\, \nu_5 \,\rangle\!\rangle.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle\, q_9 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, p_9 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_6^2\, \bar\nu_8 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, p_7^1\, r_7^1 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_6^2\, \bar\nu_8 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, q_7^1\, r_7^1 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, q_7 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, p_7 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_6^1 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, p_6\, a_6 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_6\, d_6 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, q_6\, s_6 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, q_6 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, p_6 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_6 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, a_5\, \nu_5 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_4^1\, \bar\nu_5 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, q_5\, \nu_5 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, q_5 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, a_5 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_4^1 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\nu_4\, a_4 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_4\, d_4 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, d_4\, q_4 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, q_4 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, a_4 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_4 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\nu_3\, \bar\tau_3 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \bar\nu_3\, \tau^3 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\nu_3\, q_3 \,\rangle\!\rangle,\\
\langle\!\langle\, q_3 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, \bar\tau_3 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, \tau^3 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \nu_2\, \tau^2 \,\rangle\!\rangle;\\
\langle\!\langle\, s_6 \,\rangle\!\rangle &\rightleftharpoons \langle\!\langle\, a_6 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_6 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, \bar\nu_5\, \tau_3^2 \,\rangle\!\rangle \,\bar{/}\, \langle\!\langle\, d_4^1\, \bar\nu_5 \,\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\, d_4^1\, \tau_3^2 \,\rangle\!\rangle.
\end{aligned}
$$

Разумеется, что аналогичные выкладки могут быть продолжены. Однако вряд ли следует это делать здесь и сейчас. Достаточно понять, что этот процесс символьных выкладок в нотации σ–операторов может быть запрограммирован для исполнения на компьютере. Важно то, что выполнить здесь следует не более, чем серию из $m-1$ блоков конъюнкций над σ–операторами, где m — число операторов в таблице задачи **ВЫП**. Нет необходимости и развёртывать до конца каждый блок. Достаточно развёртывать ту его половину, которая определяется **III** служебной строкой, что даст возможность в процессе развёртки просто записывать развёрнутые части через $\langle\langle \nu_k \rangle\rangle$, либо обнаружить выполнимость до окончания полной развёртки.

Таким образом, становится совершенно очевидным, что распознавание выполнимости имеет не более, чем полиномиальную сложность, но об этом подробнее ниже.

8.7 Алгоритм $FS - \sigma$ решения задачи ВЫП

Указанный в заголовке алгоритм в принципе мог быть сформулирован ещё в *главе* **7**, но это делается здесь с дополнительной целью: показать возможности σ–операторов в обосновании некоторых положений, излагаемый FS–операторами.

Собственно говоря, можно убедиться, что в *п.* **8.6** фактически изложен этот алгоритм и проиллюстрирован на *таблицах* **16** и **17**, рядом с которыми выполнены необходимые выкладки над FS–операторами. Единственное, что теперь следует сделать — это опустить все те выкладки, которые выполнены с помощью абстрактных σ–операторов и которые представлены с одной стороны, как иллюстрации, а с другой, как обосновывающие эти выкладки.

А сейчас сформулируем основные пункты описания алгоритма $FS - \sigma$ и проследим за тем, как они реализованы в иллюстрационных *таблицах* **16** и **17**. Эти пункты таковы.

I. Таблица **задачи ВЫП** должна быть стандартизована.

II. Выполняется i–ый вариант анализа (начиная с $i = 1$), в результате которого условно исключаются (записью указателей) столбцы (справа налево) и неисключённые строки, отвечающие выбранным указателям столбца.

III. Если i–ый вариант анализа привёл к *исходу* **1**, то строим дополнительный оператор (оператор получает номер со штрихом и записывается под чертой у основной таблицы, составляя её дополнение) и переходим к $(i + 1)$–ому варианту, если только это возможно, иначе анализ и поиск выполняющих наборов закончен.

IV. Если i–ый вариант анализа привёл к *исходу* **2** или **3**, то таблица выполнима и выполняющий конъюнкт (или набор) строится по **III** служебной строке i–го варианта (в соответствии с описанием **7.1.2**).

Обращаем внимание, что определение стандартизации дано в *п.* **8.4**, а соответствующие пояснения к стандартизации даны в *п.* **8.6**, где приведены и пояснения к пунктам **II** и **III** алгоритма. В этом алгоритме пункт **IV** не требует пояснений, так как этот алгоритм отвечает лишь на вопрос о выполнимости, но чуть ниже будет рассмотрен другой алгоритм, позволяющий сказать гораздо больше, чем ответить на вопрос о выполнимости, но уже требующий пояснения к пункту **IV**.

В *таблице* **16** представлены **8** вариантов анализа и те операторы, которые сохранились (а из основной таблицы были безусловно исключены *четыре* и из дополнительной — *шесть*), перенесены в *таблицу* **17** (которая по сути является продолжением *таблицы* **16**), над которой выполнены *варианты* с **9**–го по **13**–ый.

Последний вариант привёл к *исходу* **3**, означающий наличие выполняющего конъюнкта, строящегося по **III** служебной строке этого варианта:

$$\langle\, \tau_1\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \bar{T}^*\, \rangle. \tag{8.28}$$

Задача решена.

8.8 Алгоритмы $FS-\sigma-S$ и $FS-\sigma-D$

Установленный в *п.* **8.7** алгоритм $FS-\sigma$ позволяет для заданной **КНФ** (представленной таблицей из FS–операторов) выяснить: является ли она противоречивой или выполнимой. В случае выполнимости построить FS–оператор выполняющего конъюнкта.

Однако мы видим, что в результате поиска ответа на поставленный вопрос о распознавании приходится выполнять над таблицей **зада*чи* ВЫП** различные преобразования: находить резолюцию над парами операторов, приводящих в результате анализа к *исходу* **1**, пополнять таблицу **задачи ВЫП** новыми дополнительными резолюционными операторами, безусловно исключать некоторые операторы в результате того, что они пропалываются. При всех этих преобразованиях таблица **зада*чи* ВЫП** не изменяет свою таблицу *истинности*, то есть новая преобразованная таблица остаётся **эквивалентной** исходной таблице.

Разумеется, что желательно, чтобы в результате преобразований получить такую таблицу, которая эквивалентна исходной и была бы *суперприведённой* (см. **7.3.2**), то есть такой, что в результате её анализа не находится ни *одной* пары операторов, которая бы давала *исход* **1**.

Замечание 20. Если таблица *противоречива*, то суперприведение даст вырожденную таблицу, то есть таблица сведётся к *одному* оператору $\langle \theta \rangle$. Поиск же выполняющего конъюнкта (или выполняющего набора) в суперприведённой таблице линейно зависит (по времени) от размера таблицы.

Алгоритм суперприведения таблицы задачи **ВЫП** назван $FS - \sigma - S$ и совпадает с алгоритмом $FS - \sigma$ во всех своих пунктах за исключением *пункта* **IV**, который требует пояснений, о чём было сказано выше.

Замечание 21. В алгоритме $FS - \sigma - S$ предполагается, что в таблице зада*чи* **ВЫП**, кроме служебного столбца, имеется ещё *один* дополнительный столбец, предназначенный для внесения пометок: $*$ (*звёздочками*).

IV. В случае выхода в i–ом варианте на *исход* **2** или **3** следует в дополнительном столбце отметить $*$ все те операторы, которые имели в i–ом варианте указатели со *звёздочкой*, если только они уже не отмечены $*$ (если уже отмечены $*$, то она сохраняется).

Затем слева направо в **III** служебной строке находим *первый* указатель T или T^* (если такого нет, то процесс анализа закончен). Пусть такой указатель найден в столбце t. Заполняем в столбце t **III** служебной строки указатель T или T^* на указатель 5 или 4 соответственно. Стираем в **III** служебной строке все указатели левее столбца t. Стираем в служебном столбце все указатели, которые $\leq t$. Затем, в служебный столбец заносим указатели, условно исключающие те строки, которые подлежат исключению в соответствии с заменой T на 5 (или T^* на 4). Анализ и расстановка указателей со столбца, левее столбца t, составляет $(i+1)$–ый вариант. Учитывая то, что в i–ом варианте имеется *исход* **2** или **3**, мы должны в продолжении $(i+1)$–го варианта при выборе указателя T или T^* отдавать приоритет на условное исключение тех строк (сверху вниз), которые уже получили в дополнительном столбце $*$, но условно ещё не исключены. Если строки со $*$ в дополнительном столбце не дают возможность определить исход, он должен быть определён так, как это делается в случае выхода в i–ом варианте на *исход* **1**.

Дальнейший анализ и расстановка указателей в **III** служебную строку и служебный столбец выполняется по уже описанной схеме. Он может заканчиваться либо одним из *исходов* **2** или **3** (означающим: новый повтор сказанного с *пункта* **IV** этого параграфа), либо *исходом* **1**.

В случае *исхода* **1** следует исполнить *пункт* **III**, однако здесь (в его исполнении) имеются особенности, которые требуют повышенное внимание, состоящее в следующем.

В *пункте* **III** объясняется, как построить искомый дополнительный оператор, называемый там $\langle A_s \rangle$ с началом в столбце r_s, и указано, как с ним работать. Всё сказанное там сохраняет свою силу в полной мере, когда в **III** служебной строке этого варианта в r_s–ом столбце имеется буквенный указатель, но если в **III** служебной строке этого варианта в r_s–ом столбце имеется цифровой указатель, искомый дополнительный оператор называется *особым* (мы его помечаем *звёздочкой* в дополнительном столбце), заносим его в дополнение таблицы и всё сказанное о дополнительном операторе верно и для него с той лишь разницей, что своим началом он не определяет дальнейшую работу по следующему варианту: она начинается с *первого* слева направо столбца (после r_s–го), пусть это будет r_m, в котором имеется *один* из указателей T или T^* (если таковых нет, то это конец анализа). Этот буквенный указатель в r_m–ом столбце заменяется (как и выше: T на 5, а T^* на 4). Дальнейшая работа со столбца r_m уже известна, так как она уже описана выше.

Следует сделать одно очень важное отступление, касающееся особого оператора. Поскольку особый оператор требует некоторое отклонение от общего случая, а значит, и определённую осторожность в его программной реализации, то можно на самом деле и не выделять особый оператор, а всегда работать с дополнительным оператором по общему правилу, а именно: всегда дополнительный оператор своим началом в столбце r_s и определяет начало анализа в следующем варианте независимо от того, какой в r_s–ом столбце имеется буквенный или цифровой исход.

По окончанию анализа операторы со *звёздочкой* должны остаться в таблице, а остальные — из таблицы удалены (сказанное относится как к исходной таблице, так и к её дополнению).

Так получается *суперприведённая* таблица.

Теперь иллюстрации.

Сказанное к описанию алгоритма $FS-\sigma-S$ можно увидеть на *таблицах* **20** и **21**. *Таблица* **20** является продолжением *таблицы* **17** с вариантами анализа от **14** до **19** (для которых после таблицы расположены выкладки).

Таблица 20

		2	5	4	5	4	**5**	**5**	**5**	**4**						19	
					1	T^*	5	**5**	**5**	**4**					18		
					1	T	T	5	**5**	**4**				17			
	1	5	5	4	5	5	**4**	**T**	**5**	**4**			16				
			1	4	5	T	4	T	5	**4**		15					
			1	T	4	**5**	**4**	**4**	**T**	**4**	14						
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{l}$						S
3						$\bar\tau$	T	T^*			**6**	6	**6**	7	**7**	**7**	
5						τ	T^*	T^*	T^*		**5***	8	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
10					τ				T	T^*	**8**	4^*	4^*	4^*	4^*	4^*	$*$
7					$\bar\tau$		T^*	T			**7**	7	**7**	4^*	6	**6**	
9					τ	T^*	T^*		T^*		**5**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	
6					$\bar\tau$	T	T	T			**6**	7	**7**	6	4^*	5	
15				$\bar\tau$			T		T	T^*	**8**	6	**6**	6		3^*	$*$
14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T			**7**	7	**7**		5	4	
13				τ	T^*		T	T			**7**	7	**7**	6		4	
16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	**4**	3^*	3^*		6	**6**	$*$
11				τ	T	T				T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
18			τ				T			T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
26			τ				T^*		T^*		2^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
28			τ			T^*	T^*			T^*	**5**	2^*	5		6	**6**	
21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
25			τ			T^*		T	T^*		**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	
29			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	2^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	
24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			**5**	2^*	5	7	**7**	**7**	
22			τ	T				T	T		**8**	7	**7**			3	
27			τ	T^*						T^*			2^*			2^*	$*$
20			τ	T				T^*		T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
23			τ	T^*		T^*	T				**6**	6	**6**	6	5	2	
31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
36		$\bar\tau$		T				T		T^*	**7**	7	**7**			3	
32		τ		T		T			T		**8**	5	3	5		5	
35		τ		T^*	T^*				T^*			8	**8**	**8**	**8**	**8**	
34		τ		T^*	T		T^*				**4**		1^*		6	**6**	$*$
33		τ	T^*		T			T			**7**	7	**7**			2	
30		τ	T			T^*				T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
37	τ				T^*		T			T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
38	$\bar\tau$			T		T^*				T	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
39	τ	T			T				T		**8**		0^*			1^*	$*$
40	$\bar\tau$	T	T						T		**8**		0^*			1	
$3'$					τ	T^*	T	T			**7**	7	**7**	6	5	4	
$8'$										$\bar\tau$	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	**9***	$*$
$10'$								$\bar\tau$	T^*		**7***	8	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
$12'$							$\bar\tau$	T^*		T^*	**6***	6^*	**6***	7	**7**	**7**	$*$
$13'$					τ		T^*		T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
$14'$						τ	T^*	T^*	T	T^*			5^*	7	**7**	**7**	
$15'$								τ	T	T^*				7^*	**7***	**7***	$*$
$16'$							τ	T	T	T^*					6^*	**6***	$*$
$17'$						$\bar\tau$	T	T	T	T^*						5^*	$*$

Выкладки

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p
14	26			τ				T^*		T^*		
	29			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*	
	$13'$					τ		T^*		T^*	T^*	+
15	18			τ			T^*	T^*			T^*	
	24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*			
					τ		T^*	T^*	T^*		T^*	
	16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	
						$\bar\tau$	T^*	T^*	T^*		T^*	
	10					τ				T	T^*	
	$14'$						τ	T^*	T^*	T	T^*	+
16	39	τ	T			T				T		
	40	$\bar\tau$	T	T						T		
			$\bar\tau$	T		T				T		
	34		τ		T^*	T		T^*				
				$\bar\tau$	T^*	T		T^*		T		
	27			τ	T^*						T^*	
					τ	T		T^*		T	T^*	
	16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*	
						$\bar\tau$		T^*		T	T^*	
	10					τ				T	T^*	
								τ		T	T^*	
	$12'$							$\bar\tau$	T^*		T^*	
	$15'$								τ	T	T^*	+
17	10					τ				T	T^*	
	7					$\bar\tau$		T^*	T			
	$16'$							τ	T	T	T^*	
18	10					τ				T	T^*	
	6					$\bar\tau$	T	T	T			
	$17'$						$\bar\tau$	T	T	T	T^*	

Таблица 21

		2	5	4	5	4	5	5	5	**4**		2
		3	5	4	5	5	4	4	T	4	1	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$	
$8'$										$\bar{\tau}$	9^*	$\mathbf{9}^*$
$10'$								$\bar{\tau}$	T^*		7^*	8
$15'$								τ	T	T^*	8	7^*
$12'$							$\bar{\tau}$	T^*		T^*	6^*	7
$16'$							τ	T	T	T^*	8	6^*
$17'$						$\bar{\tau}$	T	T	T	T^*	8	5^*
5						τ	T^*	T^*	T^*		5^*	8
10					τ				T	T^*	8	4^*
$13'$					τ		T^*		T^*	T^*	4^*	8
15				$\bar{\tau}$			T		T	T^*	8	3^*
16				$\bar{\tau}$	T		T^*			T^*	3^*	6
26			τ				T^*		T^*		2^*	8
27			τ	T^*						T^*	2	2^*
34		τ		T^*	T		T^*				1^*	6
39	τ	T			T				T		8	1^*

Так как в варианте 13 (*таблицы* **17**) мы имели *исход* **3**, то операторы с номерами 5, 16, 26, 34, $8'$, $10'$ и $12'$, имевшие в варианте 13 указатели со *звёздочкой*, в дополнительном столбце *таблицы* **20** помечаются *звёздочкой*.

Обратим внимание, что в варианте 14 выход на *исход* **1** приводит к резолюционному оператору $13'$, который имеет начало в *четвёртом* столбце **III** служебной строки, что значит: оператор $13'$ является *особым*. Вот почему он в дополнительном столбце получает $*$. Остальные *звёздочки* в дополнительном столбце являются результатом выхода на *исход* **2** в 19–ом варианте.

В *таблице* **21** представлен конечный результат *суперприведения таблицы* **16** (*таблицы* **17** и **20** являются продолжениями преобразований, начатых над *таблицей* **16**). В *таблице* **21** остались лишь те операторы, которые получили в дополнительном столбце *звёздочки*, при этом операторы *таблицы* **21** записаны в стандартизованном порядке.

Замечание 22. Над *таблицей* **21** выполнено проверочное *суперприведение*, показывающее, что она действительно суперприведена.

В тех случаях, когда требуется построить FS–операторы для всех выполняющих конъюнктов заданной **КНФ**, то есть заданную **КНФ** представить в виде **ДНФ**, записанную FS–операторами, мы можем воспользоваться алгоритмом, названным нами $FS - \sigma - D$. Этот алгоритм применяется к уже суперприведённой таблице и совпадает с алгоритмом $FS - \sigma$ в пунктах **I** и **II**.

Пункты **III** и **IV** сливаются в *один* и он имеет такую формулировку: i–ый вариант анализа всегда приводит к *исходу* **2** или **3**; выполняющий конъюнкт строится по **III** служебной строке этого варианта. Затем, слева направо находим *первую* продукцию T или T^* (если такой нет, то процесс построения конъюнктов закончен). Пусть такая продукция найдена в r–ом столбце. Тогда все продукции **III** служебной строки, левее r–го столбца, стираем, а в r–ом столбце служебной строки заносим *указатель* 5 (если там был *указатель* T) или 4 (если там был *указатель* T^*). Стираем в служебном столбце все указатели $\leq r$. Затем в служебный столбец заносим указатель r против тех строк, которые отвечают занесённому указателю в **III** служебную строку.

Дальнейший анализ и расстановка указателей составляет $(i+1)$–ый вариант.

Над *таблицей* **21** выполнен алгоритм $FS - \sigma - D$. Он дал всего *два* варианта: по *первому* варианту уже был построен конъюнкт **(8.28)**, а *второй* — даёт конъюнкт

$$\langle\, \bar{\tau}_1\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}^*\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}\, \bar{T}^* \,\rangle. \tag{8.29}$$

Исходная **КНФ**, представленная *таблицей* **16**, свелась к **ДНФ**, состоящей из дизъюнкции над конъюнктами **(8.28)** и **(8.29)**.

Обращаем внимание на то, что выполняя анализ в *таблице* **21**, мы не выходим на *нулевой* столбец. Это значит: таблица, в которой оператор 39 заменён на укороченный оператор

$$\langle\, \bar{\tau}_1\, M\, M\, T\, M\, M\, M\;\; T\, M \,\rangle$$

при неизменности остальных, останется эквивалентной *таблице* **21**.

Замечание 23. Не следует думать, что *таблица* **21** или *таблица* **21** с *изменённым* оператором 39 не может быть преобразована с сохранением эквивалентности исходной. Такое преобразование проще всего выполнить, допустив, кроме продукций T или T^*, ещё и продукции $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$ или даже $\bar{M}$. А преобразовывать можно, выполнив некоторые конъюнкции над операторами, которые в указанных расширениях могут быть выполнены.

Например, можно последовательно выполнить конъюнкции над операторами: $15'$, $16'$, $17'$, 10, 15 и получить *один* оператор $\langle\,\bar{\tau}\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}\,T\,T^*\,\rangle$. В самом деле,

$$\frac{\begin{array}{cccc} & \langle\tau & T & T^*\rangle \\ \langle\tau & T & T & T^*\rangle \end{array}}{\begin{array}{cccc}\langle\tau & \bar{T} & T & T^*\rangle,\end{array}} \quad \frac{\begin{array}{ccccc} & \langle\tau & \bar{T} & T & T^*\rangle \\ \langle\tau & \bar{T} & \bar{T} & T & T^*\rangle \end{array}}{\begin{array}{ccccc}\langle\tau & \bar{T} & \bar{T} & T & T^*\rangle,\end{array}} \quad \frac{\begin{array}{cccccc} & \langle\tau & \bar{T} & \bar{T} & T & T^*\rangle \\ \langle\tau & M & M & M & T & T^*\rangle \end{array}}{\begin{array}{cccccc}\langle\tau & \bar{T} & \bar{T} & \bar{T} & T & T^*\rangle,\end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{ccccccc} & \langle\tau & \bar{T} & \bar{T} & \bar{T} & T & T^*\rangle \\ \langle\tau & M & M & T & M & T & T^*\rangle \end{array}}{\begin{array}{ccccccc}\langle\tau & \bar{T} & \bar{T} & \bar{T} & \bar{T} & T & T^*\rangle.\end{array}}$$

Это не единственное, что можно сделать, возможны и другие преобразования, на которых здесь останавливаться не будем.

8.9 Строгая стандартизация для задачи ВЫП

Совершенно понятно, что многие из дополнительных операторов могут не появиться, если пополнение таблицы вести как можно раньше короткими операторами. А такие короткие операторы, как правило, чаще будут появляться, если над таблицей **задачи ВЫП** выполнить *правое приведение*, быть может не так, как это описано в **7.2.4**, а в упрощённой форме.

Итак, рассмотрим такой упрощённый вариант правого приведения (используемый в определении *строгой сегментации*) с иллюстрацией его на *таблицах* **22** и **23**.

В *таблице* **22** записаны FS–операторы из таблицы 4, а слева и снизу представлены ранги строк и столбцов соответственно (что ещё будет пояснено), а в *таблице* **23** записаны FS–операторы, полученные из операторов *таблицы* **22** в результате перестановки столбцов, а как переставлены столбцы *таблицы* **22** видно по **II** служебной строке *таблицы* **23**.

Теперь подробнее о самом упрощённом *правом приведении*.

В строке R (сразу под таблицей с FS–операторами) записаны ранги столбцов, то есть суммарное число вхождений T и T^* в каждом столбце таблицы (напоминаем, что $\bar{\tau}$ и τ считаются как T и T^* соответственно). В столбце, слева от таблицы, подсчитываем ранги строк.

Среди рангов строк находим минимальный >0 ранг (для *таблицы* **22** — это **3**). Все строки таблицы с *рангом* **3** составляют её подтаблицу, ранги столбцов которой подсчитаны в дополнительной строке по строкой R. Среди рангов дополнительной строки находим столбец с максимальным рангом. Таких *два* (оба они имеют значение **5**), причём и в строке R значения их рангов одинаковы (они равны **20**). Следовательно самым правым столбцом может быть выбран любой из столбцов: **6** или **9**. Мы выбрали столбец **9**: его не надо переставлять.

Далее, корректируем ранги столбца, то есть уменьшаем на *единицу* те ранги строк столбца, которые имели в выбранном столбце вхождение T или T^*. В откорректированном столбце вновь находим минимальный >0 ранг. Теперь он равен *2*. В подтаблице из строк ранга *2* подсчитываем ранги столбцов и среди них вновь выбираем столбцы с максимальным рангом (в дополнительной строке). Их *четыре* (ранга *2*), но среди этих *четырёх* в строке R имеется максимальный (ранга *20*) в *6*–ом столбце. Он и выбран *вторым* и переставлен направо без изменения положения уже выбранного.

Этот процесс выбора и перестановки столбцов аналогичным образом доводится до конца, то есть пока все столбцы не займут свои места.

А сейчас напомним, что в определении стандартизации таблицы (см. п. 8.4) имеются два *условия* **1** и **2**.

Если этим *двум* требованиям будет предшествовать *условие* **0** со следующей формулировкой:

0. Над таблицей задачи **ВЫП** должен быть выполнен упрощённый вариант *правого приведения*,

то мы будем говорить о *строгой стандартизации* таблицы задачи **ВЫП**.

Поскольку *таблица* **23** является результатом применения *условия* **0** к *таблице* **22**, то, применив к ней стандартизацию, то есть *условия* **1** и **2**, мы получаем *таблицу* **24**, которая является *строго стандартизованной.*

Применение алгоритма $FS-\sigma-S$ над *строго стандартизованной таблицей* **24** (с продолжениями в *таблицах* **25** и **26**) приводит нас к суперприведённой *таблице* **27** (проверочные выкладки по её анализу показывают, что она действительно суперприведена).

Таблица 22

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	1	2	2	2	2	3	1								τ	T	T
0	0	0	0	1	2	2	2	3	4	2						$\bar\tau$	T^*	T		T
0	0	0	0	1	2	2	2	3	3	3						$\bar\tau$	T	T^*		
0	0	0	1	2	3	3	3	3	3	4						$\bar\tau$		T	T^*	
0	0	0	1	2	3	3	3	4	4	5						τ	T^*	T^*	T^*	
0	0	1	1	2	3	3	3	4	4	6					$\bar\tau$	T	T	T		
0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	7					$\bar\tau$		T^*	T		
0	0	1	2	2	3	3	3	4	4	8					$\bar\tau$		T	T	T^*	
0	0	1	2	3	3	3	3	4	4	9					τ	T^*	T^*		T^*	
0	0	1	2	2	2	2	2	2	3	10					τ				T	T^*
0	0	1	1	2	2	2	3	3	4	11				τ	T	T				T
0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	12				τ			T^*			T
0	0	1	1	1	2	2	3	4	4	13				τ	T^*		T	T		
0	0	1	1	2	3	3	4	4	4	14				$\bar\tau$	T^*	T^*		T		
0	0	0	1	1	1	1	2	3	4	15				$\bar\tau$			T		T	T^*
0	0	1	1	1	1	1	2	3	4	16				$\bar\tau$	T		T^*			T^*
0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	17				$\bar\tau$			T	T^*		T^*
0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	18			τ				T			T
0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	19			$\bar\tau$	T			T^*			T
0	0	0	0	0	1	2	3	3	4	20			τ	T				T^*		T
0	0	0	0	1	2	3	3	3	4	21			$\bar\tau$			T^*		T^*		T
0	0	0	1	1	2	3	4	4	4	22			τ	T				T	T	
0	0	0	0	1	1	2	3	4	4	23			τ	T^*		T^*	T			
0	0	0	0	1	2	3	4	4	4	24			$\bar\tau$	T^*		T^*		T^*		
0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	25			τ			T^*		T	T^*	
0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	26			τ				T^*		T^*	
0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	27			τ	T^*						T^*
0	0	0	0	1	1	2	2	3	4	28			τ			T^*	T^*			T^*
0	0	1	2	2	2	3	3	3	4	29			$\bar\tau$		T^*				T^*	T^*
0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	30		τ	T			T^*				T
0	1	2	2	2	2	2	2	3	4	31		$\bar\tau$			T^*		T^*			T
0	1	1	2	3	3	3	4	4	4	32		τ		T		T			T	
0	1	2	2	2	3	4	4	4	4	33		τ	T^*		T			T		
0	1	2	2	2	2	2	3	4	4	34		τ		T^*	T		T^*			
0	1	2	3	3	3	3	4	4	4	35		τ		T^*	T^*				T^*	
0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	36		$\bar\tau$		T				T		T^*
1	1	2	2	2	2	2	2	3	4	37	τ				T^*		T			T
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	38	$\bar\tau$			T		T^*				T
1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	39	τ	T			T				T	
1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	40	$\bar\tau$	T	T						T	
										R	4	9	15	18	16	16	20	18	15	20
									3		0	0	3	2	2	2	5	4	4	**5**
								2			0	0	2	2	1	0	**2**	1	2	•
							1				0	0	1	**1**	0	0	•	0	0	•
						1					0	0	**3**	•	1	0	•	1	1	•
					1						0	0	•	•	1	2	•	**2**	2	•
				1							0	1	•	•	3	**6**	•	•	4	•
			1								1	2	•	•	6	•	•	•	**7**	•
		1									1	3	•	•	**10**	•	•	•	•	•
	1										2	**7**	•	•	•	•	•	•	•	•
1											**4**	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Таблица 23

II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				$\bar\tau$		T^*				T
2					$\bar\tau$	T			T^*	T
3					$\bar\tau$	T^*			T	
4				τ	T	T				
5				τ	T^*	T^*			T^*	
6			$\bar\tau$		T	T			T	
7			$\bar\tau$			T			T^*	
8			$\bar\tau$	T^*		T			T	
9			τ	T^*	T^*				T^*	
10			τ	T						T^*
11			$\bar\tau$		T			T^*		T
12								τ	T^*	T
13			τ			T		T^*	T	
14			τ		T^*	T		T		
15				$\bar\tau$				T	T	T^*
16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*
17						τ		T	T	T^*
18							τ		T	T
19							$\bar\tau$	T	T^*	T
20						τ	T^*	T		T
21					τ	T^*	T			T
22				$\bar\tau$		T	T^*	T		
23					τ		T^*	T^*	T	
24					τ	T^*	T	T^*		
25				τ	T^*	T	T^*			
26				τ			T^*		T^*	
27							τ	T^*		T^*
28					τ		T^*		T^*	T^*
29			τ	T^*			T			T^*
30		τ			T^*		T			T
31		$\bar\tau$	T^*						T^*	T
32		τ		T	T			T		
33		τ	T			T	T^*			
34		τ	T					T^*	T^*	
35		τ	T^*	T^*				T^*		
36		$\bar\tau$				T		T		T^*
37	τ		T^*						T	T
38	$\bar\tau$				T^*			T		T
39	τ	T	T	T						
40	$\bar\tau$	T		T			T			

Таблица 24

			1	T	4	**5**	**5**	**4**	**5**	$\mathbf{T}^*$							7
			1	5	T^*	5	5	4	**5**	$\mathbf{T}^*$						6	
	1	5	5	5	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$					5		
			1	T	4	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$				4			
	1	5	4	5	T^*	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$			3				
					1	T	5	T^*	5	$\mathbf{T}^*$		2					
				1	4	5	4	5	T	T^*	1						
II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9							
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$						
12								τ	T^*	T	7*	–	–	–	–	–	–
18							τ		T	T	8	6*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	6*	$\mathbf{6}^*$
19							$\bar\tau$	T	T^*	T	6*	–	–	–	–	–	–
27							τ	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
17						τ		T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
20						τ	T^*	T		T	5*	6	**6**	**6**	**6**	7	**7**
23					τ		T^*	T^*	T		8	7	**7**	**7**	**7**	6	**6**
28					τ		T^*		T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
2					$\bar\tau$	T			T^*	T	4*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
3					$\bar\tau$	T^*			T		8	4*	5	**5**	**5**	5	**5**
21					τ	T^*	T			T	6	4*	5	**5**	**5**	5	**5**
24					τ	T^*	T	T^*			7	7	**7**	**7**	**7**	5	**5**
15				$\bar\tau$				T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
26				τ			T^*		T^*		3*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
1				$\bar\tau$		T^*				T	5		5	**5**	**5**	5	**5**
22				$\bar\tau$		T	T^*	T			3*	6	**6**	**6**	**6**	7	**7**
4				τ	T	T					4	5	3*	4	**4**	3*	4
5				τ	T^*	T^*			T^*		5	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
25				τ	T^*	T	T^*					6	**6**	**6**	**6**	6	**6**
16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
13			τ			T		T^*	T		8	7	**7**	**7**	**7**	2*	2*
7			$\bar\tau$			T			T^*			8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
6			$\bar\tau$		T	T			T		8	5	2*	4	**4**	2*	4
14			τ		T^*	T		T				5	4	2*	2*	7	**7**
11			$\bar\tau$		T			T^*		T	7	7	**7**	**7**	**7**		4
8			$\bar\tau$	T^*		T			T		8	5	3	2*	3	3	2*
9			τ	T^*	T^*				T^*			8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
10			τ	T						T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
29			τ	T^*			T			T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
36		$\bar\tau$				T		T		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
30		τ			T^*		T			T	6		4		1*	4	
32		τ		T	T			T			4		1*	4	**4**	7	**7**
31		$\bar\tau$	T^*						T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
33		τ	T			T	T^*					6	**6**	**6**	**6**	6	**6**
34		τ	T					T^*	T^*		7	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
35		τ	T^*	T^*				T^*			7	7	**7**	**7**	**7**	3	
38	$\bar\tau$				T^*			T		T			4		0*	7	**7**
37	τ		T^*						T	T	8		0*		2*		
39	τ	T	T	T									2	3	0*		3
40	$\bar\tau$	T		T			T				6		0*	3			3
1′									τ	T		8*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$
2′						τ	T		T	T			5*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	5*	$\mathbf{5}^*$
3′					$\bar\tau$	T	T	T	T	T				4*	$\mathbf{4}^*$	–	–
4′				τ	T^*	T		T	T						3*	7	**7**
5′								$\bar\tau$	T	T						7*	$\mathbf{7}^*$
6′					$\bar\tau$	T		T^*	T								4*
7′				τ		T		T^*	T								

Выкладки *(начало)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
1	26				τ			T^*		T^*		
	22				$\bar\tau$		T	T^*	T			
							$\bar\tau$	T^*	T	T^*		
	20						τ	T^*	T		T	
								τ	T	T^*	T	
	19							$\bar\tau$	T	T^*	T	$-$
									$\bar\tau$	T^*	T	
	12								τ	T^*	T	$-$
	$1'$									τ	T	$+$
2	3					$\bar\tau$	T^*			T		
	21					τ	T^*	T			T	
	$2'$						τ	T		T	T	$+$
3	37	τ		T^*						T	T	
	40	$\bar\tau$	T		T			T				
			$\bar\tau$	T^*	T			T		T	T	
	32		τ		T	T			T			
				τ	T	T		T	T	T	T	
	6			$\bar\tau$		T	T			T		
					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	T	
	4				τ	T	T					
	$3'$					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	$+$
4	14			τ		T^*	T		T			
	8			$\bar\tau$	T^*		T			T		
	$4'$				τ	T^*	T		T	T		$+$
5	38	$\bar\tau$				T^*			T		T	
	39	τ	T	T	T							
			$\bar\tau$	T	T	T^*			T		T	
	30		τ			T^*		T			T	
				$\bar\tau$	T	T^*		T	T		T	
	14			τ		T^*	T		T			
					$\bar\tau$	T^*	T	T	T		T	
	$4'$				τ	T^*	T		T	T		
						τ	T	T	T	T	T	
	$3'$					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	$-$
							$\bar\tau$	T	T	T	T	
	$2'$						τ	T		T	T	
								$\bar\tau$	T	T	T	
	18							τ		T	T	
	$5'$								$\bar\tau$	T	T	$+$
6	13			τ			T		T^*	T		
	6			$\bar\tau$		T	T			T		
	$6'$					$\bar\tau$	T		T^*	T		$+$

Выкладки *(продолжение)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
7	13			τ			T		T^*	T		
	8			$\bar\tau$	T^*		T			T		
	$7'$				τ		T		T^*	T		$+$
8	39	τ	T	T	T							
	40	$\bar\tau$	T		T			T				
			$\bar\tau$	T	T			T				
	30		τ			T^*		T			T	$-$
				$\bar\tau$	T	T^*		T			T	
	13			τ			T		T^*	T		
					$\bar\tau$	T^*	T	T	T^*	T	T	
	$7'$				τ		T		T^*	T		
						τ	T	T	T^*	T	T	
	$6'$					$\bar\tau$	T		T^*	T		
							$\bar\tau$	T	T^*	T	T	
	$2'$						τ	T		T	T	$-$
								$\bar\tau$	T^*	T	T	
	18							τ		T	T	$-$
									τ	T	T	
	$5'$								$\bar\tau$	T	T	$-$
										$\bar\tau$	T	
	$1'$									τ	T	$-$
	$8'$										$\bar\tau$	$+$
9	3					$\bar\tau$	T^*			T		
	24					τ	T^*	T	T^*			
	$9'$						τ	T	T^*	T		$+$
11	15				$\bar\tau$				T	T	T^*	
	4				τ	T	T					
	$10'$					$\bar\tau$	T		T	T	T^*	$+$
12	15				$\bar\tau$				T	T	T^*	
	25				τ	T^*	T	T^*				
						τ	T	T^*	T	T	T^*	
	$10'$					$\bar\tau$	T		T	T	T^*	
							$\bar\tau$	T^*	T	T	T^*	
	17						τ		T	T	T^*	
	$11'$							τ	T	T	T^*	$+$
13	15				$\bar\tau$				T	T	T^*	$-$
	$4'$				τ	T^*	T					
						τ	T		T	T	T^*	
	$10'$					$\bar\tau$	T		T	T	T^*	
							$\bar\tau$		T	T	T^*	
	17						τ		T	T	T^*	$-$
	$12'$								$\bar\tau$	T	T^*	$+$

Таблица 25

				1	4	5	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**						13		
				1	4	**5**	**T**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**					12			
				1	T^*	5	T	5	$\mathbf{T}^*$	**4**				11				
		2	5	5	4	5	**5**	**T**	$\mathbf{T}^*$	**4**			10					
					1	T	5	T	T^*	4		9						
	1	5	5	5	**4**	**5**	**5**	**4**	**5**	$\mathbf{T}^*$	8							
II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{j}$							S
18							τ		T	T	$\mathbf{6}^*$	–	–	–	–	–	–	
27							τ	T^*		T^*	**9**	6^*	$\mathbf{6}^*$	7	**7**	**7**		$*$
17						τ		T	T	T^*	**9**	7	**7**	5^*	$\mathbf{5}^*$	5^*	–	
20						τ	T^*	T		T	**7**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
23					τ		T^*	T^*	T		**6**	6	**6**	7	**7**	**7**		
28					τ		T^*		T^*	T^*	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
2					$\bar{\tau}$	T			T^*	T	**8**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
3					$\bar{\tau}$	T^*			T		**5**	4^*	5	5	**5**	5		
21					τ	T^*	T			T	**5**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
24					τ	T^*	T	T^*			**5**	4^*	5	7	**7**	**7**		
15				$\bar{\tau}$				T	T	T^*	**9**	7	**7**	3^*	3^*	3^*	–	
26				τ			T^*		T^*		**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
1				$\bar{\tau}$		T^*				T	**5**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
22				$\bar{\tau}$		T	T^*	T			**7**	7	**7**			6		
4				τ	T	T					**4**	5	4	3^*	4	4		
5				τ	T^*	T^*			T^*		**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
25				τ	T^*	T	T^*				**6**	6	**6**	4	3^*	6		
16			$\bar{\tau}$					T	T^*	T^*	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
13			τ			T		T^*	T		2^*	5	2^*	7	**7**	**7**		$*$
7			$\bar{\tau}$			T			T^*		**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
6			$\bar{\tau}$		T	T			T		**4**	5	4		4	4		
14			τ		T^*	T		T			**7**	7	**7**	4				
11			$\bar{\tau}$		T			T^*		T	**4**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
8			$\bar{\tau}$	T^*		T			T		3	5	3					
9			τ	T^*	T^*				T^*		**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
10			τ	T						T^*	**9**		2					
29			τ	T^*			T			T^*	**9**		3	6	**6**			
36		$\bar{\tau}$				T		T		T^*	**9**	7	**7**					
30		τ			T^*		T			T	1^*	–	–	–	–	–	–	
32		τ		T	T			T			**7**	7	**7**		4	4		
31		$\bar{\tau}$	T^*						T^*	T	**8**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
33		τ	T			T	T^*				**6**	6	**6**			6		
34		τ	T					T^*	T^*		**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**		
35		τ	T^*	T^*				T^*			3		3	7	**7**	**7**		
38	$\bar{\tau}$				T^*			T		T	**7**	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
37	τ		T^*						T	T	2^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**		
39	τ	T	T	T							0^*		1^*					$*$
40	$\bar{\tau}$	T		T			T				0^*		1	6	**6**			
$1'$									τ	T	$\mathbf{8}^*$	–	–	–	–	–	–	
$2'$						τ	T		T	T	$\mathbf{5}^*$	–	–	–	–	–	–	
$4'$				τ	T^*	T		T	T		**7**	7	**7**	4		3^*		
$5'$								$\bar{\tau}$	T	T	$\mathbf{7}^*$	–	–	–	–	–	–	
$6'$					$\bar{\tau}$	T		T^*	T		$\mathbf{4}^*$	5	4^*	7	**7**	**7**		$*$
$7'$				τ		T		T^*	T		3^*	5	3^*	7	**7**	**7**		$*$
$8'$										$\bar{\tau}$		9^*	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$		$*$
$9'$						τ	T	T^*	T				5^*	7	**7**	**7**		$*$
$10'$					$\bar{\tau}$	T		T	T	T^*					4^*	4^*	–	
$11'$							τ	T	T	T^*						6^*	–	
$12'$								$\bar{\tau}$	T	T^*								$*$

Таблица 26

			1	4	**5**	**4**	**5**	**5**	**4**	**4**											24	
			1	T^*	5	**4**	**5**	**5**	**4**	**4**										23		
			1	5	T	4	**5**	**5**	**4**	**4**									22			
			1	T	4	$\mathbf{T}^*$	**5**	**5**	**4**	**4**								21				
			1	5	T^*	T^*	5	**5**	**4**	**4**							20					
			1	5	5	4	$\mathbf{T}$	**5**	**4**	**4**						19						
				1	5	T^*	T	5	**4**	**4**					18							
			1	4	4	**5**	**5**	$\mathbf{T}$	**4**	**4**				17								
				1	T^*	5	**5**	$\mathbf{T}$	**4**	**4**			16									
		3	5	4	**5**	$\mathbf{T}$	**5**	$\mathbf{T}$	**4**	**4**		15										
	1	5	5	T^*	5	T	5	T	4	**4**	14											
II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9												
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$											S
27							τ	T^*		T^*	6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	*
23					τ		T^*	T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
28					τ		T^*		T^*	T^*	6	**6**	**6**	**6**	4	4^*	6	**6**	**6**	**6**	**6**	
3					$\bar\tau$	T^*			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
24					τ	T^*	T	T^*			4^*	$\mathbf{4}^*$	5	**5**	7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	*
26				τ			T^*		T^*		6	**6**	**6**	**6**	3^*	3^*	6	**6**	**6**	**6**	**6**	
22				$\bar\tau$		T	T^*	T			7	**7**	**7**	**7**	3^*	5	6	**6**	**6**	**6**	**6**	
4				τ	T	T					5	**5**	3^*	4		5	3^*	4	5	**5**	**5**	
5				τ	T^*	T^*			T^*		4	**4**	5	**5**	5	4	5	**5**	3^*	4	**4**	
25				τ	T^*	T	T^*				6	**6**	**6**	**6**	4	5	6	**6**	**6**	**6**	**6**	
16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	7	**7**	**7**	**7**		2^*	2^*	2^*	2^*	2^*	2^*	
13			τ			T		T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	*
7			$\bar\tau$			T			T^*		5	**5**		2^*		5			5	**5**	**5**	
6			$\bar\tau$		T	T			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
14			τ		T^*	T		T			7	**7**	**7**	**7**	4	5	4	2^*	5	**5**	**5**	
8			$\bar\tau$	T^*		T			T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
9			τ	T^*	T^*				T^*		4	**4**	4	2^*	4	4	4		3	4	**4**	
10			τ	T						T^*	2^*	3		3		2^*	2^*	3	2^*	2^*	3	
29			τ	T^*			T			T^*	3	2^*			6	**6**	3		3	3	2^*	*
36		$\bar\tau$				T		T		T^*	7	**7**	**7**	**7**		5			5	**5**	**5**	
32		τ		T	T			T			7	**7**	**7**	**7**				4	4		3	
33		τ	T			T	T^*				6	**6**	**6**	**6**		5	6	**6**	**6**	**6**	**6**	
34		τ	T					T^*	T^*		1^*	1^*			7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	*
35		τ	T^*	T^*				T^*			3	2			7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	
39	τ	T	T	T							0^*	3		3				3			3	*
40	$\bar\tau$	T		T			T				0^*	3		3	6	**6**		3			3	
$4'$				τ	T^*	T		T	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
$6'$					$\bar\tau$	T		T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	*
$7'$				τ		T		T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	*
$8'$										$\bar\tau$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	*
$9'$						τ	T	T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	*
$12'$								$\bar\tau$	T	T^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	*
$13'$				$\bar\tau$			T	T^*	T^*	T^*		3^*	3^*	3^*	7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	*
$14'$					$\bar\tau$	T	T	T^*	T^*	T^*				4^*	—	—	—	—	—	—	—	
$15'$						$\bar\tau$	T	T^*	T^*	T^*					7	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	*
$16'$						$\bar\tau$	T^*	T	T^*							5^*	6	**6**	**6**	**6**	**6**	
$17'$							τ	T	T^*	T^*							6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	
$18'$					$\bar\tau$	T		T	T^*	T^*								4^*	—	—	—	
$19'$						$\bar\tau$		T	T^*	T^*									5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	
$20'$					τ	T^*		T	T^*	T^*										4^*	$\mathbf{4}^*$	
$21'$				$\bar\tau$				T	T^*	T^*											3^*	
$22'$								$\bar\tau$	T^*	T^*												*

Выкладки *(начало)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
14	39	τ	T	T	T							
	40	$\bar\tau$	T		T			T				
			$\bar\tau$	T	T			T				
	34		τ	T					T^*	T^*		
				$\bar\tau$	T			T	T^*	T^*		
	10			τ	T						T^*	
	$13'$				$\bar\tau$			T	T^*	T^*	T^*	+
16	4				τ	T	T					
	$13'$				$\bar\tau$			T	T^*	T^*	T^*	
	$14'$					$\bar\tau$	T	T	T^*	T^*	T^*	+
17	7			$\bar\tau$			T			T^*		
	9			τ	T^*	T^*				T^*		
					τ	T^*	T			T^*		
	$13'$				$\bar\tau$			T	T^*	T^*	T^*	
						τ	T	T	T^*	T^*	T^*	
	$14'$					$\bar\tau$	T	T	T^*	T^*	T^*	
	$15'$						$\bar\tau$	T	T^*	T^*	T^*	+
18	26				τ			T^*		T^*		
	22				$\bar\tau$		T	T^*	T			
	$16'$						$\bar\tau$	T^*	T	T^*		+
19	16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10			τ	T						T^*	
					$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
	26				τ			T^*		T^*		
	$17'$							τ	T	T^*	T^*	+

Выкладки *(продолжение)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
20	16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10			τ	T						T^*	
					$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
	4				τ	T	T					
	$18'$					$\bar\tau$	T		T	T^*	T^*	+
21	16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	14			τ		T^*	T		T			
						τ	T		T	T^*	T^*	
	$18'$					$\bar\tau$	T		T	T^*	T^*	
	$19'$						$\bar\tau$		T	T^*	T^*	+
22	16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10			τ	T						T^*	
					$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
	5				τ	T^*	T^*			T^*		
	$20'$					τ	T^*		T	T^*	T^*	+
23	16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10			τ	T						T^*	
	$21'$				$\bar\tau$				T	T^*	T^*	+
24	16			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	29			τ	T^*			T			T^*	
					τ			T	T	T^*	T^*	
	$21'$				$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
								$\bar\tau$	T	T^*	T^*	
	$17'$							τ	T	T^*	T^*	
	$22'$								$\bar\tau$	T^*	T^*	+

Замечание 24. Когда переписывалась таблица, то есть формировалась *таблица* **26**, как продолжение *таблицы* **25**, то, кроме уже отмеченных в *таблице* **25** безусловно исключенных строк, были безусловно исключены и те строки, которые пропалываются оператором строки $8'$, то есть оператором $\langle\,\bar\tau\,\rangle$.

Замечание 25. По *таблице* **27** легко строится эквивалентная ей таблица **ДНФ**:

0	1	4	8	5	7	2	3	6	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	τ	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}^*$
	$\bar{\tau}$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$	$\bar{T}$	$\bar{T}^*$

Если учесть перестановку столбцов, то *первая* строка этой таблицы совпадает с **(8.28)** , а вторая — с **(8.29)** , что, конечно, так и должно быть.

Таблица 27

		3	5	4	5	4	5	4	4	4		2
		2	5	5	4	5	5	4	T^*	4	1	
II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9		
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$	
$8'$										$\bar{\tau}$	9^*	9^*
$12'$								$\bar{\tau}$	T	T^*	7^*	8
$22'$								$\bar{\tau}$	T^*	T^*	8	7^*
27							τ	T^*		T^*	6^*	6^*
$9'$						τ	T	T^*	T		5^*	8
$15'$						$\bar{\tau}$	T	T^*	T^*	T^*	8	5^*
24					τ	T^*	T	T^*			5	4^*
$6'$					$\bar{\tau}$	T		T^*	T		4^*	8
$13'$				$\bar{\tau}$			T	T^*	T^*	T^*	8	3^*
$7'$				τ		T		T^*	T		3^*	8
13			τ			T		T^*	T		2^*	8
29			τ	T^*			T			T^*	3	2^*
34		τ	T					T^*	T^*		8	1^*
39	τ	T	T	T							1^*	3

8.10 Процедура полиномиальной сложности анализа и дополнения таблицы задачи ВЫП

Процедура, о которой пойдёт речь ниже, лежит в основе алгоритмов $FS-\sigma$ и $FS-\sigma-S$, но она является их расширением и уточнением. Как уже знаем, в базисе указанных алгоритмов лежат *две* основные операции, выполняемые многократно: анализ таблицы с выделением подтаблиц и пополнение таблицы операторами, полученными как результат резолюции над двумя согласованными операторами, приводящими в результате анализа к *исходу* **1**.

В описании и уточнении этой процедуры следует иметь ввиду

Замечание 26. В таблице **задачи ВЫП** на этапе её преобразования будем строго различать две её части: *основную* (исходную на начало преобразований) часть таблицы, которую и исследуем на выполнимость (её операторы будем называть основными операторами), и *дополнительную* часть таблицы (операторы которой записываются под основной частью таблицы и называем дополнительными операторами). Дополнительную часть таблицы иногда, для краткости, будем называть дополнением. Важно отметить, что дополнение не изменяет характер выполнимости, то есть основная часть таблицы эквивалентна всей таблице.

В анализе таблицы, применявшейся в указанных выше алгоритмах, имеется определённая система заполнения **III** служебной строки на базе системы исходов (*см.* **7.2.1**). Если эта система исходов приводит к *исходу* **1**, который обеспечивается парой $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ согласованных операторов, один из которых имеет начало $\langle \bar{\tau}_k \rangle$, а другой — $\langle \tau_k \rangle$, то, как мы знаем, по этой паре операторов строится $\langle c \rangle$ — оператор резолюции (*см.* **(7.27)**), который имеет начало в столбце m, где $m > k$. Значит, в столбце m начало оператора $\langle c \rangle$ (если он будет включён в таблицу) и определит исход, который приведёт к условному исключению хотя бы *одного* из операторов $\langle a \rangle$ или $\langle b \rangle$ (не исключено, что могут быть условно исключены и *оба* оператора). Значит, пополнение таблицы оператором $\langle c \rangle$ приводит к тому, что *пара* из операторов $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ больше давать *исход* **1** не сможет.

Как указывалось выше, мы применяли резолюцию в форме, которую следует называть классической, то есть определённой в **(7.27)**. Однако эта форма классической резолюции является частным случаем позиционной резолюции, определённой в **(7.26)**, то есть для операторов

$$\langle a \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha \vee A \rangle \quad \text{и} \quad \langle b \rangle \rightleftharpoons \langle \beta \vee B \rangle$$

оператор позиционной резолюции имеет вид

$$\langle c \rangle \rightleftharpoons \langle \alpha \cdot \beta \vee A \vee B \rangle, \tag{8.30}$$

где предполагается, что подоператоры $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \beta \rangle$ таковы, что их конъюнкция $\langle \alpha \cdot \beta \rangle$ даёт в свёртке *один* оператор. При этом, подоператоры

$\langle\, \alpha \,\rangle$ и $\langle\, \beta \,\rangle$ должны иметь максимальные (по количеству продукции) возможные начала.

Примеры к этому определению.

1. Для следующей *пары* согласованных операторов

$$\begin{array}{l} \langle\, \bar{\tau} \quad M \quad T \quad M \quad T \quad M \,\rangle \\ \langle\, \tau \quad T \quad T \quad M \quad M \quad T^* \,\rangle \end{array}$$

классическая и позиционная резолюции соответственно таковы:

$$\langle\, \bar{\tau}\, T\, M\, T\, T^* \,\rangle, \qquad \langle\, \bar{\tau}\, \bar{T}^*\, T\, M\, T\, T^* \,\rangle.$$

2. Для следующих *двух* пар согласованных операторов

$$\begin{array}{lcl} \langle\, \tau \quad T \quad M \quad T \quad T \quad T^* \quad T \,\rangle & \text{и} & \langle\, \bar{\tau} \quad T \quad M \quad T^* \quad M \quad T^* \quad T^* \quad T \,\rangle \\ \langle\, \qquad \tau \quad M \quad T \quad T^* \quad M \,\rangle & & \langle\, \qquad\qquad \bar{\tau} \quad M \quad T^* \quad M \quad T \,\rangle \end{array}$$

позиционные резолюции суть соответственно:

$$\langle\, \tau\, T\, \bar{T}\, T\, T\, T^*\, T \,\rangle \text{ и } \langle\, \bar{\tau}\, T\, M\, \bar{T}^*\, M\, T^*\, T^*\, T \,\rangle,$$

а классические резолюции **не определены**, хотя для *второй* пары следовало бы принять оператор $\langle\, \bar{\tau}\, T\, M\, M\, M\, T^*\, T^*\, T \,\rangle$.

Замечание 27. Уже из приведённых примеров видно, что использование позиционной резолюции (вместо классической) требует применение общей системы *исходов* **7.1.1** вместо системы исходов из **7.2.1**. Здесь ещё обращаем внимание на то, что использование системы *исходов* **7.1.1** и применение позиционной резолюции **(8.30)** требует более полного использования правил конъюнкций и дизъюнкций (включая *таблицы* **1** и **2**) из **4.1** и **4.2**.

Рассмотренные примеры и *замечание* **27** показывают: если **задача ВЫП** в исходном своём состоянии состоит из операторов в системе продукций Q_3, то использование позиционной резолюции приводит к расширению системы продукций до Q_2, то есть операторы таблицы могут содержать продукции $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$. В таких случаях следует иметь ввиду, что операторы, записанные в системе Q_2, могут быть представлены в виде конъюнкции операторов, записанных в системе продукций Q_3. Точнее, верна

Лемма 2. Если заданный в системе продукций Q_2 оператор $\langle\, A \,\rangle$ содержит m продукций $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$, то такой оператор может быть записан в виде конъюнкции $(m+1)$–го оператора в системе продукций Q_3.

Доказательство. Оператор

$$\langle\, A \,\rangle \;=\; \langle\, A_0 \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, A_1 \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, A_2 \,\rangle \,\bar{/}\, \ldots \,\bar{/}\, \langle\, A_m \,\rangle,$$

где операторы $\langle\, A'_k \,\rangle$ (для $k = 1, 2, \ldots, m$) получены в результате того, что в операторе $\langle\, A \,\rangle$ удалены все продукции, предшествующие слева направо k–ой продукции $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$, а сама k–ая продукция $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$ заменяется соответственно на τ или $\bar{\tau}$ (здесь следует понимать, что $\langle\, A'_0 \,\rangle$ совпадает с $\langle\, A \,\rangle$). Оператор $\langle\, A_k \,\rangle$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots, m$) является результатом замены в операторе $\langle\, A'_k \,\rangle$ всех продукций $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$ на продукцию M. В том, что действительно в указанном построении будет верно записанное выше равенство можно убедиться, используя равенства и *таблицу* **1** из **4.1**.

В дальнейшем операторы $\langle\, A_0 \,\rangle$, $\langle\, A_1 \,\rangle$, $\ldots$, $\langle\, A_m \,\rangle$ с продукциями из системы Q_3 будут называться компонентами оператора $\langle\, A \,\rangle$ позиционной резолюции.

Иллюстрациями к *лемме* **2** могут служить позиционные резолюции из рассмотренного выше *примера* **2**:

$$\langle\, \tau\, T\, \bar{T}\, T\, T\, T^*\, T \,\rangle = \langle\, \tau\, T\, M\, T\, T\, T^*\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \tau\, T\, T\, T^*\, T \,\rangle\ ,$$

$$\langle\, \bar{\tau}\, T\, M\, \bar{T}^*\, M\, T^*\, T^*\, T \,\rangle = \langle\, \bar{\tau}\, T\, M\, M\, M\, T^*\, T^*\, T \,\rangle \,\bar{/}\, \langle\, \bar{\tau}\, M\, T^*\, T^*\, T \,\rangle\ .$$

Обратим внимание на то, что из доказательства *леммы* **2** следует верность следующей леммы.

Лемма 3. Если из конъюнкции $(m+1)$–ой компоненты оператора $\langle\, A \,\rangle$ исключить p компоненты, а над оставшимися $(m-p+1)$–ой компонентами выполнить конъюнкцию, то получим оператор в системе Q_2, содержащий $(m-p)$ продукций $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$.

Имея ввиду *замечание* **26**, при построении классической резолюции $\langle\, c \,\rangle$ по согласованным операторам $\langle\, a \,\rangle$ и $\langle\, b \,\rangle$, следует однозначно определить: в какой части таблицы должен быть размещён оператор $\langle\, c \,\rangle$?

Общее правило таково: если оператор $\langle\, c \,\rangle$ поглощает *один* из операторов $\langle\, a \,\rangle$ или $\langle\, b \,\rangle$ (или *оба* оператора $\langle\, a \,\rangle$ и $\langle\, b \,\rangle$), то он занимает его место (когда *оба* — поглощаются, место *второго* — просто освобождается). Если оператор $\langle\, c \,\rangle$ не поглощает ни *один* из операторов $\langle\, a \,\rangle$ и $\langle\, b \,\rangle$, то он заносится в дополнение.

Замечание 28. Оператор $\langle\, c \,\rangle$, занесённый в дополнение, ведёт себя по отношению к операторам основной и дополнительной частей по-разному. В ходе анализа оператор $\langle\, c \,\rangle$ может только условно исключить операторы из основной части таблицы, а из дополнительной части условного исключения не бывает: если требуется исключение, то оно всегда *безусловное.*

Для строго стандартизированной таблицы *задачи* **ВЫП** определим понятие *согласованной окрестности* операторов некоторого оператора $\langle A_t \rangle$ с началом в столбце T.

Прежде всего, отметим, что не любой оператор может рассматриваться как оператор, для которого следует строить согласованную окрестность операторов. Построение согласованной окрестности для оператора считается всегда связанным с таблицей *задачи* **ВЫП** на некотором этапе её преобразования.

Если в ходе анализа и заполнения **III** служебной строки мы вышли на *исход* **1**, то *первый* из *первой* пары операторов (в строго стандартизованной таблице), дающих *исход* **1**, и есть тот оператор $\langle A_t \rangle$, для которого следует строить согласованную окрестность. Первыми же операторами окрестности будут операторы $\langle A_t \rangle$ и $\langle B_t \rangle$.

По такой паре операторов $\langle A_t \rangle$ и $\langle B_t \rangle$ строим оператор классической резолюции $\langle C_m \rangle$, где $m > t$, с соблюдением общего правила и *замечания* **28**. Если в **III** служебной строке в столбце m был указан цифровой исход, то это означает, что роль оператора $\langle a \rangle$ будет исполнять оператор $\langle C_m \rangle$, а на роль оператора $\langle b \rangle$ имеется оператор, который своим началом обеспечил цифровой исход. Но здесь может быть и случай, когда в столбце m цифровой исход вызван продукцией $\bar{T}$ или $\bar{T}^*$. В таком случае из оператора позиционной резолюции извлекаем компоненту с началом в столбце m и эта компонента будет играть роль оператора $\langle b \rangle$. Так или иначе, но по операторам $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ вновь строим оператор классической резолюции с соблюдением общего правила и *замечания* **28**. Такой процесс продолжаем до тех пор, пока не выйдем в классической резолюции на оператор, имеющий начало, в столбце которого в **III** служебной строке имеется указатель T или T^*.

Операторы, начиная с операторов $\langle A_t \rangle$, $\langle B_t \rangle$ и $\langle C_m \rangle$, и всех тех, которые играли роли операторов $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle c \rangle$ и при этом не были безусловно исключены и составляют согласованную окрестность оператора $\langle A_t \rangle$.

Из самого процесса построения согласованной окрестности оператора $\langle A_t \rangle$ следует совершенно очевидная

Лемма 4. Позиционная резолюция над дополнительными операторами согласованной окрестности оператора $\langle A_t \rangle$ даёт оператор, который заменяет в таблице **задачи ВЫП** все эти дополнительные операторы и исключает *исход* **1** для любой пары операторов из согласованной окрестности оператора $\langle A_t \rangle$.

Теперь мы готовы доказать, что верна

Теорема 1. Если в таблице **задачи ВЫП** имеются n столбцов и m строк, то такую таблицу можно так дополнить не более, чем m операторами позиционной резолюции, что она останется эквивалентной исходной и в её анализе не будет выхода на *исход* **1**.

Доказательство. Верность теоремы в строго стандартизованной таблице устанавливается последовательной (сверху вниз) проверкой её операторов, в результате которой выясняется: можно ли для проверяемого оператора строить согласованную окрестность. Если нельзя, то переходим к проверке следующего, а если можно, то строим его согласованную окрестность и применяем *лемму* **4**, которая говорит, что дополнение таблицы пополнилось *одним* оператором и мы можем перейти к проверке следующего оператора. Поскольку число операторов, для которых можно строить согласованные окрестности, не может превышать число операторов исходной таблицы, то и дополнение таблицы не может превысить её основную часть. В завершении заметим: если при построении некоторой согласованной окрестности получили оператор $\langle c \rangle = \langle \theta \rangle$, то таблица противоречива и процесс проверки прерывается.

Из *теоремы* **1** вытекают ряд следствий. На основные два: *теоретическом* и *практическом* остановимся здесь.

Теоретическое отвечает на один из центральных вопросов современной вычислительной математики и теоретической кибернетики и формулируется так.

Теорема 2. Класс NP–полных задач совпадает с классом задач P.

Доказательство. Известно (см **[13]** и **[15]**), что если хотя бы *одна* NP– полная задача имеет полиномиальную временную сложность, то это верно и для любой NP– полной задачи. По *теореме* **С.А.Кука** *задача* **ВЫП** является NP– полной, а по *теореме* **1** наша процедура пополнения таблицы *задачи* **ВЫП** приводит лишь к полиномиальному росту числа операторов в таблице *задачи* **ВЫП** и тем самым к полиномиальному времени распознавания выполнимости.

Что касается *практического* следствия, то о нём можно сказать следующее.

Из *теоремы* **1** следует, что с полиномиальной временной сложностью можно выполнять суперприведение над *задачей* **ВЫП**. А когда мы говорим о *задаче* **ВЫП**, что она суперприведена, то следует под этим понимать, что задача стала *сверхлёгкой*: если текст таблицы не выродился в оператор $\langle\,\theta\,\rangle$, то она имеет выполняющий набор; предъявление выполняющего набора выполняется за линейное время от длины текста задачи. Процесс преобразования текста и его суперприведение — это одна из форм обучения не только в информационных системах, но и в более общих ситуациях.

Замечание 29. Результаты, изложенные выше, могут быть значительно модифицированы. В частности, можно было бы на этапе преобразования допускать операторы с продукциями из Q_2 и в основной части таблицы, можно было бы саму *задачу* **ВЫП** формулировать в операторах с продукциями из Q_2 и так далее. Кроме того, можно использовать результаты по комбинаторам и копродукциям, но всё это тема, возврат к которой возможен в будущем.

8.11 О сегментации в суперприведении таблицы

Над стандартизованной или строго стандартизованной таблицей большого размера разумно выполнить деление её на непересекающиеся части (то есть выполнить *сегментацию*), а затем, выполнив суперприведение над каждой её частью, выполнить суперприведение над таблицей, составленной из уже суперприведённых сегментов. Такой способ решения разумен в тех случаях, когда задача решается с использованием нескольких компьютеров или решается компьютером, допускающим параллельную обработку.

Однако в тех случаях, когда используется один компьютер, допускающий лишь последовательную обработку, разумно процесс решения задачи **ВЫП** построить несколько иначе.

Проиллюстрируем этот процесс суперприведения с сегментацией на примере строго стандартизованной *таблицы* **24**, над которой выполним разбивку на 3 сегмента с числом операторов: первые 19, затем следующие 10 и, наконец, оставшиеся 11.

Таблица 28

		3	5	**5**	**4**	**4**	**4**																16	
	3	5	T	5	4	**4**	**4**															15		
		2	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**4**														14			
		3	T	5	$\mathbf{T}^*$	**4**	**4**													13				
	1	5	5	**T**	$\mathbf{T}^*$	**4**	**4**												12					
	3	5	T	T	T^*	4	**4**											11						
	1	5	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**										10							
	2	T	5	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**									9								
	1	5	**5**	**T**	**5**	$\mathbf{T}^*$	**4**								8									
	1	T	5	T	5	$\mathbf{T}^*$	**4**							7										
		2	5	**5**	**T**	$\mathbf{T}^*$	**4**						6											
		1	T	5	T	T^*	4					5												
		2	5	5	4	**5**	$\mathbf{T}^*$				4													
		2	5	**5**	$\mathbf{T}^*$	**5**	$\mathbf{T}^*$			3														
		1	T	5	T^*	5	$\mathbf{T}^*$		2															
	1	4	5	4	5	T	T^*	1																
II	8	5	7	2	3	6	9																	
N	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$																S
12					τ	T^*	T	7^*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
18				τ		T	T	8	6^*	$\mathbf{6}^*$	6^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	$*$
19				$\bar{\tau}$	T	T^*	T	6^*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
27				τ	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**	6^*	$\mathbf{6}^*$	7	**7**	**7**	**7**	7	**7**	**7**	**7**	6^*	$\mathbf{6}^*$	$*$
17			τ		T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	7	**7**	5^*	$\mathbf{5}^*$	5^*	$\mathbf{5}^*$	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
20			τ	T^*	T		T	5^*	6	**6**	7	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
23		τ		T^*	T^*	T		8	7	**7**	6	6	**6**	7	**7**	**7**	**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
28		τ		T^*		T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	4^*	4^*	6	**6**	6	**6**	$*$
2		$\bar{\tau}$	T			T^*	T	4^*	8	**8**	**8**	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
3		$\bar{\tau}$	T^*			T		8	4^*	5	5	4^*	5	5	**5**	5	**5**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
21		τ	T^*	T			T	6	4^*	5	5	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
24		τ	T^*	T	T^*			7	7	**7**	5	4^*	5	7	**7**	**7**	**7**	7	**7**	**7**	**7**	4^*	5	$*$
15	$\bar{\tau}$				T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	7	**7**	3^*	3^*	3^*	3^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
26	τ			T^*		T^*		3^*	8	**8**	**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	3^*	3^*	6	**6**	6	**6**	$*$
1	$\bar{\tau}$		T^*				T	5		5	5	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
22	$\bar{\tau}$		T	T^*	T			3^*	6	**6**	7	7	**7**			6	**6**	5	3^*	6	**6**	7	**7**	
4	τ	T	T					4	5	4^*	4^*	5	4^*	4	3^*	4	3^*	5		5	4^*	5	5	$*$
5	τ	T^*	T^*			T^*		5	8	**8**	**8**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	4	5	4^*	5	3^*	4^*	$*$
25	τ	T^*	T	T^*					6	**6**	6	6	**6**	3^*	4	6	**6**	5	4	6	**6**	6	**6**	
$1'$						τ	T		8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	$*$
$2'$			τ	T		T	T			5^*	5^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	$*$
$3'$			τ	T	T^*	T							5^*	7	**7**	**7**	**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
$4'$		τ	T	T^*	T	T	T^*								4^*	—	—	—	—	—	—	—	—	
$5'$				τ	T	T	T^*									6^*	$\mathbf{6}^*$	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
$6'$		$\bar{\tau}$	T		T	T	T^*											8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	$*$
$7'$			$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*														6	**6**	7	**7**	$*$

Выкладки *(начало)*

в	N	3	4	5	6	7	8	9	р
1	26	τ			T^*		T^*		
	22	$\bar\tau$		T	T^*	T			
				$\bar\tau$	T^*	T	T^*		
	20			τ	T^*	T		T	
					τ	T	T^*	T	
	19				$\bar\tau$	T	T^*	T	–
						$\bar\tau$	T^*	T	
	12					τ	T^*	T	–
	$1'$						τ	T	+
2	3		$\bar\tau$	T^*			T		
	21		τ	T^*	T			T	
	$2'$			τ	T		T	T	+
5	3		$\bar\tau$	T^*			T		
	24		τ	T^*	T	T^*			
	$3'$			τ	T	T^*	T		+

Выкладки *(продолжение)*

в	N	3	4	5	6	7	8	9	р
7	15	$\bar\tau$				T	T	T^*	
	25	τ	T^*	T	T^*				
	4		τ	T	T^*	T	T	T^*	+
8	15	$\bar\tau$				T	T	T^*	
	4	τ	T	T					
			$\bar\tau$	T		T	T	T^*	
	$4'$		τ	T	T^*	T	T	T^*	–
				$\bar\tau$	T^*	T	T	T^*	
	17			τ		T	T	T^*	
	$5'$				τ	T	T	T^*	+
10	15	$\bar\tau$				T	T	T^*	
	4	τ	T	T					
	$6'$		$\bar\tau$	T		T	T	T^*	+
12	26	τ			T^*		T^*		
	22	$\bar\tau$		T	T^*	T			
	$7'$			$\bar\tau$	T^*	T	T^*		+

Суперприведение *первого* сегмента из 19 операторов представлено в *таблице* **28**. Результат этого суперприведения представлен в *таблице* **29**.

К 15 операторам *таблицы* **29** присоединены 10 операторов *второго* сегмента и над этими операторами в *таблице* **30** выполнено суперприведение.

Замечание 30. Относительно выкладок в *таблице* **30** следует обратить внимание на следующий факт. Оператор $8'$ в столбце S получает вначале $*$ (как результат *исхода* **3** в варианте 3), но затем этот оператор пропалывается последним оператором $18'$, что и отмечено "–" в столбце S.

Результатом суперприведения *таблицы* **30** являются 18 операторов, помеченных $*$ (*звёздочками*) в столбце S *таблицы* **30**.

Эти 18 операторов и 11 операторов, составлявших *третий* сегмент *таблицы* **24**, сведены в *таблицу* **31**, над которой выполнено суперприведение, результат которого — это *таблица* **32**.

Обращаем внимание на то, что хотя *таблицы* **27** и **32** отличаются *шестым* (сверху вниз) оператором, но *обе* эти таблицы дают верный ответ (в чём можно убедиться, заметив, что их **ДНФ** совпадают).

Таблица 29

II	8	5	7	2	3	6	9
N	3	4	5	6	7	8	9
$1'$						τ	T
18				τ		T	T
27				τ	T^*		T^*
$5'$				τ	T	T	T^*
17			τ		T	T	T^*
$2'$			τ	T		T	T
$3'$			τ	T	T^*	T	
$7'$			$\bar{\tau}$	T^*	T	T^*	
28		τ		T^*		T^*	T^*
24		τ	T^*	T	T^*		
$6'$		$\bar{\tau}$	T		T	T	T^*
15	$\bar{\tau}$				T	T	T^*
26	τ			T^*		T^*	
4	τ	T	T				
5	τ	T^*	T^*			T^*	

Таблица 30

	1	5	5	**5**	**5**	**4**	**5**	**4**																17	
	3	5	T	5	5	4	**5**	**4**															16		
		1	4	5	5	T^*	5	**4**														15			
	1	4	**5**	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}$	**4**													14				
	1	T^*	5	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}$	**4**												13					
	1	5	T	4	5	**5**	$\mathbf{T}$	**4**											12						
	1	5	5	4	T	5	$\mathbf{T}$	**4**										11							
	1	4	$\mathbf{T}$	**5**	**5**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	**4**									10								
	1	T^*	T	5	**5**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	**4**								9									
	3	5	**5**	$\mathbf{T}$	**5**	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	**4**							8										
	3	T	5	T	5	T	T	4						7											
	3	5	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$					6												
	1	T	4	**5**	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$				5													
	2	5	T^*	5	5	5	**5**	$\mathbf{T}^*$			4														
	3	5	**4**	**5**	**5**	$\mathbf{T}$	**5**	$\mathbf{T}^*$		3															
	1	T	4	**5**	**5**	$\mathbf{T}$	**5**	$\mathbf{T}^*$	2																
	1	5	T^*	5	5	T	5	T^*	1																	
II	4	8	5	7	2	3	6	9																	
N	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar l$																S
$1'$							τ	T	8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	$*$
18					τ		T	T	6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	$*$
$5'$					τ	T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	6^*	7	**7**	
27					τ	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	7	**7**	**7**	**7**	7	6^*	$\mathbf{6}^*$	$*$
17				τ		T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	5^*	—	—	
$7'$				$\bar\tau$	T^*	T	T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	7	**7**	**7**	**7**	5^*	6	**6**	**6**	8	**8**	**8**	
$3'$				τ	T	T^*	T		5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	7	**7**	**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	7	5^*	$\mathbf{5}^*$	$*$
$2'$				τ	T		T	T	5	**5**	**5**	5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	$*$
28			τ		T^*		T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	6	**6**	**6**	**6**	4^*	6	**6**	**6**	8	**8**	**8**	
$6'$			$\bar\tau$	T		T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	4^*	—	—	
24			τ	T^*	T	T^*			5	**5**	**5**	7	**7**	**7**	4^*	$\mathbf{4}^*$	5	**5**	7	**7**	**7**	**7**	7	5	**5**	$*$
15		$\bar\tau$				T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	3^*	—	—	
26		τ			T^*		T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	6	**6**	**6**	**6**	3^*	6	**6**	**6**	8	**8**	**8**	
5		τ	T^*	T^*			T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	4	**4**	5	**5**	4	3^*	4	**4**	8	**8**	**8**	
4		τ	T	T					3^*	4	**4**	3^*	4	**4**	5	**5**	4	**4**	5	5	**5**	**5**	4	4	3^*	$*$
16	$\bar\tau$					T	T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	7	**7**	**7**	**7**	2^*	2^*	2^*	2^*	—	—	—	
7	$\bar\tau$			T			T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	5	**5**	2^*	2^*	5	5	**5**	**5**	8	**8**	**8**	
13	τ			T		T^*	T		2^*	2^*	2^*	7	**7**	**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	7	2^*	2^*	$*$
11	$\bar\tau$		T			T^*		T^*	2^*	4	**4**	7	**7**	**7**	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	
14	τ		T^*	T		T			7	**7**	**7**	4	2^*	2^*	7	**7**	**7**	**7**	5	5	**5**	**5**		7	**7**	$*$
6	$\bar\tau$		T	T			T			4	**4**	2^*	4	**4**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	4	4	2^*	$*$
29	τ	T^*			T			T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	2^*	3	3	2^*	6	3	3	2^*		3	3	$*$
10	τ	T						T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	3	2^*	2^*	3	2^*	2^*	2^*	3		2		$*$
9	τ	T^*	T^*				T^*		8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	4	**4**	3		4	3	4	**4**	8	**8**	**8**	
9	$\bar\tau$	T^*		T			T		3	2^*	3	3	2^*	3	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**		3	3	
$8'$			$\bar\tau$	T		T^*	T	T		4^*	$\mathbf{4}^*$	7	**7**	**7**	9	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	—
$9'$		τ		T		T^*	T				3^*	7	**7**	**7**	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	7	3^*	3	$*$
$10'$		τ	T^*	T		T	T							3^*	8	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	3^*	7	**7**	$*$
$11'$		$\bar\tau$		T			T^*	T^*										3^*	5	5	**5**	**5**	8	**8**	**8**	
$12'$				$\bar\tau$	T		T^*	T^*											6	5^*	$\mathbf{5}^*$	$\mathbf{5}^*$	8	**8**	**8**	$*$
$13'$					τ	T	T^*	T^*												6^*	$\mathbf{6}^*$	$\mathbf{6}^*$	—	—	—	
$14'$			τ	T^*		T	T^*	T^*													4^*	$\mathbf{4}^*$	—	—	—	
$15'$		$\bar\tau$				T	T^*	T^*														3^*	—	—	—	
$16'$						$\bar\tau$	T^*	T^*															8	**8**	**8**	$*$
$17'$						$\bar\tau$	T	T^*																7^*	$\mathbf{7}^*$	$*$
$18'$			$\bar\tau$	T		T^*	T																			$*$

Выкладки *(начало)*

в	N	2	3	4	5	6	7	8	9	р
1	13	τ			T		T^*	T		
	11	$\bar\tau$		T			T^*		T	
	$8'$			$\bar\tau$	T		T^*	T	T	+
2	13	τ			T		T^*	T		
	8	$\bar\tau$	T^*		T			T		
	$9'$		τ		T		T^*	T		+
5	14	τ		T^*	T		T			
	8	$\bar\tau$	T^*		T			T		
	$10'$		τ	T^*	T		T	T		+
9	7	$\bar\tau$			T			T^*		
	10	τ	T						T^*	
	$11'$		$\bar\tau$		T			T^*	T^*	+
10	7	$\bar\tau$			T			T^*		
	29	τ	T^*			T			T^*	
			τ		T	T		T^*	T^*	
	$11'$		$\bar\tau$		T			T^*	T^*	
	$12'$				$\bar\tau$	T		T^*	T^*	+
11	16	$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10	τ	T						T^*	
			$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
	26		τ			T^*		T^*		
	$13'$					τ	T	T^*	T^*	+

Выкладки *(продолжение)*

в	N	2	3	4	5	6	7	8	9	р
12	16	$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10	τ	T						T^*	
			$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
	5		τ	T^*	T^*			T^*		
	$14'$			τ	T^*		T	T^*	T^*	+
13	16	$\bar\tau$					T	T^*	T^*	
	10	τ	T						T^*	
	$15'$		$\bar\tau$				T	T^*	T^*	+
14	16	$\bar\tau$					T	T^*	T^*	−
	29	τ	T^*			T			T^*	
			τ			T	T	T^*	T^*	
	$15'$		$\bar\tau$				T	T^*	T^*	
						$\bar\tau$	T	T^*	T^*	
	$13'$					τ	T	T^*	T^*	
	$16'$						$\bar\tau$	T^*	T^*	+
15	15		$\bar\tau$				T	T	T^*	−
	$10'$		τ	T^*	T		T	T		
				τ	T		T	T	T^*	
	$6'$			$\bar\tau$	T		T	T	T^*	−
					$\bar\tau$		T	T	T^*	
	17				τ		T	T	T^*	−
	$17'$						$\bar\tau$	T	T^*	+
17	13	τ			T		T^*	T		
	6	$\bar\tau$		T	T			T		
	$18'$			$\bar\tau$	T		T^*	T		+

Таблица 31

		2	5	5	4	5	5	4	5	**4**						6	
	1	5	5	5	**5**	**4**	**5**	**4**	**T**	**4**					5		
		3	5	T	5	4	5	4	T	4				4			
	1	5	5	5	4	**5**	**5**	**5**	**5**	$\mathbf{T}^*$			3				
	1	5	4	5	T^*	5	5	5	**5**	$\mathbf{T}^*$		2					
	1	5	5	5	4	5	5	T	5	T^*	1						
II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9							
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{/}$						S
$1'$									τ	T	8^*	$\mathbf{8}^*$	$\mathbf{8}^*$	—	—	—	
$16'$								$\bar\tau$	T^*	T^*	9	**9**	**9**	7^*	$\mathbf{7}^*$	8	$*$
$17'$								$\bar\tau$	T	T^*	9	**9**	**9**	8	**8**	7^*	$*$
18							τ		T	T	6^*	6^*	$\mathbf{6}^*$	—	—	—	
27							τ	T^*		T^*	9	**9**	**9**	6^*	$\mathbf{6}^*$	6^*	$*$
$3'$						τ	T	T^*	T		5^*	7	**7**	8	**8**	5^*	$*$
$2'$						τ	T		T	T	5	5^*	$\mathbf{5}^*$	—	—	—	
$12'$						$\bar\tau$	T		T^*	T^*	9	**9**	**9**	5^*	**5**	8	$*$
24					τ	T^*	T	T^*			5	7	**7**	4^*	$\mathbf{4}^*$	5	$*$
$18'$					$\bar\tau$	T		T^*	T		4^*	7	**7**	8	**8**	4^*	$*$
$9'$				τ		T		T^*	T		3^*	7	**7**	8	**8**	3^*	$*$
4				τ	T	T					4	3^*	4	5	**5**	4	
$10'$				τ	T^*	T		T	T		7	4	3^*	8	**8**	7	
13			τ			T		T^*	T		2^*	7	**7**	8	**8**	2^*	$*$
14			τ		T^*	T		T			7	4	2^*	7	**7**	7	
6			$\bar\tau$		T	T			T		4	2^*	4	8	**8**	4	
29			τ	T^*			T			T^*	9	**9**	**9**	2^*	3	3	$*$
10			τ	T						T^*	9	**9**	**9**	3	2^*	2	
36		$\bar\tau$				T		T		T^*	9	**9**	**9**	7	**7**	7	
30		τ			T^*		T			T	1^*	4	1^*	—	—	—	
32		τ		T	T			T			7	1^*	4	7	**7**	7	
31		$\bar\tau$	T^*						T^*	T	8	**8**	**8**	9	**9**	**9**	
33		τ	T			T	T^*				6	6	**6**	6	**6**	6	
34		τ	T					T^*	T^*		8	**8**	**8**	1^*	1^*	8	$*$
35		τ	T^*	T^*				T^*			3	7	**7**	2	3	3	
38	$\bar\tau$				T^*			T		T	7	4	0^*	—	—	—	
37	τ		T^*						T	T	2	0^*	2	9	**9**	2	
39	τ	T	T	T							0^*	2	0^*	3	0^*	1^*	$*$
40	$\bar\tau$	T		T			T				0^*	0^*		3	0^*	1	
$19'$								τ	T	T		7^*	$\mathbf{7}^*$	—	—	—	
$20'$					$\bar\tau$	T	T	T	T	T			4^*	—	—	—	
$21'$										$\bar\tau$				9^*	$\mathbf{9}^*$	$\mathbf{9}^*$	$*$
$22'$				$\bar\tau$			T	T^*	T^*	T^*						8	$*$

Выкладки *(начало)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
1	39	τ	T	T	T							
	40	$\bar\tau$	T		T			T				
			$\bar\tau$	T	T			T				
	30		τ			T^*		T			T	
				$\bar\tau$	T	T^*		T			T	
	13			τ			T		T^*	T		
					$\bar\tau$	T^*	T	T	T^*	T	T	
	$9'$				τ		T		T^*	T		
						τ	T	T	T^*	T	T	
	$18'$					$\bar\tau$	T		T^*	T		
							$\bar\tau$	T	T^*	T	T	
	$3'$						τ	T	T^*	T		
								$\bar\tau$	T^*	T	T	
	18							τ		T	T	
	$9'$								τ	T	T	+
2	37	τ		T^*						T	T	
	40	$\bar\tau$	T		T			T				
			$\bar\tau$	T^*	T			T		T	T	
	32		τ		T	T			T			
				τ	T	T		T	T	T	T	
	6			$\bar\tau$		T	T			T		
					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	T	
	4				τ	T	T					
	$20'$					$\bar\tau$	T	T	T	T	T	+

Выкладки *(продолжение)*

в	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	р
3	38	$\bar\tau$				T^*			T		T	−
	39	τ	T	T	T							
			$\bar\tau$	T	T	T^*			T		T	
	30		τ			T^*		T			T	−
				$\bar\tau$	T	T^*		T	T		T	
	14			τ		T^*	T		T			
					$\bar\tau$	T^*	T	T	T		T	
	$10'$				τ	T^*	T		T	T		
						τ	T	T	T	T	T	
	$20'$					τ	T	T	T	T	T	
							$\bar\tau$	T	T	T	T	
	$2'$						τ	T		T	T	−
								$\bar\tau$	T	T	T	
	18							τ		T	T	−
									$\bar\tau$	T	T	
	$19'$								τ	T	T	
										$\bar\tau$	T	
	$1'$									τ	T	−
	$21'$										$\bar\tau$	+
5	39	τ	T	T	T							
	40	$\bar\tau$	T		T			T				
			$\bar\tau$	T	T			T				
	34		τ	T					T^*	T^*		
				$\bar\tau$	T			T	T^*	T^*		
	10			τ	T						T^*	
	$22'$				$\bar\tau$			T	T^*	T^*	T^*	+

Таблица 32

		3	5	4	5	4	5	4	4	4		2
		2	5	5	4	5	5	4	T^*	4	1	
II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9		
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\overline{/}$	
$21'$										$\bar{\tau}$	9^*	9^*
$17'$								$\bar{\tau}$	T	T^*	7^*	8
$16'$								$\bar{\tau}$	T^*	T^*	8	7^*
27							τ	T^*		T^*	6^*	6^*
$3'$						τ	T	T^*	T		5^*	8
$12'$						$\bar{\tau}$	T		T^*	T^*	8	5^*
24					τ	T^*	T	T^*			5	4^*
$18'$					$\bar{\tau}$	T		T^*	T		4^*	8
$22'$				$\bar{\tau}$			T	T^*	T^*	T^*	8	3^*
$9'$				τ		T		T^*	T		3^*	8
13			τ			T		T^*	T		2^*	8
29			τ	T^*			T			T^*	3	2^*
34		τ	T					T^*	T^*		8	1^*
39	τ	T	T	T							1^*	3

8.12 Задача ВЫП в исчислении абстрактных σ–операторов

Фактически почти все основные элементы исчисления σ–операторов указаны уже в **8.1**. Однако последовательное применение этого исчисления, удобного для программной реализации, отлагалось до этого параграфа по нескольким причинам. Необходимо было уточнить, что можно извлечь из тех или иных приёмов, которые исследовались на протяжении всего изложения этой главы и которые должны помочь понять их суть и роль. Кроме того, хотелось установить и некоторый параллелизм между FS–операторами и σ–операторами, показав, что абстрактные σ–операторы расширяют наши возможности по сравнению с FS–операторами.

Теперь мы готовы подвести некоторый итог, который может рассматриваться как рекомендуемый к настоящему времени алгоритм, предназначенный для программной реализации. Мы сформулируем пункты этого алгоритма, поясним их и проиллюстрируем примерами.

Пункты алгоритма таковы.

1. Для операторов таблицы **задачи ВЫП** должна быть выбрана некоторая их последовательность (с возможным выделением сегментов и, быть может, шапочного сегмента).

2. Операторы таблицы должны быть представлены в форме абстрактных σ–операторов, определив их фрагменты и общий вид.

3. Конъюнкции над операторами должны выполняться *"столбиком"* (пофрагментно), начиная с *первой* пары операторов таблицы и далее над парами, состоящими из результирующего оператора конъюнкции и следующего оператора таблицы, при этом должны выполняться декатенация (развёртка) операторов и вводиться обозначения для конъюнктивных фрагментов (о чём будет подробнее сказано ниже).

Строго говоря, выбор последовательности операторов имеет лишь вспомогательное значение и, таким образом, можно говорить, что операторы могут следовать в любом порядке, однако в тех случаях, когда выбор указателей в **III** служебной строке определяется какими-то целями, то последовательность операторов вполне определяется (см., например, *таблицу* **5** или **6**, или указание в *замечании* **3**). В тех же случаях, когда нет никаких требований на выбор указателей, мы будем поступать следующим образом.

Над таблицей **задачи ВЫП** осуществим строгую стандартизацию. А затем над строго стандартизованной таблицей выполним сегментацию.

О строгой стандартизации выше сказано всё необходимое и здесь повторяться не будем. Примером строго стандартизованной таблицы является *таблица* **24**. Операторы этой таблицы воспроизводятся в *таблице* **33** с указанием их номеров в столбце N. В столбце N' указаны номера операторов, которые они приобретают в результате сегментации.

Сегментация над таблицей выполняется так (можно следить за сказанным по *таблице* **33**). Выполним i–ый вариант анализа, начиная с $i = 1$, которым и определяется i–ый сегмент. В заполнении указателями i–го варианта мы придерживаемся тех же правил анализа, которых придерживались при анализе таблицы по алгоритму $FS - \sigma$ с той лишь разницей, что при выходе в **III** служебной строке на исходы **1** – **5** мы отмечаем указателями со звёздочкой все операторы, в которых достигнуто их начало в анализируемом столбце. После того, как достигнут *указатель* 1, 2 или 3, считаем, что выделены (в основном) операторы сегмента (иногда добавляются к этому сегменту ещё дополнительные операторы, но об этом чуть ниже).

Операторы, получившие указатели со *звёздочкой* (то есть включённые в очередной сегмент), получают в столбце N' сверху вниз последовательные номера и *чертой* "–" (в служебном столбце) исключаются из дальнейшего анализа. Следующий, *(i + 1)*–ый вариант анализа совпадает с i–ым правее *первого* слева направо указателя T или T^*, который расположен в k–ом столбце i–го варианта, то есть анализ столбцов с k–го столбца будет продолжен в $(i+1)$–ом варианте, при этом, если окажется, что переход на k–ый столбец требует стереть в служебном столбце по *одному* или *два* указателя с одинаковыми номерами, то такие операторы могут быть присоединены к предыдущему сегменту, а анализ начат со столбца с T или T^* правее k–го. Сказанное можно увидеть в *таблице* **33**.

В самом деле, по *первому* варианту анализа мы выделили операторы указателями $7^*, 6^*, 5^*, 4^*$ и *три* оператора с указателем 3^*. Эти операторы в столбце N' получили номера $1, 2, \ldots, 7$ и составили **I** сегмент (за сегментацией можно проследить по *таблице* **34**).

Аналогичным образом выделены операторы **II** и **III** сегментов.

Но к операторам **IV** сегмента из операторов с номерами 16 — 19 (по столбцу N') присоединяются операторы 20 и 21, так как переход на анализ в 5–ом варианте на столбец 3 требует стереть лишь эти *два* оператора. Аналогичное наблюдается и в 5–ом, 6–ом и 8–ом сегментах.

Таблица 33

			3	T^*	5	T	T	T^*	T	T	T^*															7°
			3	4	T^*	5	T	T	T^*	T	T														6°	
			3	T^*	M	5	T^*	T	T	T^*	T													5°		
			2	M	4	T^*	5	T^*	T^*	T^*	T												4°			
		1	T^*	T^*	5	T^*	T^*	5	T	T^*	T											3°				
		3	5	4	4	T^*	T	5	T	T^*	T^*										2°					
		2	4	T	T	4	5	4	5	T	T^*									1°						
				2	M	5	T	T	T^*	4	**4**								8								
			2	M	4	M	5	M	5	**T***	**4**							7									
				3	T^*	M	M	5	T	T^*	4						6										
					2	T^*	T	T	5	**5**	**T***					5											
		3	5	4	T	4	**5**	**5**	**T**	**5**	**T***				4												
				1	5	T^*	5	**5**	**T**	**5**	**T***			3													
						1	T	5	T	5	**T***		2														
					1	4	5	4	5	T	T^*	1															
		0	1	4	8	5	7	2	3	6	9	**II**															
N	N'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\overline{/}$															
12	1								τ	T^*	T	7*	—	—	—	—	—	—	—	—	7*	—	—	—	—	—	—
18	8							τ		T	T	8	6*	—	—	—	—	—	—	—	8	6*	—	—	—	—	—
19	2							$\bar\tau$	T	T^*	T	6*	—	—	—	—	—	—	—	—	6*	—	—	—	—	—	—
27	27							τ	T^*		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	6*	—	—	—	9	9	6*	—	—	—	—
17	30						τ		T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	7	5*	—	—	9	9	7	5*	—	—	—
20	3						τ	T^*	T		T	5*	—	—	—	—	—	—	—	—	5*	—	—	—	—	—	—
23	39					τ		T^*	T^*	T		8	6	**6**	**6**	7	6	7	8	—	8	6	6	7	4*	—	—
28	33					τ		T^*		T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**8**	4*	—	9	9	8	8	8	4*	—
2	4					$\bar\tau$	T			T^*	T	4*	—	—	—	—	—	—	—	—	4*	—	—	—	—	—	—
3	9					$\bar\tau$	T^*			T		8	4*	—	—	—	—	—	—	—	8	4*	—	—	—	—	—
21	10					τ	T^*	T			T	6	4*	—	—	—	—	—	—	—	6	4*	—	—	—	—	—
24	11					τ	T^*	T	T^*			7	4*	—	—	—	—	—	—	—	7	4*	—	—	—	—	—
15	31				$\bar\tau$				T	T	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	7	3*	—	—	9	9	7	3*	—	—	—
26	5				τ			T^*		T^*		3*	—	—	—	—	—	—	—	—	3*	—	—	—	—	—	—
1	22				$\bar\tau$		T^*				T	5		5	**5**	3*	—	—	—	—	5	3*	—	—	—	—	—
22	6				$\bar\tau$		T	T^*	T			3*	—	—	—	—	—	—	—	—	3*	—	—	—	—	—	—
4	12				τ	T	T					4	5	3*	—	—	—	—	—	—	4	5	3*	—	—	—	—
5	35				τ	T^*	T^*			T^*		5	8	**8**	**8**	**8**	8	**8**	4	—	5	8	8	8	8	4	3*
25	7				τ	T^*	T	T^*				3*	—	—	—	—	—	—	—	—	3*	—	—	—	—	—	—
16	34			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	8	**8**	2*	—	9	9	8	8	8	2*	—
13	13			τ			T		T^*	T		8	5	2*	—	—	—	—	—	—	8	5	2*	—	—	—	—
7	37			$\bar\tau$			T			T^*			8	**8**	**8**	**8**	8	**8**	5	—	2*	—	—	—	—	—	—
6	14			$\bar\tau$		T	T			T		8	5	2*	—	—	—	—	—	—	8	5	2*	—	—	—	—
14	25			τ		T^*	T		T				7	**7**	**7**	5	—	—	—	—	2*	—	—	—	—	—	—
11	15			$\bar\tau$		T			T^*		T	7		2*	—	—	—	—	—	—	7	2*	—	—	—	—	—
8	16			$\bar\tau$	T^*		T			T		8	5	3	2*	—	—	—	—	—	8	5	3	2*	—	—	—
9	36			τ	T^*	T^*				T^*			8	**8**	**8**	**8**	8	**8**	4	—	2*	—	—	—	—	—	—
10	28			τ	T						T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	2*	—	—	—	9	9	2*	—	—	—	—
29	29			τ	T^*			T			T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	3	—	—	—	9	9	3	2*	—	—	—
36	32		$\bar\tau$				T		T		T^*	9	**9**	**9**	**9**	**9**	7	1*	—	—	9	9	7	1*	—	—	—
30	17		τ			T^*		T			T	6		4	1*	—	—	—	—	—	6	4	9	9	9	9	1*
32	23		τ		T	T			T			4	7	**7**	**7**	3	—	—	—	—	4	7	7	3	7	1*	—
31	40		$\bar\tau$	T^*						T^*	T		8	**8**	**8**	**8**	9	**9**	9	—	1*	—	—	—	—	—	—
33	26		τ	T			T	T^*					6	**6**	**6**	5	—	—	—	—	2	6	6	6	1*	—	—
34	38		τ	T					T^*	T^*		7	8	**8**	**8**	**8**	8	**8**	7	—	7	8	8	8	8	7	1*
35	18		τ	T^*	T^*				T^*			7		3	1*	—	—	—	—	—	7	1*	—	—	—	—	—
38	24	$\bar\tau$				T^*			T		T		7	**7**	**7**	4	—	—	—	—	0*	—	—	—	—	—	—
37	19	τ		T^*						T	T	8			0*	—	—	—	—	—	8	0*	—	—	—	—	—
39	20	τ	T	T	T										3	—	—	—	—	—	3	3	0*	—	—	—	—
40	21	$\bar\tau$	T		T			T				6			3	—	—	—	—	—	6	3	0*	—	—	—	—

Таблица 34

II	0	1	4	8	5	7	2	3	6	9	Определение абстрактных	Общий	σ–оператор
N'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	σ–операторов	вид	
1								τ	T^*	T	$\lambda_8^1 \rightleftharpoons \bar\nu_7\tau_7,\ \lambda_9^1 \rightleftharpoons \lambda_8^1\bar\nu_8$	λ_9^1	$\bar\nu_7\tau_7\bar\nu_8$
2							$\bar\tau$	T	T^*	T	$\lambda_7^2 \rightleftharpoons \bar\tau_6\bar\nu_6,\ \lambda_8^2 \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_7^2,\ \lambda_9^2 \rightleftharpoons \lambda_8^2\bar\nu_8$	λ_9^2	$\bar\nu_7\bar\tau_6\bar\nu_6\bar\nu_8$
3						τ	T^*	T		T	$\lambda_6^3 \rightleftharpoons \bar\nu_5\tau_5,\ \lambda_7^3 \rightleftharpoons \lambda_6^3\bar\nu_6,\ \lambda_9^3 \rightleftharpoons \lambda_7^{3,1}\bar\nu_8$	λ_9^3	$(\bar\nu_5\tau_5\bar\nu_6)^1\bar\nu_8$
4					$\bar\tau$	T			T^*	T	$\lambda_5^4 \rightleftharpoons \bar\tau_4\bar\nu_4,\ \lambda_8^4 \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_5^{4,2},\ \lambda_9^4 \rightleftharpoons \lambda_8^4\bar\nu_8$	λ_9^4	$\bar\nu_7(\bar\tau_4\bar\nu_4)^2\bar\nu_8$
5				τ			T^*		T^*		$\lambda_6^5 \rightleftharpoons \bar\nu_5\tau_3^2,\ \lambda_8^5 \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_6^{5,1}$	$\lambda_8^{5,1}$	$(\bar\nu_7(\bar\nu_5\tau_3^2)^1)^1$
6				$\bar\tau$		T	T^*	T			$\lambda_5^6 \rightleftharpoons \bar\tau_3^1\bar\nu_4,\ \lambda_6^6 \rightleftharpoons \bar\nu_5\lambda_5^6,\ \lambda_7^6 \rightleftharpoons \lambda_6^6\bar\nu_6$	$\lambda_7^{6,2}$	$(\bar\nu_5\bar\tau_3^1\bar\nu_4\bar\nu_6)^2$
7				τ	T^*	T	T^*				$\lambda_4^7 \rightleftharpoons \bar\nu_3\tau_3,\ \lambda_5^7 \rightleftharpoons \lambda_4^7\bar\nu_4,\ \lambda_6^7 \rightleftharpoons \bar\nu_5\lambda_5^7$	$\lambda_6^{7,3}$	$(\bar\nu_5\bar\nu_3\tau_3\bar\nu_4)^3$
8							τ		T	T	$\lambda_8^8 \rightleftharpoons \tau_6^1\bar\nu_7,\ \lambda_9^8 \rightleftharpoons \lambda_8^8\bar\nu_8$	λ_9^8	$\tau_6^1\bar\nu_7\bar\nu_8$
9					$\bar\tau$	T^*			T		$\lambda_5^9 \rightleftharpoons \bar\nu_4\bar\tau_4,\ \lambda_8^9 \rightleftharpoons \lambda_5^{9,2}\bar\nu_7$	$\lambda_8^{9,1}$	$((\bar\nu_4\bar\tau_4)^2\bar\nu_7)^1$
10					τ	T^*	T			T	$\lambda_5^{10} \rightleftharpoons \bar\nu_4\tau_4,\ \lambda_6^{10} \rightleftharpoons \lambda_5^{10}\bar\nu_5,\ \lambda_9^{10} \rightleftharpoons \lambda_6^{10,2}\bar\nu_8$	λ_9^{10}	$(\bar\nu_4\tau_4\bar\nu_5)^2\bar\nu_8$
11					τ	T^*	T	T^*			$\lambda_5^{11} \rightleftharpoons \bar\nu_4\tau_4,\ \lambda_6^{11} \rightleftharpoons \lambda_5^{11}\bar\nu_5,\ \lambda_9^{11} \rightleftharpoons \bar\nu_6\lambda_6^{11}$	$\lambda_7^{11,2}$	$(\bar\nu_6\bar\nu_4\tau_4\bar\nu_5)^2$
12				τ	T	T					$\lambda_4^{12} \rightleftharpoons \tau_3\bar\nu_3,\ \lambda_5^{12} \rightleftharpoons \lambda_4^{12}\bar\nu_4$	$\lambda_5^{12,4}$	$(\tau_3\bar\nu_3\bar\nu_4)^4$
13			τ			T		T^*	T		$\lambda_5^{13} \rightleftharpoons \tau_2^2\bar\nu_4,\ \lambda_7^{13} \rightleftharpoons \bar\nu_6\lambda_5^{13,1},\ \lambda_8^{13} \rightleftharpoons \lambda_7^{13}\bar\nu_7$	$\lambda_8^{13,1}$	$(\bar\nu_6(\tau_2^2\bar\nu_4)^1\bar\nu_7)^1$
14			$\bar\tau$		T	T			T		$\lambda_4^{14} \rightleftharpoons \bar\tau_2^1\bar\nu_3,\ \lambda_5^{14} \rightleftharpoons \lambda_4^{14}\bar\nu_4,\ \lambda_8^{14} \rightleftharpoons \lambda_5^{14,2}\bar\nu_7$	$\lambda_8^{14,1}$	$((\bar\tau_2^1\bar\nu_3\bar\nu_4)^2\bar\nu_7)^1$
15			$\bar\tau$		T			T^*		T	$\lambda_4^{15} \rightleftharpoons \bar\tau_2^1\bar\nu_3,\ \lambda_7^{15} \rightleftharpoons \bar\nu_6\lambda_4^{15,2},\ \lambda_9^{15} \rightleftharpoons \lambda_7^{15,1}\bar\nu_8$	λ_9^{15}	$(\bar\nu_6(\bar\tau_2^1\bar\nu_3)^2)^1\bar\nu_8$
16			$\bar\tau$	T^*		T			T		$\lambda_3^{16} \rightleftharpoons \bar\nu_2\bar\tau_2,\ \lambda_5^{16} \rightleftharpoons \lambda_3^{16,1}\bar\nu_4,\ \lambda_8^{16} \rightleftharpoons \lambda_5^{16,2}\bar\nu_7$	$\lambda_8^{16,1}$	$(((\bar\nu_2\bar\tau_2)^1\bar\nu_4)^2\bar\nu_7)^1$
17		τ			T^*		T			T	$\lambda_4^{17} \rightleftharpoons \bar\nu_3\tau_1^2,\ \lambda_6^{17} \rightleftharpoons \lambda_4^{17,1}\bar\nu_5,\ \lambda_9^{17} \rightleftharpoons \lambda_6^{17,2}\bar\nu_8$	λ_9^{17}	$((\bar\nu_3\tau_1^2)^1\bar\nu_5)^2\bar\nu_8$
18		τ	T^*	T^*				T^*			$\lambda_2^{18} \rightleftharpoons \bar\nu_1\tau_1,\ \lambda_3^{18} \rightleftharpoons \bar\nu_2\lambda_2^{18},\ \lambda_7^{18} \rightleftharpoons \bar\nu_6\lambda_9^{18,3}$	$\lambda_7^{18,2}$	$(\bar\nu_6(\bar\nu_2\bar\nu_1\tau_1)^3)^2$
19	τ		T^*						T	T	$\lambda_2^{19} \rightleftharpoons \bar\nu_1\tau^1,\ \lambda_8^{19} \rightleftharpoons \lambda_2^{19,5}\bar\nu_7,\ \lambda_9^{19} \rightleftharpoons \lambda_6^{19}\bar\nu_8$	λ_9^{19}	$(\bar\nu_1\tau^1)^5\bar\nu_7\bar\nu_8$
20	τ	T	T	T							$\lambda_1^{20} \rightleftharpoons \tau\bar\nu,\ \lambda_2^{20} \rightleftharpoons \lambda_1^{20}\bar\nu_1,\ \lambda_3^{20} \rightleftharpoons \lambda_2^{20}\bar\nu_2$	$\lambda_3^{20,6}$	$(\tau\bar\nu\bar\nu_1\bar\nu_2)^6$
21	$\bar\tau$	T		T			T				$\lambda_1^{21} \rightleftharpoons \bar\tau\bar\nu,\ \lambda_3^{21} \rightleftharpoons \lambda_1^{21,1}\bar\nu_2,\ \lambda_6^{21} \rightleftharpoons \lambda_3^{21,2}\bar\nu_5$	$\lambda_6^{21,3}$	$(((\bar\tau\bar\nu)^1\bar\nu_2)^2\bar\nu_5)^3$
22				$\bar\tau$		T^*				T	$\lambda_5^{22} \rightleftharpoons \bar\nu_4\bar\tau_3^1,\ \lambda_9^{22} \rightleftharpoons \lambda_5^{22,3}\bar\nu_8$	λ_9^{22}	$(\bar\nu_4\bar\tau_3^1)^3\bar\nu_8$
23		τ		T	T			T			$\lambda_3^{23} \rightleftharpoons \tau_1^1\bar\nu_2,\ \lambda_4^{23} \rightleftharpoons \lambda_3^{23}\bar\nu_3,\ \lambda_7^{23} \rightleftharpoons \lambda_4^{23,2}\bar\nu_6$	$\lambda_7^{23,2}$	$((\tau_1^1\bar\nu_2\bar\nu_3)^2\bar\nu_6)^2$
24	$\bar\tau$				T^*			T		T	$\lambda_4^{24} \rightleftharpoons \bar\nu_3\bar\tau^3,\ \lambda_7^{24} \rightleftharpoons \lambda_4^{24,2}\bar\nu_6,\ \lambda_9^{24} \rightleftharpoons \lambda_7^{24,1}\bar\nu_8$	λ_9^{24}	$((\bar\nu_3\bar\tau^3)^2\bar\nu_6)^1\bar\nu_8$
25			τ		T^*	T		T			$\lambda_4^{25} \rightleftharpoons \bar\nu_3\tau_2^1,\ \lambda_5^{25} \rightleftharpoons \lambda_4^{25}\bar\nu_4,\ \lambda_7^{25} \rightleftharpoons \lambda_5^{25,1}\bar\nu_6$	$\lambda_7^{25,2}$	$((\bar\nu_3\tau_2^1\bar\nu_4)^1\bar\nu_6)^2$
26		τ	T			T	T^*				$\lambda_2^{26} \rightleftharpoons \tau_1\bar\nu_1,\ \lambda_5^{26} \rightleftharpoons \lambda_2^{26,2}\bar\nu_4,\ \lambda_6^{26} \rightleftharpoons \bar\nu_5\lambda_5^{26}$	$\lambda_6^{26,3}$	$(\bar\nu_5(\tau_1\bar\nu_1)^2\bar\nu_4)^3$
27							τ	T^*		T^*	$\lambda_7^{27} \rightleftharpoons \bar\nu_6\tau_6,\ \lambda_9^{27} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_7^{27,1}$	λ_9^{27}	$\bar\nu_8(\bar\nu_6\tau_6)^1$
28			τ	T						T^*	$\lambda_3^{28} \rightleftharpoons \tau_2\bar\nu_2,\ \lambda_9^{28} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_3^{28,5}$	λ_9^{28}	$\bar\nu_8(\tau_2\bar\nu_2)^5$
29			τ	T^*			T			T^*	$\lambda_3^{29} \rightleftharpoons \bar\nu_2\tau_2,\ \lambda_6^{29} \rightleftharpoons \lambda_3^{29,2}\bar\nu_5,\ \lambda_9^{29} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_6^{29,2}$	λ_9^{29}	$\bar\nu_8((\bar\nu_2\tau_2)^2\bar\nu_5)^2$
30						τ		T	T	T^*	$\lambda_7^{30} \rightleftharpoons \tau_5^1\bar\nu_6,\ \lambda_8^{30} \rightleftharpoons \lambda_7^{30}\bar\nu_7,\ \lambda_9^{30} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_8^{30}$	λ_9^{30}	$\bar\nu_8\tau_5^1\bar\nu_6\bar\nu_7$
31				$\bar\tau$				T	T	T^*	$\lambda_7^{31} \rightleftharpoons \bar\tau_3^3\bar\nu_6,\ \lambda_8^{31} \rightleftharpoons \lambda_7^{31}\bar\nu_7,\ \lambda_9^{31} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_8^{31}$	λ_9^{31}	$\bar\nu_8\bar\tau_3^3\bar\nu_6\bar\nu_7$
32		$\bar\tau$				T		T		T^*	$\lambda_5^{32} \rightleftharpoons \bar\tau_1^3\bar\nu_4,\ \lambda_7^{32} \rightleftharpoons \lambda_5^{32,1}\bar\nu_6,\ \lambda_9^{32} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_7^{32,1}$	λ_9^{32}	$\bar\nu_8(\bar\tau_1^3\bar\nu_4)^1\bar\nu_6)^1$
33					τ		T^*		T^*	T^*	$\lambda_6^{33} \rightleftharpoons \bar\nu_5\tau_4^1,\ \lambda_8^{33} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_6^{33,1},\ \lambda_9^{33} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_8^{33}$	λ_9^{33}	$\bar\nu_8\bar\nu_7(\bar\nu_5\tau_4^1)^1$
34			$\bar\tau$					T	T^*	T^*	$\lambda_7^{34} \rightleftharpoons \bar\tau_2^4\bar\nu_6,\ \lambda_8^{34} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_7^{34},\ \lambda_9^{34} \rightleftharpoons \bar\nu_8\lambda_8^{34}$	λ_9^{34}	$\bar\nu_8\bar\nu_7\bar\tau_2^4\bar\nu_6$
35				τ	T^*	T^*			T^*		$\lambda_4^{35} \rightleftharpoons \bar\nu_3\tau_3,\ \lambda_5^{35} \rightleftharpoons \bar\nu_4\lambda_4^{35},\ \lambda_8^{35} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_5^{35,2}$	$\lambda_8^{35,1}$	$(\bar\nu_7(\bar\nu_4\bar\nu_3\tau_3)^2)^1$
36			τ	T^*	T^*				T^*		$\lambda_3^{36} \rightleftharpoons \bar\nu_2\tau_2,\ \lambda_4^{36} \rightleftharpoons \bar\nu_3\lambda_3^{36},\ \lambda_8^{36} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_4^{36,3}$	$\lambda_8^{36,1}$	$(\bar\nu_7(\bar\nu_3\bar\nu_2\tau_2)^3)^1$
37			$\bar\tau$			T			T^*		$\lambda_5^{37} \rightleftharpoons \bar\tau_2^2\bar\nu_4,\ \lambda_8^{37} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_5^{37,2}$	$\lambda_8^{37,1}$	$(\bar\nu_7(\bar\tau_2^2\bar\nu_4)^2)^1$
38		τ	T					T^*	T^*		$\lambda_2^{38} \rightleftharpoons \tau_1\bar\nu_1,\ \lambda_7^{38} \rightleftharpoons \bar\nu_6\lambda_2^{38,4},\ \lambda_8^{38} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_7^{38}$	$\lambda_8^{38,1}$	$(\bar\nu_7\bar\nu_6(\tau_1\bar\nu_1)^4)^1$
39					τ		T^*	T^*	T		$\lambda_6^{39} \rightleftharpoons \bar\nu_5\tau_4^1,\ \lambda_7^{39} \rightleftharpoons \bar\nu_6\lambda_6^{39},\ \lambda_8^{39} \rightleftharpoons \lambda_7^{39}\bar\nu_7$	$\lambda_8^{39,1}$	$(\bar\nu_6\bar\nu_5\tau_4^1\bar\nu_7)^1$
40		$\bar\tau$	T^*						T^*	T	$\lambda_2^{40} \rightleftharpoons \bar\nu_1\bar\tau_1,\ \lambda_8^{40} \rightleftharpoons \bar\nu_7\lambda_2^{40,5},\ \lambda_9^{40} \rightleftharpoons \lambda_8^{40}\bar\nu_8$	λ_9^{40}	$\bar\nu_7(\bar\nu_1\bar\tau_1)^5\bar\nu_8$

Замечание 31. Можно, и это проще, не присоединять к сегменту ещё дополнительные операторы, а выделять операторы в сегменты по общему правилу, что может приводить к сегментам из одного и двух операторов, что, конечно, даст увеличение числа сегментов, но это не принципиально.

В *таблицу* **34** перенесены операторы *таблицы* **33** в той последовательности, которая определена в ходе сегментации.

Эти операторы определены с помощью абстрактных σ–операторов с использованием для фрагментов особых абстрактных операторов $\langle\langle\lambda_j^{k,i}\rangle\rangle$ с номером k и *нп* равным $j+1$ (*см.* **8.5**).

Обращаем внимание на то, что операторы в форме FS, хотя и представлены в *таблице* **34**, но на самом деле они не нужны после того, как они получили определения в абстрактных σ–операторах. Кроме того, последний столбец в *таблице* **34** является также излишним.

В *таблице* **34** опущены (для краткости) скобки $\langle\langle\ \rangle\rangle$ в записях σ–операторов, но они должны подразумеваться. И в дальнейшем, когда из контекста понятно, что речь идёт о σ–операторах, скобки $\langle\langle\ \rangle\rangle$ будут иногда опускаться, но подразумеваться.

Замечание 32. Для фрагментов особых абстрактных операторов, кроме $\langle\langle\lambda_j^{k,i}\rangle\rangle$ будут в выкладках использоваться с аналогичным смыслом ещё и операторы $\langle\langle\mu_j^{k,i}\rangle\rangle$, $\langle\langle\eta_j^{k,i}\rangle\rangle$, $\langle\langle\rho_j^{k,i}\rangle\rangle$ и *другие.*

Вначале представим выполненные *“столбиком”* конъюнкции над операторами *первого* сегмента *таблицы* **34**, а затем поясним их.

$\lambda_9^1 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$		$\bar\nu_6$			ν_6	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\lambda_9^2 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	ν_5		$\bar\nu_5$		$\bar\nu_6$	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\mu_9^1 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	ν_5		$\bar\nu_5$		ν_6	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\lambda_9^3 =$	$\langle\langle$	λ_7^3	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_4$	ν_4		$\bar\nu_6$	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\mu_9^2 =$	$\langle\langle$	λ_7^3	ν_5	$\bar\nu_4$		ν_4	ν_6	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\lambda_9^4 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	λ_5^4	ν_3	$\bar\nu_3$	$\bar\nu_4$	$\lambda_5^{4,1}$	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\mu_9^3 =$	$\langle\langle$	λ_7^3	ν_5	ν_3	$\bar\nu_3$	ν_4	ν_6	$\bar\nu_8$	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{5,1} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	$\bar\nu_5$	τ_3	τ_3	τ_3^1	λ_6^5	λ_8^5	$\rangle\rangle$
$\mu_9^4 =$	$\langle\langle$	λ_7^3	ν_5	ν_3	τ_3	ν_4	ν_6	λ_8^5	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{6,2} =$	$\langle\langle$	λ_7^6	$\bar\nu_5$	$\bar\tau_3$	$\bar\tau_3$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\lambda_7^{6,1}$	$\rangle\rangle$
$\mu_9^5 =$	$\langle\langle$	μ_7^1			ν_7			μ_8^1	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{7,3} =$	$\langle\langle$	$\lambda_6^{7,1}$			$\lambda_6^{7,1}$			$\lambda_6^{7,2}$	$\rangle\rangle$
$\mu_9^6 =$	$\langle\langle$	μ_7^2			ν_7			μ_8^2	$\rangle\rangle$

$\lambda_7^3 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$		$\bar\nu_4$	ν_4	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^6 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$	$\bar\tau_3$	$\bar\tau_3$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\mu_7^1 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$	$\bar\tau_3$	$\bar\tau_3$	ν_4	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{7,1} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$	$\bar\nu_3$	τ_3	$\bar\nu_4$	λ_6^7	$\rangle\rangle$
$\mu_7^2 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$	$\bar\tau_3$	ν_3	ν_4	λ_6^7	$\rangle\rangle$

$$\mu_9^6 = \langle\langle\, \bar\nu_5\, \bar\tau_3\, \nu_3\, \nu_4\, \lambda_6^7\, \nu_7\, \mu_8^2 \,\rangle\rangle. \tag{8.31}$$

Для выполнения конъюнкций *"столбиком"* необходимо предварительно осуществить декатенацию операторов. О декатенации σ–операторов сказано в **8.3** всё необходимое и здесь можно добавить лишь следующее. Абстрактные σ–операторы в декатенации записываются проще, а глубина декатенации определяется столбиком с *исходом* **1**, **2** или **3** (*см.* выше декатенацию операторов $\lambda_8^{5,1}$ и $\lambda_7^{6,2}$), если только раньше не получили выход (как в операторах λ_9^1, λ_9^2, λ_9^3, λ_9^4) на фрагменты $\bar\nu_k$ и ν_k или ν_k и $\bar\nu_k$, в дальнейшей декатенации которых нет надобности.

Результат μ_9^5 конъюнкций над операторами с *первого* до *шестого* включительно, показывает, что фактически дальнейшей декатенации должен быть подвергнут фрагмент $\mu_7^1 \rightleftharpoons \lambda_7^3 \,\bar{/}\, \lambda_7^6$, что и выполнено в *правом* столбце, в котором получена декатенация фрагмента μ_7^2, входящего в оператор μ_9^6. В итоге для **I** сегмента имеем результат **(8.31)**.

Дальнейшие выкладки таковы.

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcllllllllll}
\mu_9^6 &=& \langle\langle & \bar\nu_5 & \bar\tau_3 & \nu_3 & \nu_4 & \lambda_6^7 & \nu_7 & \mu_8^2 & \rangle\rangle \\
\lambda_9^8 &=& \langle\langle & \bar\nu_5 & & \nu_5 & & \tau_6 & \bar\nu_7 & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^7 &=& \langle\langle & \bar\nu_5 & & \nu_5 & & \mu_6^1 & \nu_7 & \mu_8^3 & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{9,1} &=& \langle\langle & \lambda_5^9 & & \lambda_5^9 & & \lambda_5^{9,1} & \bar\nu_7 & \lambda_8^9 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^8 &=& \langle\langle & \lambda_5^9 & & \nu_5 & & \mu_6^2 & \nu_7 & \mu_8^4 & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{10} &=& \langle\langle & \lambda_5^{10} & & \bar\nu_5 & & \lambda_6^{10} & \lambda_6^{10,1} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^9 &=& \langle\langle & \mu_5^1 & & \nu_5 & & \mu_6^3 & \nu_7 & \mu_8^4 & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{11,2} &=& \langle\langle & & \bar\nu_6 & & & \lambda_6^{11} & \lambda_7^{11} & \lambda_7^{11,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{10} &=& \langle\langle & \mu_5^1 & & \nu_5 & & \mu_6^4 & \nu_7 & \mu_8^5 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{12,4} &=& \langle\langle & \lambda_5^{12} & & \lambda_5^{12} & & \lambda_5^{12,1} & \lambda_5^{12,2} & \lambda_5^{12,3} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{11} &=& \langle\langle & \mu_5^2 & & \nu_5 & & \mu_6^5 & \nu_7 & \mu_8^6 & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{13,1} &=& \langle\langle & & \bar\nu_6 & & & \lambda_5^{13,1} & \bar\nu_7 & \lambda_8^{13} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{12} &=& \langle\langle & \mu_5^2 & & \nu_5 & & \mu_6^6 & \nu_7 & \mu_8^7 & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{14,1} &=& \langle\langle & \lambda_5^{14} & & \lambda_5^{14} & & \lambda_5^{14,1} & \bar\nu_7 & \lambda_8^{14} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{13} &=& \langle\langle & \mu_5^3 & & \nu_5 & & \mu_6^7 & \nu_7 & \mu_8^8 & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{15} &=& \langle\langle & & \bar\nu_6 & & & \lambda_4^{15,2} & \lambda_7^{15} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{14} &=& \langle\langle & \mu_5^3 & & \nu_5 & & \mu_6^8 & \nu_7 & \mu_8^8 & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{16,1} &=& \langle\langle & \lambda_5^{16} & & \lambda_5^{16} & & \lambda_5^{16,1} & \bar\nu_7 & \lambda_8^{16} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{15} &=& \langle\langle & \mu_5^4 & & \nu_5 & & \mu_6^9 & \nu_7 & \mu_8^9 & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{17} &=& \langle\langle & \lambda_4^{17,1} & & \bar\nu_5 & & \lambda_6^{17} & \lambda_6^{17,1} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{16} &=& \langle\langle & \mu_5^5 & & \nu_5 & & \mu_6^{10} & \nu_7 & \mu_8^9 & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{18,2} &=& \langle\langle & & \bar\nu_6 & & & \lambda_3^{18,3} & \lambda_7^{18} & \lambda_7^{18,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{17} &=& \langle\langle & \mu_5^5 & & \nu_5 & & \mu_6^{11} & \nu_7 & \mu_8^{10} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{19} &=& \langle\langle & \lambda_2^{19,3} & & \lambda_2^{19,3} & & \lambda_2^{19,4} & \bar\nu_7 & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{18} &=& \langle\langle & \mu_5^6 & & \nu_5 & & \mu_6^{12} & \nu_7 & \mu_8^{10} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,6} &=& \langle\langle & \lambda_3^{20,2} & & \lambda_3^{20,2} & & \lambda_3^{20,3} & \lambda_3^{20,4} & \lambda_3^{20,5} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{19} &=& \langle\langle & \mu_5^7 & & \nu_5 & & \mu_6^{13} & \nu_7 & \mu_8^{11} & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{21,3} &=& \langle\langle & \lambda_3^{21,2} & & \bar\nu_5 & & \lambda_6^{21} & \lambda_6^{21,1} & \lambda_6^{21,2} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{20} &=& \langle\langle & \mu_5^8 & & \nu_5 & & \mu_6^{14} & \nu_7 & \mu_8^{12} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{22} &=& \langle\langle & \lambda_5^{22} & & \lambda_5^{22} & & \lambda_5^{22,1} & \lambda_5^{22,2} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{21} &=& \langle\langle & \mu_5^9 & & \nu_5 & & \mu_6^{15} & \nu_7 & \mu_8^{12} & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{23,2} &=& \langle\langle & \lambda_4^{23,1} & & \lambda_4^{23,1} & & \bar\nu_6 & \lambda_7^{23} & \lambda_7^{23,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{22} &=& \langle\langle & \mu_5^{10} & & \nu_5 & & \mu_6^{15} & \nu_7 & \mu_8^{13} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rclllllll}
\mu_9^{22} &=& \langle\langle & \mu_5^{10} & \nu_5 & \mu_6^{15} & \nu_7 & \mu_8^{13} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{24} &=& \langle\langle & \lambda_4^{24,1} & \lambda_4^{24,1} & \bar\nu_6 & \lambda_7^{24} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{23} &=& \langle\langle & \mu_5^{11} & \nu_5 & \mu_6^{15} & \nu_7 & \mu_8^{13} & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{25,2} &=& \langle\langle & \lambda_5^{25} & \lambda_5^{25} & \bar\nu_6 & \lambda_7^{25} & \lambda_7^{25,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{24} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{15} & \nu_7 & \mu_8^{14} & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{26,3} &=& \langle\langle & \bar\nu_5 & \lambda_5^{26} & \lambda_6^{26} & \lambda_6^{26,1} & \lambda_6^{26,2} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{25} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{15} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{27} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_7^{27,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{26} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{16} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{28} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_3^{28,5} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{27} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{17} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{29} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_6^{29,2} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{28} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{18} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{30} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_8^{30} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{29} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{19} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{31} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_8^{31} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{30} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{20} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{32} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_7^{32,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{31} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{21} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{33} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_8^{33} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{32} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{22} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{34} &=& \langle\langle & & \bar\nu_8 & & & \lambda_8^{34} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{33} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{23} & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{35,1} &=& \langle\langle & & \bar\nu_7 & & \lambda_5^{35,2} & \lambda_8^{35} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{34} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{24} & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{36,1} &=& \langle\langle & & \bar\nu_7 & & \lambda_4^{36,3} & \lambda_8^{36} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{35} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{25} & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{37,1} &=& \langle\langle & & \bar\nu_7 & & \lambda_5^{37,2} & \lambda_8^{37} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{36} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{26} & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{38,1} &=& \langle\langle & & \bar\nu_7 & & \lambda_7^{38} & \lambda_8^{38} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{37} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{16} & \nu_7 & \mu_8^{27} & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{39,1} &=& \langle\langle & & \bar\nu_6 & \lambda_6^{39} & \bar\nu_7 & \lambda_8^{39} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{38} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{17} & \nu_7 & \mu_8^{28} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{40} &=& \langle\langle & & \bar\nu_7 & & \lambda_2^{40,5} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{39} &=& \langle\langle & \mu_5^{12} & \nu_5 & \mu_6^{17} & \nu_7 & \mu_8^{28} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Выкладки *столбиком* приводят нас к результату:

$$\mu_9^{39} \;=\; \langle\langle\, \mu_5^{12}\,\nu_5\,\mu_6^{17}\,\nu_7\,\mu_8^{28}\,\rangle\rangle. \tag{8.32}$$

Начало столбца

$\lambda_5^9 =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_4$		$\bar\tau_4$		$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{10} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_4$		τ_4		$\rangle\rangle$
$\mu_5^1 =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_4$		ν_4		$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{12} =$	$\langle\langle$	τ_3		$\bar\nu_3$	$\bar\nu_4$		$\rangle\rangle$
$\mu_5^2 =$	$\langle\langle$	τ_3		$\bar\nu_3$		ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{14} =$	$\langle\langle$	$\bar\tau_2$	$\bar\tau_2$	$\bar\nu_3$		$\bar\nu_4$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^3 =$	$\langle\langle$	$\bar\tau_2$		ν_2	$\bar\nu_3$	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{16} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_2$	$\bar\tau_2$	λ_3^{16}		$\bar\nu_4$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^4 =$	$\langle\langle$	$\bar\tau_2$		ν_2	λ_3^{16}	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_4^{17,1} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_3$			τ_1^2	λ_4^{17}	$\rangle\rangle$
$\mu_5^5 =$	$\langle\langle$	ν_1	$\bar\nu_1$	ν_2	μ_3^1	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_2^{19,3} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_1$	τ^1	λ_2^{19}	$\lambda_2^{19,1}$	$\lambda_2^{19,2}$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^6 =$	$\langle\langle$	$\nu_1\,\tau$	τ	ν_2	μ_3^2	ν_4	$\rangle\rangle$

Продолжение столбца

$\mu_5^6 =$	$\langle\langle$	ν_1	τ	τ	ν_2	μ_3^2	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{20,2} =$	$\langle\langle$	λ_1^{20}		$\bar\nu_1$	$\bar\nu_2$	λ_3^{20}	$\lambda_3^{20,1}$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^7 =$	$\langle\langle$	ν_1	τ	τ	ν_2	μ_3^3	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{21,2} =$	$\langle\langle$	λ_1^{21}	$\bar\tau$	$\bar\nu$	$\bar\nu_2$	λ_3^{21}	$\lambda_3^{21,1}$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^8 =$	$\langle\langle$	ν_1	ν	τ	ν_2	μ_3^4	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{22} =$	$\langle\langle$			$\bar\nu_4$			$\bar\tau_3^1$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^9 =$	$\langle\langle$	ν_1	ν	τ	ν_2	μ_3^4	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_4^{23,1} =$	$\langle\langle$	τ_1	$\bar\nu$	ν	$\bar\nu_2$	$\bar\nu_3$	λ_4^{23}	$\rangle\rangle$
$\mu_5^{10} =$	$\langle\langle$			ν_3		μ_3^4	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_4^{24,1} =$	$\langle\langle$			$\bar\nu_3$		$\bar\tau^3$	λ_4^{24}	$\rangle\rangle$
$\mu_5^{11} =$	$\langle\langle$			ν_3		μ_3^5	ν_4	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{25} =$	$\langle\langle$			$\bar\nu_3$		τ_2^1	$\bar\nu_4$	$\rangle\rangle$
$\mu_5^{12} =$	$\langle\langle$			ν_3		μ_3^6	ν_4	$\rangle\rangle$

Итог вычислений:

$$\mu_5^{12} \;=\; \langle\langle\, \nu_3\, \mu_3^6\, \nu_4 \,\rangle\rangle. \tag{8.33}$$

Начало столбца

$\lambda_3^{16} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_2$		ν_1	$\bar\nu_1$	$\rangle\rangle$
$\tau_1^2 =$	$\langle\langle$		τ_1^1	τ_1	τ_1	$\rangle\rangle$
$\mu_3^1 =$	$\langle\langle$	τ_1^1		ν_1	τ_1	$\rangle\rangle$
$\lambda_2^{19,1} =$	$\langle\langle$		λ_2^{19}	$\bar\nu_1$	τ^1	$\rangle\rangle$
$\mu_3^2 =$	$\langle\langle$	μ_2^1	ν_1	τ	ν	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{20} =$	$\langle\langle$		λ_2^{20}		$\bar\nu_2$	$\rangle\rangle$
$\mu_3^3 =$	$\langle\langle$	μ_2^2	ν_1	τ	ν	$\rangle\rangle$

Продолжение столбца

$\mu_3^3 =$	$\langle\langle$	μ_2^2	ν_1	τ	ν	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{21} =$	$\langle\langle$		$\lambda_1^{21,1}$		$\bar\nu_2$	$\rangle\rangle$
$\mu_3^4 =$	$\langle\langle$	μ_2^3	ν_1	τ	ν	$\rangle\rangle$
$\bar\tau^3 =$	$\langle\langle$	$\bar\tau^2$	$\bar\tau^1$	$\bar\tau$	$\bar\tau$	$\rangle\rangle$
$\mu_3^5 =$	$\langle\langle$	μ_2^4	ν_2			$\rangle\rangle$
$\tau_2^1 =$	$\langle\langle$		τ_2		τ_2	$\rangle\rangle$
$\mu_3^6 =$	$\langle\langle$		μ_2^5		ν_2	$\rangle\rangle$

Итог вычислений:

$$\mu_3^6 \;=\; \langle\langle\, \mu_2^5\, \nu_2 \,\rangle\rangle. \tag{8.34}$$

Начало столбца **Продолжение столбца**

$$
\begin{array}{rclccccl}
\tau_1^1 & = & \langle\!\langle & \bar{\nu} & & \nu & \tau_1 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_2^{19} & = & \langle\!\langle & & \bar{\nu}_1 & & \tau^1 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_2^1 & = & \langle\!\langle & \bar{\nu} & \nu & \tau & \nu & \rangle\!\rangle \\
\lambda_2^{20} & = & \langle\!\langle & \tau & \bar{\nu} & & \bar{\nu}_1 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_2^2 & = & \langle\!\langle & \tau & \nu & \tau & \nu & \rangle\!\rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rclccccl}
\mu_2^2 & = & \langle\!\langle & \tau & \nu & \tau & \nu & \rangle\!\rangle \\
\lambda_1^{21,1} & = & \langle\!\langle & \bar{\tau} & \bar{\nu} & \bar{\tau} & \bar{\nu} & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_2^3 & = & \langle\!\langle & & \nu_2 & & & \rangle\!\rangle \\
\mu_2^4 & = & \langle\!\langle & & \nu_2 & & & \rangle\!\rangle \\
\mu_2^5 & = & \langle\!\langle & & \nu_2 & & & \rangle\!\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$
\mu_2^5 \; = \; \langle\!\langle\, \nu_2 \,\rangle\!\rangle \tag{8.35}
$$

Значение **(8.33)** с учётом **(8.34)** и **(8.35)** даёт нам:

$$
\mu_5^{12} \; = \; \langle\!\langle\, \nu_5 \,\rangle\!\rangle \tag{8.36}
$$

Начало столбца **Продолжение столбца**

$$
\begin{array}{rclcccccl}
\lambda_6^7 & = & \langle\!\langle & & & \bar{\nu}_5 & & \lambda_5^7 & \rangle\!\rangle \\
\tau_6 & = & \langle\!\langle & & & \bar{\nu}_5 & & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^1 & = & \langle\!\langle & & & \bar{\nu}_5 & & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_5^{9,1} & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_4 & & \bar{\tau}_4 & & \lambda_5^9 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^2 & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_4 & & \bar{\tau}_4 & & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_6^{10} & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_4 & & \tau_4 & & \bar{\nu}_5 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^3 & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_4 & & \nu_4 & & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_6^{11} & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_4 & & \tau_4 & & \bar{\nu}_5 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^4 & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_4 & & \nu_4 & & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_5^{12,1} & = & \langle\!\langle & \tau_3 & \bar{\nu}_3 & \bar{\nu}_4 & & \lambda_5^{12} & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^5 & = & \langle\!\langle & \tau_3 & \bar{\nu}_3 & \nu_4 & & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_5^{13,1} & = & \langle\!\langle & \tau_2^1 & \tau_2^1 & \bar{\nu}_4 & & \lambda_5^{13} & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^6 & = & \langle\!\langle & \tau_2 & \nu_2 & \tau_2^1 & \nu_4 & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_5^{14,1} & = & \langle\!\langle & \bar{\tau}_2 & \bar{\tau}_2 & \bar{\nu}_3 & \bar{\nu}_4 & \lambda_5^{14} & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^7 & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_2 & \tau_2 & \nu_4 & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_4^{15,2} & = & \langle\!\langle & \bar{\tau}_2^1 & & \bar{\nu}_3 & \lambda_4^{15} & \lambda_4^{15,1} & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^8 & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_2 & \tau_2 & \nu_4 & \nu_5 & \rangle\!\rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rclccccccccl}
\mu_6^8 & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_2 & \tau_2 & \nu_4 & \nu_5 & & & \rangle\!\rangle \\
\lambda_5^{16,1} & = & \langle\!\langle & \lambda_3^{16} & \bar{\nu}_2 & \bar{\tau}_2 & \bar{\nu}_4 & \lambda_5^{16} & & & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^9 & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_2 & \nu_2 & \nu_4 & \nu_5 & & & \rangle\!\rangle \\
\lambda_6^{17} & = & \langle\!\langle & \bar{\nu}_3 & \tau_1^1 & \tau_1^1 & \lambda_4^{17} & \bar{\nu}_5 & & & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^{10} & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \nu_5 & & \rangle\!\rangle \\
\lambda_3^{18,3} & = & \langle\!\langle & \lambda_3^{18} & & \bar{\nu}_2 & \lambda_2^{18} & \lambda_3^{18,1} & \lambda_3^{18,2} & & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^{11} & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \nu_5 & & \rangle\!\rangle \\
\lambda_2^{19,4} & = & \langle\!\langle & \lambda_2^{19,1} & \bar{\nu}_1 & \tau^1 & \lambda_2^{19} & \lambda_2^{19,2} & \lambda_2^{19,3} & & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^{12} & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \nu_5 & & \rangle\!\rangle \\
\lambda_3^{20,3} & = & \langle\!\langle & \lambda_3^{20} & \tau & \bar{\nu} & \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \lambda_3^{20,1} & \lambda_3^{20,2} & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^{13} & = & \langle\!\langle & \nu_3 & \tau & \nu & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \nu_5 & \rangle\!\rangle \\
\lambda_6^{21} & = & \langle\!\langle & \lambda_3^{21} & \bar{\tau} & \bar{\nu} & \lambda_1^{21} & \bar{\nu}_2 & \lambda_3^{21,1} & \bar{\nu}_5 & \rangle\!\rangle \\
\hline
\mu_6^{14} & = & \langle\!\langle & & & \nu_6 & & & & & \rangle\!\rangle \\
\mu_6^{15} & = & \langle\!\langle & & & \nu_6 & & & & & \rangle\!\rangle \\
\mu_6^{16} & = & \langle\!\langle & & & \nu_6 & & & & & \rangle\!\rangle \\
\mu_6^{17} & = & \langle\!\langle & & & \nu_6 & & & & & \rangle\!\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$
\mu_6^{17} \; = \; \langle\!\langle\, \nu_6 \,\rangle\!\rangle . \tag{8.37}
$$

Подстановка значений из **(8.36)** и **(8.37)** в **(8.32)** приводит нас к результату:

$$
\mu_9^{39} \; = \; \langle\!\langle\, \nu_8 \mu_8^{28} \,\rangle\!\rangle . \tag{8.38}
$$

Теперь осталось раскрыть μ_8^{28}, к чему и приступим.

Начало столбца

$\lambda_8^5 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	$\bar\nu_5$	τ_3^1	τ_3^1	λ_6^5	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{6,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^6	$\bar\nu_5$	$\bar\tau_3^1$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^1 =$	$\langle\langle$	λ_7^6	$\bar\nu_5$	ν_4	τ_3^1	λ_6^5	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{7,2} =$	$\langle\langle$	$\lambda_6^{7,1}$	$\bar\nu_5$	λ_4^7	$\bar\nu_4$	λ_6^7	$\rangle\rangle$
$\mu_8^2 =$	$\langle\langle$	η_7^1	$\bar\nu_5$	ν_4	τ_3^1	η_6^1	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^9 =$	$\langle\langle$		$\lambda_5^{9,2}$		$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^4 =$	$\langle\langle$	η_7^2	$\bar\nu_5$	ν_4	τ_3^1	η_6^1	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{11,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^{11}		$\bar\nu_6$		λ_6^{11}	$\rangle\rangle$
$\mu_8^5 =$	$\langle\langle$	η_7^3	$\bar\nu_5$	ν_4	τ_3^1	η_6^2	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{12,3} =$	$\langle\langle$	$\lambda_5^{12,2}$	λ_5^{12}	λ_4^{12}	$\bar\nu_4$	$\lambda_5^{12,1}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^6 =$	$\langle\langle$	η_7^4	λ_5^{12}	ν_4	τ_3^1	η_6^3	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{13} =$	$\langle\langle$	λ_7^{13}			$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^7 =$	$\langle\langle$	η_7^5	λ_5^{12}	ν_4	τ_3^1	η_6^3	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{14} =$	$\langle\langle$	$\lambda_5^{14,2}$			$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^8 =$	$\langle\langle$	η_7^6	λ_5^{12}	ν_4	τ_3^1	η_6^3	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{16} =$	$\langle\langle$	$\lambda_5^{16,2}$			$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^9 =$	$\langle\langle$	η_7^7	λ_5^{12}	ν_4	τ_3^1	η_6^3	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{18,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^{18}		$\bar\nu_6$		$\lambda_3^{18,3}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{10} =$	$\langle\langle$	η_7^8	λ_5^{12}	ν_4	τ_3^1	η_6^4	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{20,5} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{20,4}$	$\lambda_3^{20,2}$	$\lambda_3^{20,1}$	$\lambda_3^{20,1}$	$\lambda_3^{20,3}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{11} =$	$\langle\langle$	η_7^9	η_5^1	ν_4	η_4^1	η_6^5	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{21,2} =$	$\langle\langle$	$\lambda_6^{21,1}$	$\lambda_3^{21,2}$		$\bar\nu_5$	λ_6^{21}	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{12} =$	$\langle\langle$	η_7^{10}	η_5^2	ν_4	η_4^1	η_6^6	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{23,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^{23}	$\lambda_4^{23,1}$	λ_4^{23}	λ_4^{23}	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{13} =$	$\langle\langle$	η_7^{11}	η_5^3	ν_4	η_4^2	η_6^6	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{25,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^{25}	λ_5^{25}	λ_4^{25}	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{14} =$	$\langle\langle$	η_7^{12}	η_5^4	ν_4	η_4^2	η_6^6	$\rangle\rangle$

Продолжение столбца

$\mu_8^{14} =$	$\langle\langle$	η_7^{12}	η_5^4	ν_4	η_4^2	η_6^6	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{26,2} =$	$\langle\langle$	$\lambda_6^{26,1}$	$\bar\nu_5$	$\lambda_2^{26,2}$	$\bar\nu_4$	λ_6^{26}	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{15} =$	$\langle\langle$	η_7^{13}	η_5^4	ν_4	η_4^2	η_6^7	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{27,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^{27}		$\bar\nu_6$		τ_6	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{16} =$	$\langle\langle$	η_7^{14}	η_5^4	ν_4	η_4^2	η_6^8	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{28,5} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{28,4}$	$\lambda_3^{28,2}$	$\lambda_3^{28,1}$	$\lambda_3^{28,1}$	$\lambda_3^{28,3}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{17} =$	$\langle\langle$	η_7^{15}	η_5^5	ν_4	η_4^3	η_6^9	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{29,2} =$	$\langle\langle$	$\lambda_6^{29,1}$	$\lambda_3^{29,2}$		$\bar\nu_5$	λ_6^{29}	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{18} =$	$\langle\langle$	η_7^{16}	η_5^6	ν_4	η_4^3	η_6^{10}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{30} =$	$\langle\langle$	λ_7^{30}			$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^{19} =$	$\langle\langle$	η_7^{17}	η_5^6	ν_4	η_4^3	η_6^{10}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{31} =$	$\langle\langle$	λ_7^{31}			$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^{20} =$	$\langle\langle$	η_7^{18}	η_5^6	ν_4	η_4^3	η_6^{10}	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{32,1} =$	$\langle\langle$	λ_7^{32}	λ_5^{32}	$\bar\tau_1^3$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{21} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^7	ν_4	η_4^3	η_6^{10}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{33} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	$\bar\nu_5$	τ_4	τ_4	λ_6^{33}	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{22} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^7	ν_4	η_4^4	η_6^{11}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{34} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	$\bar\tau_2^3$	$\bar\tau_2^2$	$\bar\tau_2^2$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{23} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^8	ν_4	η_4^5	η_6^{11}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{35} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	λ_5^{35}	$\bar\nu_4$	λ_4^{35}	$\lambda_5^{35,1}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{24} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^9	ν_4	η_4^6	η_6^{12}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{36} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	$\lambda_4^{36,1}$	λ_4^{36}	λ_4^{36}	$\lambda_4^{36,2}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{25} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^{10}	ν_4	η_4^7	η_6^{13}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{37} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$	λ_5^{37}	$\bar\tau_2^2$	$\bar\nu_4$	$\lambda_5^{37,1}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{26} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^{11}	ν_4	η_4^7	η_6^{14}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{38} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_7$		$\bar\nu_6$		$\lambda_2^{38,4}$	$\rangle\rangle$
$\mu_8^{27} =$	$\langle\langle$	η_7^{19}	η_5^{11}	ν_4	η_4^7	η_6^{15}	$\rangle\rangle$
$\lambda_8^{39} =$	$\langle\langle$	λ_7^{39}			$\bar\nu_7$		$\rangle\rangle$
$\mu_8^{28} =$	$\langle\langle$	η_7^{20}	η_5^{11}	ν_4	η_4^7	η_6^{15}	$\rangle\rangle$

Итог вычислений:

$$\mu_8^{28} = \langle\langle\, \eta_7^{20}\, \eta_5^{11}\ \nu_4\, \eta_4^7\, \eta_6^{15} \,\rangle\rangle. \tag{8.39}$$

Выражение **(8.39)** даёт частичное раскрытие μ_8^{28}, но для полного его раскрытия необходимо раскрыть η_4^7, η_5^{11}, η_6^{15}, η_7^{20}.

Начало столбца

$$
\begin{array}{rclcccccl}
\tau_3^1 & = & \langle\langle & & \bar\nu_2 & & \nu_2 & \tau_3 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,1} & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{20} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^1 & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \nu_2 & \eta_3^1 & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{23} & = & \langle\langle & \bar\nu & \nu & \tau_1 & \bar\nu_2 & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^2 & = & \langle\langle & \tau & \nu & \tau_1 & \nu_2 & \eta_3^1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,1} & = & \langle\langle & & \bar\nu_1 & \nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{28} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^3 & = & \langle\langle & \tau & \nu & \nu_1 & \nu_2 & \eta_3^2 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rclcccccl}
\eta_4^3 & = & \langle\langle & \tau & \nu & \nu_1 & \nu_2 & \eta_3^2 & \rangle\rangle \\
\tau_4 & = & \langle\langle & & & \bar\nu_3 & & \nu_3 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^4 & = & \langle\langle & \tau & \nu & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \rangle\rangle \\
\bar\tau_2^2 & = & \langle\langle & & \bar\nu_1 & \bar\nu_1 & \bar\tau_2 & \bar\tau_2^1 & \rangle\rangle \\
\eta_4^5 & = & \langle\langle & & \nu_4 & & & & \rangle\rangle \\
\eta_4^6 & = & \langle\langle & & \nu_4 & & & & \rangle\rangle \\
\eta_4^7 & = & \langle\langle & & \nu_4 & & & & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\eta_4^7 \;=\; \langle\langle\, \nu_4 \,\rangle\rangle. \tag{8.40}$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rclccccccl}
\lambda_5^{12} & = & \langle\langle & & \bar\nu_2 & & \nu_2 & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,2} & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{20} & \lambda_3^{20,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^1 & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \nu_2 & \lambda_3^{20} & \lambda_3^{20,1} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,2} & = & \langle\langle & \bar\tau & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \bar\nu_2 & \lambda_3^{21} & \lambda_3^{21,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^2 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \nu_2 & \eta_3^1 & \eta_4^1 & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{23,1} & = & \langle\langle & \bar\nu & \nu & \tau_1 & \bar\nu_2 & \bar\nu_3 & \lambda_4^{23} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^3 & = & \langle\langle & & \nu_1 & \lambda_1^{21} & \nu_2 & \eta_3^1 & \lambda_4^2 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{25} & = & \langle\langle & & & \bar\nu_3 & & \tau_2^1 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^4 & = & \langle\langle & & \nu_1 & \lambda_1^{21} & \nu_2 & \eta_3^2 & \eta_4^2 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,2} & = & \langle\langle & & \bar\nu_1 & \nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{28} & \lambda_3^{28,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^5 & = & \langle\langle & & & \nu_3 & & \eta_3^3 & \eta_4^3 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29,2} & = & \langle\langle & & & \lambda_3^{29} & & \lambda_3^{29} & \lambda_3^{29,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^6 & = & \langle\langle & & & \nu_3 & & \eta_3^4 & \eta_4^4 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rclccccl}
\eta_5^6 & = & \langle\langle & \nu_3 & & \eta_3^4 & \eta_4^4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{32} & = & \langle\langle & \bar\tau_1^2 & & \bar\tau_1^2 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^7 & = & \langle\langle & \nu_3 & & \eta_3^5 & \eta_4^4 & \rangle\rangle \\
\bar\tau_2^3 & = & \langle\langle & \bar\tau_2^1 & & \bar\tau_2^1 & \bar\tau_2^2 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^8 & = & \langle\langle & \nu_3 & & \eta_3^6 & \eta_4^5 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{35} & = & \langle\langle & & \bar\nu_4 & & \lambda_4^{35} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^9 & = & \langle\langle & \nu_3 & & \eta_3^6 & \eta_4^6 & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{36,1} & = & \langle\langle & \bar\nu_3 & & \lambda_3^{36} & \lambda_4^{36} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{10} & = & \langle\langle & \nu_3 & & \eta_3^7 & \eta_4^7 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{37} & = & \langle\langle & \bar\tau_2^1 & & \bar\tau_2^1 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{11} & = & \langle\langle & \nu_3 & & \eta_3^8 & \eta_4^7 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\eta_5^{11} \;=\; \langle\langle\, \nu_3\, \eta_3^8\, \eta_4^7 \,\rangle\rangle. \tag{8.41}$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rclccccl}
\lambda_3^{20} & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \bar\nu_2 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21} & = & \langle\langle & \bar\tau & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \bar\nu_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_3^1 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \bar\nu_2 & \rangle\rangle \\
\tau_2^1 & = & \langle\langle & & \bar\nu_1 & \nu_1 & \tau_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_3^2 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \nu_1 & \tau_2 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28} & = & \langle\langle & & \bar\nu_1 & \nu_1 & \bar\nu_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_3^3 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \nu_1 & \tau_2 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rclccccl}
\eta_3^3 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \nu_1 & \tau_2 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29} & = & \langle\langle & & \bar\nu_2 & & \tau_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_3^4 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \nu_1 & \tau_2 & \rangle\rangle \\
\bar\tau_1^2 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \bar\tau_1 & \bar\tau_1^1 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_3^5 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \nu_1 & \eta_2^1 & \rangle\rangle \\
\bar\tau_2^1 & = & \langle\langle & & \nu_1 & \bar\nu_1 & \bar\tau_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_3^6 & = & \langle\langle & & \nu_3 & & & \rangle\rangle \\
\eta_3^7 & = & \langle\langle & & \nu_3 & & & \rangle\rangle \\
\eta_3^8 & = & \langle\langle & & \nu_3 & & & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Начало столбца

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_3^{20,1} &=& \langle\langle\, \tau \quad \bar\nu \quad \bar\nu_1 \quad \bar\nu_2 \quad \lambda_3^{20} \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,1} &=& \langle\langle\, \bar\tau \quad \bar\nu \quad \lambda_1^{21} \bar\nu_2 \quad \lambda_3^{21} \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{1} &=& \langle\langle\, \nu \quad \bar\nu \quad \lambda_1^{21} \bar\nu_2 \quad \rho_3^{1} \,\rangle\rangle \\
\lambda_4^{23} &=& \langle\langle\, \bar\nu \quad \nu \quad \tau_1 \quad \bar\nu_2 \quad \bar\nu_3 \,\rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{2} &=& \langle\langle\, \quad \nu_1 \quad \rho_1 \quad \bar\nu_2 \quad \rho_3^{1} \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,1} &=& \langle\langle\, \quad \bar\nu_1 \quad \nu_1 \quad \bar\nu_2 \quad \lambda_3^{28} \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{3} &=& \langle\langle\, \quad \nu_2 \quad \bar\nu_2 \quad \rho_3^{2} \,\rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rcl}
\eta_4^{3} &=& \langle\langle\, \nu_2 \quad \bar\nu_2 \quad \rho_3^{2} \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{29,1} &=& \langle\langle\, \bar\nu_2 \quad \tau_2 \quad \lambda_3^{29} \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{4} &=& \langle\langle\, \nu_2 \quad \tau_2 \quad \rho_3^{3} \,\rangle\rangle \\
\bar\tau_2^{2} &=& \langle\langle\, \bar\tau_2 \quad \bar\tau_2 \quad \bar\tau_2^{1} \,\rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{5} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \quad \rho_3^{4} \,\rangle\rangle \\
\lambda_4^{35} &=& \langle\langle\, \quad \bar\nu_3 \quad \tau_3 \,\rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{6} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \quad \rho_3^{5} \,\rangle\rangle \\
\lambda_4^{36} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \quad \lambda_3^{36} \rangle\rangle \\
\hline
\eta_4^{7} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \quad \rho_3^{6} \,\rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\eta_4^7 \;=\; \langle\langle\, \nu_3\, \rho_3^6 \,\rangle\rangle. \tag{8.42}$$

Начало столбца

$$\begin{array}{rcl}
\lambda_3^{20} &=& \langle\langle\, \tau \quad \bar\nu \quad \bar\nu_1 \quad \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{21} &=& \langle\langle\, \bar\tau \quad \bar\nu \quad \lambda_1^{21} \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\
\hline
\rho_3^{1} &=& \langle\langle\, \quad \nu_1 \quad \lambda_1^{21} \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{28} &=& \langle\langle\, \quad \bar\nu_1 \quad \nu_1 \quad \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\
\hline
\rho_3^{2} &=& \langle\langle\, \quad \nu_2 \quad\quad \bar\nu_2 \,\rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rcl}
\rho_3^{2} &=& \langle\langle\, \quad \nu_2 \quad\quad \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{29} &=& \langle\langle\, \quad \bar\nu_2 \quad\quad \tau_2 \,\rangle\rangle \\
\hline
\rho_3^{3} &=& \langle\langle\, \quad \nu_2 \quad\quad \tau_2 \,\rangle\rangle \\
\bar\tau_2^{1} &=& \langle\langle\, \quad \bar\tau_2 \quad\quad \bar\tau_2 \,\rangle\rangle \\
\hline
\rho_3^{4} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \,\rangle\rangle \\
\rho_3^{5} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \,\rangle\rangle \\
\rho_3^{6} &=& \langle\langle\, \quad \nu_3 \,\rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\rho_3^6 \;=\; \langle\langle\, \nu_3 \,\rangle\rangle. \tag{8.43}$$

Подстановка **(8.43)** в *правую* часть **(8.42)**, то есть вместо ρ_3^6, а затем подстановка значений из **(8.42)** в **(8.41)** позволяет заключить:

$$\eta_5^{11} \;=\; \langle\langle\, \nu_5 \,\rangle\rangle. \tag{8.44}$$

Начало столбца

$\lambda_6^5 =$	$\langle\langle$			$\bar\nu_5$	τ_3^2	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^7 =$	$\langle\langle$			$\bar\nu_5$	λ_5^7	$\rangle\rangle$
$\eta_6^1 =$	$\langle\langle$			$\bar\nu_5$	ρ_5^1	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{11} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_3$	ν_3	$\bar\nu_5$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^2 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_3$	ν_3	ρ_5^1	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{12,1} =$	$\langle\langle$	λ_4^{12}	$\bar\nu_4$		λ_5^{12}	$\rangle\rangle$
$\eta_6^3 =$	$\langle\langle$	λ_4^{12}	$\bar\nu_3$	ν_3	ρ_5^2	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{18,3} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{18,1}$	λ_3^{18}	λ_3^{18}	$\lambda_3^{18,2}$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^4 =$	$\langle\langle$	ρ_4^1	λ_3^{18}	ν_3	ρ_5^3	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{20,3} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{20,1}$	λ_3^{20}	λ_3^{20}	$\lambda_3^{20,2}$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^5 =$	$\langle\langle$	ρ_4^2	ρ_3^1	ν_3	ρ_5^4	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{21} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{21,1}$	λ_3^{21}	λ_3^{21}	$\bar\nu_5$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^6 =$	$\langle\langle$	ρ_4^3	ρ_3^2	ν_3	ρ_5^4	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{26} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_5$		λ_5^{26}	$\rangle\rangle$
$\eta_6^7 =$	$\langle\langle$	ρ_4^3	ρ_3^2	ν_3	ρ_5^5	$\rangle\rangle$
$\tau_6 =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_5$		ν_5	$\rangle\rangle$
$\eta_6^8 =$	$\langle\langle$	ρ_4^3	ρ_3^2	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$

Продолжение столбца

$\eta_6^8 =$	$\langle\langle$	ρ_4^3	ρ_3^2	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{28,3} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{28,1}$	λ_3^{28}	λ_3^{28}	$\lambda_3^{28,2}$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^9 =$	$\langle\langle$	ρ_4^4	ρ_3^3	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{29} =$	$\langle\langle$	$\lambda_3^{29,1}$	λ_3^{29}	λ_3^{29}	$\bar\nu_5$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^{10} =$	$\langle\langle$	ρ_4^5	ρ_3^4	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{33} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_5$		τ_4^1	$\rangle\rangle$
$\eta_6^{11} =$	$\langle\langle$	ρ_4^5	ρ_3^4	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{35,1} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_3$	τ_3	λ_5^{35}	$\rangle\rangle$
$\eta_6^{12} =$	$\langle\langle$	ρ_4^5	ρ_3^4	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_4^{36,2} =$	$\langle\langle$	λ_4^{36}	$\bar\nu_3$	λ_3^{36}	$\lambda_4^{36,1}$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^{13} =$	$\langle\langle$	ρ_4^6	ρ_3^4	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{37,1} =$	$\langle\langle$	$\bar\tau_2^2$		$\bar\nu_4$	λ_5^{37}	$\rangle\rangle$
$\eta_6^{14} =$	$\langle\langle$	ρ_4^7	ρ_3^4	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$
$\lambda_2^{38,4} =$	$\langle\langle$	$\lambda_2^{38,2}$	$\lambda_2^{38,1}$	$\lambda_2^{38,1}$	$\lambda_2^{38,3}$	$\rangle\rangle$
$\eta_6^{15} =$	$\langle\langle$	ρ_4^8	ρ_3^5	ν_3	ν_5	$\rangle\rangle$

Итог вычислений:

$$\eta_6^{15} \;=\; \langle\langle\, \rho_4^8\, \rho_3^5\, \nu_3\, \nu_5 \,\rangle\rangle. \tag{8.45}$$

Начало столбца

$\lambda_3^{18} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_2$	$\bar\nu_1$	τ_1	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{20} =$	$\langle\langle$	λ_2^{20}		$\bar\nu_2$	$\rangle\rangle$
$\rho_3^1 =$	$\langle\langle$	λ_2^{21}	$\bar\nu_1$	τ_1	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{21} =$	$\langle\langle$	$\lambda_1^{21,1}$		$\bar\nu_2$	$\rangle\rangle$
$\rho_3^2 =$	$\langle\langle$	ρ_2^1	$\bar\nu_1$	τ_1	$\rangle\rangle$

Продолжение столбца

$\rho_3^2 =$	$\langle\langle$	ρ_2^1	$\bar\nu_1$	τ_1	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{28} =$	$\langle\langle$	τ_2		$\bar\nu_2$	$\rangle\rangle$
$\rho_3^3 =$	$\langle\langle$	ρ_2^2	$\bar\nu_1$	τ_1	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{29} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_2$	$\bar\nu_1$	ν_1	$\rangle\rangle$
$\rho_3^4 =$	$\langle\langle$	ρ_2^2	$\bar\nu_1$	ν_1	$\rangle\rangle$
$\lambda_2^{38,1} =$	$\langle\langle$	λ_2^{38}	τ_1	$\bar\nu_1$	$\rangle\rangle$
$\rho_3^5 =$	$\langle\langle$	ρ_2^3	τ_1	ν_1	$\rangle\rangle$

Итог вычислений:

$$\rho_3^5 \;=\; \langle\langle\, \rho_2^3\, \tau_1\, \nu_1 \,\rangle\rangle \tag{8.46}$$

Начало столбца **Продолжение столбца**

$$
\begin{array}{rcl lll l}
\lambda_2^{20} & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_1^{21,1} & = & \langle\langle & \bar\tau & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_2^1 & = & \langle\langle & & \bar\tau_1 & \lambda_1^{21} & \rangle\rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl ll l}
\rho_2^1 & = & \langle\langle & \bar\tau_1 & \lambda_1^{21} & \rangle\rangle \\
\tau_2 & = & \langle\langle & \bar\nu_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_2^2 & = & \langle\langle & \bar\tau_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_2^{38} & = & \langle\langle & \tau_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_2^3 & = & \langle\langle & \nu_2 & & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\rho_2^3 = \langle\langle\, \nu_2 \,\rangle\rangle \tag{8.47}$$

Уже на этапе получения результата **(8.46)** (то есть до определения ρ_4^8 из **(8.45)** и ρ_2^3, которое раскрыто в **(8.47)**), можно сделать заключение: *таблица* **33 выполнима**, поскольку полученное значение τ_1 в **(8.46)** в дальнейших конъюнкциях не изменится (это результат выполнения действий *"столбиком"*).

Однако мы продолжим выкладки по раскрытию ρ_4^8 из **(8.45)** и η_7^{20} из **(8.39)** с тем, чтобы определить: имеются ли ещё выполняющие наборы. В этих выкладках мы вновь (повторно) будем определять и использовать обозначения через $\mu_j^{k,i}$, $\eta_j^{k,i}$, $\rho_j^{k,i}$, при этом будем соблюдать осторожность, указывая на вхождение определяемого обозначения в изучаемое выражение.

Начало столбца **Продолжение столбца**

$$
\begin{array}{rcl lllll l}
\lambda_4^{12} & = & \langle\langle & \bar\nu_2 & & \nu_2 & & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{18,1} & = & \langle\langle & \bar\nu_2 & & \lambda_2^{18} & & \lambda_3^{18} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^1 & = & \langle\langle & \bar\nu_2 & & \nu_2 & & \lambda_3^{18} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,1} & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{20} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^2 & = & \langle\langle & \tau & \bar\nu & \bar\nu_1 & \nu_2 & \mu_3^1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,1} & = & \langle\langle & \bar\tau & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \bar\nu_2 & \lambda_3^{21} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^3 & = & \langle\langle & \nu & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \nu_2 & \mu_3^2 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,1} & = & \langle\langle & & \bar\nu_1 & \nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{28} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^4 & = & \langle\langle & & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \mu_3^3 & \rangle\rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl llll l}
\rho_4^4 & = & \langle\langle & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \mu_3^3 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29,1} & = & \langle\langle & & \bar\nu_2 & \tau_2 & \lambda_3^{29} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^5 & = & \langle\langle & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \mu_3^4 & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{36} & = & \langle\langle & & \bar\nu_3 & & \lambda_3^{36} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^6 & = & \langle\langle & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \mu_3^5 & \rangle\rangle \\
\bar\tau_2^2 & = & \langle\langle & \nu_1 & \bar\nu_1 & \tau_2 & \bar\tau_2^1 & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^7 & = & \langle\langle & & \nu_3 & & \mu_3^6 & \rangle\rangle \\
\lambda_2^{38,2} & = & \langle\langle & & \lambda_2^{28,1} & & \lambda_2^{28,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\rho_4^8 & = & \langle\langle & \nu_3 & & \mu_3^7 & & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\rho_4^8 = \langle\langle\, \nu_3\, \mu_3^7 \,\rangle\rangle. \tag{8.48}$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcllll}
\lambda_3^{18} & = & \langle\langle\, \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_1 & \tau_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20} & = & \langle\langle\, \lambda_2^{20} & & \bar{\nu}_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_3^{1} & = & \langle\langle\, \lambda_2^{20} & \bar{\nu}_1 & \tau_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21} & = & \langle\langle\, \lambda_1^{21,1} & & \bar{\nu}_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_3^{2} & = & \langle\langle\, \mu_2^{1} & \bar{\nu}_1 & \tau_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28} & = & \langle\langle\, \tau_2 & & \bar{\nu}_2 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_3^{3} & = & \langle\langle\, \mu_2^{2} & \bar{\nu}_1 & \tau_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29} & = & \langle\langle\, \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_3^{4} & = & \langle\langle\, \mu_2^{2} & \bar{\nu}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcllll}
\mu_3^{4} & = & \langle\langle\, \mu_2^{2} & \bar{\nu}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{36} & = & \langle\langle\, \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_3^{5} & = & \langle\langle\, \mu_2^{2} & \tau_2 & \rangle\rangle & \\
\bar{\tau}_2^{1} & = & \langle\langle\, \bar{\tau}_2 & \bar{\tau}_2 & \rangle\rangle & \\
\hline
\mu_3^{6} & = & \langle\langle\, \mu_2^{3} & \nu_2 & \rangle\rangle & \\
\lambda_2^{28,1} & = & \langle\langle\, \lambda_2^{28} & \lambda_2^{28} & \rangle\rangle & \\
\hline
\mu_3^{7} & = & \langle\langle\, \mu_2^{4} & \nu_2 & \rangle\rangle &
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$
\mu_3^7 \;=\; \langle\langle\, \mu_2^4\, \nu_2 \,\rangle\rangle. \tag{8.49}
$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcllll}
\lambda_2^{20} & = & \langle\langle\, \tau & \bar{\nu} & \bar{\nu}_1 & \rangle\rangle \\
\lambda_1^{21,1} & = & \langle\langle\, \bar{\tau} & \bar{\nu} & \lambda_1^{21} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_2^{1} & = & \langle\langle & \bar{\tau}_1 & \lambda_1^{21} & \rangle\rangle \\
\tau_2 & = & \langle\langle & \bar{\nu}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_2^{2} & = & \langle\langle & \bar{\tau}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcllll}
\mu_2^{2} & = & \langle\langle\, \bar{\tau}_1 & \nu_1 & \rangle\rangle \\
\bar{\tau}_2 & = & \langle\langle\, \nu_1 & \bar{\nu}_1 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_2^{3} & = & \langle\langle\, \nu_2 & \rangle\rangle & \\
\mu_2^{4} & = & \langle\langle\, \nu_2 & \rangle\rangle &
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$
\mu_2^4 \;=\; \langle\langle\, \nu_2 \,\rangle\rangle. \tag{8.50}
$$

Постановка результата **(8.50)** в **(8.49)**, а результата **(8.49)** в **(8.48)** даёт:

$$
\rho_4^8 \;=\; \langle\langle\, \nu_4 \,\rangle\rangle. \tag{8.51}
$$

Начало столбца

$\lambda_7^6 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$	ν_2	$\bar\nu_2$	$\bar\tau_3$	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{7,1} =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$		$\bar\nu_3$	τ_3	$\bar\nu_4$	λ_6^7	$\rangle\rangle$
$\eta_7^1 =$	$\langle\langle$	$\bar\nu_5$		$\bar\tau_3$	ν_3	$\bar\nu_4$	λ_6^7	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{9,2} =$	$\langle\langle$	λ_5^9		$\bar\nu_4$		$\bar\tau_4$	$\lambda_5^{9,1}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^2 =$	$\langle\langle$	λ_5^9		$\bar\tau_3$	ν_3	$\bar\tau_4$	μ_6^1	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{11} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_6$				λ_6^{11}	$\rangle\rangle$
$\eta_7^3 =$	$\langle\langle$	λ_5^9		$\bar\tau_3$	ν_3	$\bar\tau_4$	μ_6^2	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{12,2} =$	$\langle\langle$		λ_5^{12}	τ_3	$\bar\nu_3$	$\bar\nu_4$	$\lambda_5^{12,1}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^4 =$	$\langle\langle$	μ_5^1		ν_4		$\bar\tau_4$	μ_6^3	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{13} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_6$				$\lambda_5^{13,1}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^5 =$	$\langle\langle$	μ_5^1		ν_4		$\bar\tau_4$	μ_6^4	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{14,2} =$	$\langle\langle$		λ_5^{14}		λ_4^{14}	$\bar\nu_4$	$\lambda_5^{14,1}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^6 =$	$\langle\langle$	μ_5^2		ν_4		$\bar\tau_4$	μ_6^5	$\rangle\rangle$
$\lambda_5^{16,2} =$	$\langle\langle$		λ_5^{16}		$\lambda_3^{16,1}$	$\bar\nu_4$	$\lambda_5^{16,1}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^7 =$	$\langle\langle$	μ_5^3		ν_4		$\bar\tau_4$	μ_6^6	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{18} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_6$				$\lambda_3^{18,3}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^8 =$	$\langle\langle$	μ_5^3		ν_4		$\bar\tau_4$	μ_6^7	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{20,4} =$	$\langle\langle$		$\lambda_3^{20,2}$		$\lambda_3^{20,1}$	$\lambda_3^{20,1}$	$\lambda_3^{20,3}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^9 =$	$\langle\langle$	μ_5^4		ν_4		μ_4^1	μ_6^8	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{21,1} =$	$\langle\langle$		$\lambda_3^{21,2}$		$\bar\nu_5$		λ_6^{21}	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{10} =$	$\langle\langle$	μ_5^5		ν_4		μ_4^1	μ_6^9	$\rangle\rangle$

Продолжение столбца

$\eta_7^{10} =$	$\langle\langle$	μ_5^5		ν_4		μ_4^1	μ_6^9	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{23} =$	$\langle\langle$		$\lambda_4^{23,1}$		λ_4^{23}	λ_4^{23}	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{11} =$	$\langle\langle$	μ_5^6		ν_4		μ_4^2	μ_6^9	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{25} =$	$\langle\langle$		λ_5^{25}		λ_4^{25}	$\bar\nu_4$	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{12} =$	$\langle\langle$	μ_5^7		ν_4		μ_4^2	μ_6^9	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{26,1} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_5$		$\lambda_2^{26,2}$	$\bar\nu_4$	λ_6^{26}	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{13} =$	$\langle\langle$	μ_5^7		ν_4		μ_4^2	μ_6^{10}	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{27} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_6$				τ_6	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{14} =$	$\langle\langle$	μ_5^7		ν_4		μ_4^2	μ_6^{11}	$\rangle\rangle$
$\lambda_3^{28,4} =$	$\langle\langle$		$\lambda_3^{28,2}$		$\lambda_3^{28,1}$	$\lambda_3^{28,1}$	$\lambda_3^{28,3}$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{15} =$	$\langle\langle$	μ_5^8		ν_4		μ_4^3	μ_6^{12}	$\rangle\rangle$
$\lambda_6^{29,1} =$	$\langle\langle$		$\lambda_3^{29,2}$		$\bar\nu_5$		λ_6^{29}	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{16} =$	$\langle\langle$	μ_5^9		ν_4		μ_4^3	μ_6^{13}	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{30} =$	$\langle\langle$		τ_5		$\bar\nu_4$	ν_4	$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{17} =$	$\langle\langle$	μ_5^{10}		ν_5			μ_6^{13}	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{31} =$	$\langle\langle$		$\bar\tau_3^2$	$\bar\tau_3^2$			$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{18} =$	$\langle\langle$	μ_5^{11}		ν_5			μ_6^{13}	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{32} =$	$\langle\langle$		λ_5^{32}	λ_5^{32}			$\bar\nu_6$	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{19} =$	$\langle\langle$	μ_5^{12}		ν_5			μ_6^{13}	$\rangle\rangle$
$\lambda_7^{39} =$	$\langle\langle$		$\bar\nu_6$				λ_6^{39}	$\rangle\rangle$
$\eta_7^{20} =$	$\langle\langle$	μ_5^{12}		ν_5			μ_6^{14}	$\rangle\rangle$

Итог вычислений:

$$\eta_7^{20} = \langle\langle\, \mu_5^{12}\, \nu_5\, \mu_6^{14} \,\rangle\rangle. \tag{8.52}$$

Далее, развернём μ_5^{12} и μ_6^{14} из **(8.52)**. Начнём с μ_5^{12}.

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcllll}
\lambda_5^{9} & = & \langle\langle\, \bar\nu_4 & \nu_3 & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{12} & = & \langle\langle\, \lambda_4^{12} & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{1} & = & \langle\langle\, \lambda_4^{12} & \nu_3 & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{14} & = & \langle\langle\, \lambda_4^{14} & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{2} & = & \langle\langle\, \mu_4^{1} & \nu_3 & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{16} & = & \langle\langle\, \lambda_3^{16,1} & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{3} & = & \langle\langle\, \mu_4^{2} & \nu_3 & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,2} & = & \langle\langle\, \lambda_3^{20,1} & \lambda_3^{20} & \lambda_3^{20} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{4} & = & \langle\langle\, \mu_4^{3} & \nu_3 & \lambda_3^{20} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,2} & = & \langle\langle\, \lambda_3^{21,1} & \lambda_3^{21} & \lambda_3^{21} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{5} & = & \langle\langle\, \mu_4^{4} & \nu_3 & \mu_3^{1} & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{23,1} & = & \langle\langle\, \lambda_4^{23} & \lambda_3^{23} & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{6} & = & \langle\langle\, \mu_4^{5} & \nu_3 & \mu_3^{1} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcllll}
\mu_5^{6} & = & \langle\langle\, \mu_4^{5} & \nu_3 & \mu_3^{1} & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{25} & = & \langle\langle\, \lambda_4^{25} & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{7} & = & \langle\langle\, \mu_4^{6} & \nu_3 & \mu_3^{1} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,2} & = & \langle\langle\, \lambda_3^{28,1} & \lambda_3^{28} & \lambda_3^{28} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{8} & = & \langle\langle\, \mu_4^{7} & \nu_3 & \mu_3^{2} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29,2} & = & \langle\langle\, \lambda_3^{29,1} & \lambda_3^{29} & \lambda_3^{29} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{9} & = & \langle\langle\, \mu_4^{8} & \nu_3 & \mu_3^{3} & \rangle\rangle \\
\tau_5 & = & \langle\langle\, & \bar\nu_4 & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{10} & = & \langle\langle\, \mu_4^{8} & & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\bar\tau_3^{2} & = & \langle\langle\, \bar\tau_3^{1} & & \bar\tau_3^{1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{11} & = & \langle\langle\, \mu_4^{9} & & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{32} & = & \langle\langle\, \bar\tau_1^{3} & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^{12} & = & \langle\langle\, \mu_4^{10} & & \nu_4 & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\mu_5^{12} = \langle\langle\, \mu_4^{10}\, \nu_4 \,\rangle\rangle. \tag{8.53}$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcllllll}
\lambda_4^{12} & = & \langle\langle\, \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\nu_3 & & & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{14} & = & \langle\langle\, \bar\tau_2 & \bar\tau_2 & \bar\nu_3 & & & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{1} & = & \langle\langle\, \bar\tau_2 & \nu_2 & \bar\nu_3 & & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{16,1} & = & \langle\langle\, \bar\nu_2 & \bar\tau_2 & \lambda_3^{16} & & & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{2} & = & \langle\langle\, \bar\tau_2 & \nu_2 & \lambda_3^{16} & & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,1} & = & \langle\langle\, \lambda_1^{20} & \bar\nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{20} & & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{3} & = & \langle\langle\, \nu_1 & \bar\nu_1 & \nu_2 & \mu_3^{1} & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,1} & = & \langle\langle\, \lambda_1^{21} & \bar\tau & \bar\nu & \bar\nu_2 & \lambda_3^{21} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{4} & = & \langle\langle\, \nu_1 & \bar\tau & \bar\nu & \nu_2 & \mu_3^{2} & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{23} & = & \langle\langle\, \tau_1 & \bar\nu & \nu & \bar\nu_2 & \bar\nu_3 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{5} & = & \langle\langle\, \nu_1 & \bar\tau & \nu & \nu_2 & \mu_3^{2} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcllllll}
\mu_4^{5} & = & \langle\langle\, \nu_1 & \bar\tau & \nu & \nu_2 & \mu_3^{2} & \rangle\rangle \\
\lambda_4^{25} & = & \langle\langle\, & & \bar\nu_3 & & \tau_2^{1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{6} & = & \langle\langle\, \nu_1 & \bar\tau & \nu & \nu_2 & \mu_3^{3} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,1} & = & \langle\langle\, \bar\nu_1 & \nu_1 & & \bar\nu_2 & \lambda_3^{28} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{7} & = & \langle\langle\, & & \nu_3 & & \mu_3^{4} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29,1} & = & \langle\langle\, & & \lambda_3^{29} & & \lambda_3^{29} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{8} & = & \langle\langle\, & & \nu_3 & & \mu_3^{5} & \rangle\rangle \\
\bar\tau_3^{1} & = & \langle\langle\, & & \bar\tau_3 & & \bar\tau_3 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{9} & = & \langle\langle\, & & \nu_3 & & \mu_3^{6} & \rangle\rangle \\
\bar\tau_1^{3} & = & \langle\langle\, & & \bar\tau_1^{2} & & \bar\tau_1^{2} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_4^{10} & = & \langle\langle\, & & \nu_3 & & \mu_3^{7} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\mu_4^{10} = \langle\langle\, \nu_3\, \mu_3^{7} \,\rangle\rangle. \tag{8.54}$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda_3^{16} = & \langle\langle\, \bar\nu_2 & \nu_1 \quad \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{20} = & \langle\langle\, \lambda_2^{20} & \quad\;\; \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\ \hline
\mu_3^{1} = & \langle\langle\, \lambda_2^{20} & \nu_1 \quad \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{21} = & \langle\langle\, \lambda_1^{21,1} & \quad\;\; \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\ \hline
\mu_3^{2} = & \langle\langle\, \mu_2^{1} & \nu_1 \quad \bar\nu_1 \,\rangle\rangle \\
\tau_2^{1} = & \langle\langle\, \tau_2 & \bar\nu_1 \quad \nu_1 \,\rangle\rangle \\ \hline
\mu_3^{3} = & \langle\langle\, \mu_2^{2} & \quad\;\; \nu_2 \,\rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcl}
\mu_3^{3} = & \langle\langle\, \mu_2^{2} & \nu_2 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{28} = & \langle\langle\, \tau_2 & \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\ \hline
\mu_3^{4} = & \langle\langle\, \mu_2^{3} & \nu_2 \,\rangle\rangle \\
\lambda_3^{29} = & \langle\langle\, \bar\nu_2 & \tau_2 \,\rangle\rangle \\ \hline
\mu_3^{5} = & \langle\langle\, \mu_2^{3} & \nu_2 \,\rangle\rangle \\
\bar\tau_3 = & \langle\langle\, \nu_2 & \bar\nu_2 \,\rangle\rangle \\ \hline
\mu_3^{6} = & \langle\langle\, & \nu_3 \,\rangle\rangle \\
\mu_3^{7} = & \langle\langle\, & \nu_3 \,\rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\mu_3^7 = \langle\langle\, \nu_3 \,\rangle\rangle. \tag{8.55}$$

Итог равенств **(8.53)**, **(8.54)** и **(8.55)** — это равенство:

$$\mu_5^{12} = \langle\langle\, \nu_5 \,\rangle\rangle. \tag{8.56}$$

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\lambda_6^{7} = & \langle\langle & \bar\nu_5 & \bar\nu_3 & \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{9,1} = & \langle\langle & \lambda_5^{9} & & \bar\nu_4 & & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{1} = & \langle\langle & \lambda_5^{9} & \bar\nu_3 & \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{11} = & \langle\langle & \lambda_5^{11} & & & \bar\nu_5 & & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{2} = & \langle\langle & \eta_5^{1} & \bar\nu_3 & \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{12,1} = & \langle\langle & \lambda_5^{12} & \tau_3 & \bar\nu_3 & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{3} = & \langle\langle & \eta_5^{2} & \tau_3 & \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{13,1} = & \langle\langle & \lambda_5^{13} & \tau_2^{1} & \tau_2 & \tau_2 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{4} = & \langle\langle & \eta_5^{3} & \eta_3^{1} & \tau_2 & \nu_2 & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{14,1} = & \langle\langle & \lambda_5^{14} & \bar\tau_2^{1} & & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{5} = & \langle\langle & \eta_5^{4} & \eta_3^{2} & \tau_2 & \nu_2 & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{16,1} = & \langle\langle & \lambda_5^{16} & \lambda_3^{16} & \bar\nu_2 & \bar\tau_2 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{6} = & \langle\langle & \eta_5^{5} & \eta_3^{3} & \tau_2 & \nu_2 & \bar\tau_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{18,3} = & \langle\langle & \lambda_3^{18,2} & \lambda_3^{18} & \bar\nu_2 & \lambda_2^{18} & \lambda_3^{18,1} & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{7} = & \langle\langle & \eta_5^{6} & \eta_3^{4} & \tau_2 & \nu_2 & \eta_4^{1} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\mu_6^{7} = & \langle\langle & \eta_5^{6} & \eta_3^{4} & \tau_2 & \nu_2 & \eta_4^{1} & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,3} = & \langle\langle & \lambda_3^{20,2} & \lambda_3^{20} & \lambda_2^{20} & \bar\nu_2 & \lambda_3^{20,1} & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{8} = & \langle\langle & \eta_5^{7} & \eta_3^{5} & \eta_2^{1} & \nu_2 & \eta_4^{2} & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{21} = & \langle\langle & \lambda_3^{21,2} & & & \bar\nu_5 & & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{9} = & \langle\langle & \eta_5^{8} & \eta_3^{5} & \eta_2^{1} & \nu_2 & \eta_4^{2} & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{26} = & \langle\langle & \bar\nu_5 & \lambda_2^{26,1} & \lambda_2^{26} \; \lambda_2^{26} & & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{10} = & \langle\langle & \eta_5^{8} & \eta_3^{6} & \eta_2^{2} & \nu_2 & \eta_4^{2} & \rangle\rangle \\
\tau_6 = & \langle\langle & \bar\nu_5 & & & \nu_5 & & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{11} = & \langle\langle & \eta_5^{8} & & & \nu_5 & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,3} = & \langle\langle & \lambda_3^{28,2} & & & \lambda_3^{28,2} & & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{12} = & \langle\langle & \eta_5^{9} & & & \nu_5 & & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{29} = & \langle\langle & \lambda_3^{29,2} & & & \bar\nu_5 & & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{13} = & \langle\langle & \eta_5^{10} & & & \nu_5 & & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{39} = & \langle\langle & \bar\nu_5 & & & \tau_4^{1} & & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_6^{14} = & \langle\langle & \eta_5^{10} & & & \nu_5 & & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$\mu_6^{14} \;=\; \langle\langle\, \eta_5^{10}\, \nu_5 \,\rangle\rangle. \tag{8.57}$$

Начало столбца

$$\begin{array}{rcllllll}
\lambda_5^{9} &=& \langle\langle\, \bar\nu_4 & \bar\tau_4 & & & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{11} &=& \langle\langle\, \bar\nu_4 & \tau_4 & & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{1} &=& \langle\langle\, \bar\nu_4 & \nu_4 & & & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{12} &=& \langle\langle\, \tau_3 & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{2} &=& \langle\langle\, \tau_3 & \bar\nu_3 & \nu_4 & & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{13} &=& \langle\langle\, \tau_2^1 & \tau_2^1 & \bar\nu_4 & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{3} &=& \langle\langle\, \tau_2 & \nu_2 & \tau_2^1 & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{14} &=& \langle\langle\, \bar\tau_2 & \bar\tau_2 & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{4} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \tau_2^1 & \nu_4 & & \rangle\rangle \\
\lambda_5^{16} &=& \langle\langle\, \lambda_3^{16} & \lambda_3^{16} & \bar\nu_4 & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{5} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \tau_2 & \nu_2 & \nu_4 & \rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rclllllll}
\eta_5^{5} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \tau_2 & \nu_2 & \nu_4 & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{18,2} &=& \langle\langle\, \lambda_3^{18} & \bar\nu_2 & \lambda_2^{18} & \lambda_3^{18,1} & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{6} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \tau_2 & \nu_2 & \nu_4 & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,2} &=& \langle\langle\, \lambda_3^{20} & \lambda_2^{20} & \lambda_2^{20} & \lambda_3^{20,1} & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{7} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \lambda_1^{20} & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,2} &=& \langle\langle\, \lambda_3^{21} & \lambda_1^{21} & \lambda_1^{21} & \bar\nu_2 & \lambda_3^{21,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{8} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{28,2} &=& \langle\langle\, \lambda_3^{28} & \bar\nu_1 & \nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{28,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{9} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{29,2} &=& \langle\langle\, \lambda_3^{29} & \bar\nu_2 & \tau_2 & \lambda_3^{29,1} & & \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{10} &=& \langle\langle\, \nu_3 & \bar\tau_1 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_4 & \rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\eta_5^{10} \;=\; \langle\langle\, \nu_3\, \bar\tau_1\, \nu_1\, \nu_2\, \nu_4 \,\rangle\rangle. \tag{8.58}$$

В результате видим, что имеются ещё *два* выполняющих набора, которые определяются $\bar\tau_1$ из **(8.58)**.

Теперь, если подвести окончательный итог нашим выкладкам, то следует начать с **(8.38)**, подставив в него **(8.39)**, в котором учтены **(8.40)** и **(8.44)**:

$$\mu_9^{39} \;=\; \langle\langle\, \nu_8\, \eta_7^{20}\, \nu_6\, \eta_6^{15} \,\rangle\rangle. \tag{8.59}$$

Если учесть **(8.46)**, **(8.47)** и **(8.51)**, то **(8.45)** получит вид:

$$\eta_6^{15} \;=\; \langle\langle\, \nu_4\, \nu_2\, \tau_1\, \nu_1\, \nu_3\, \nu_5 \,\rangle\rangle, \tag{8.60}$$

а учет равенств **(8.56)**, **(8.57)** и **(8.58)** позволяет записать **(8.52)** так:

$$\eta_7^{20} \;=\; \langle\langle\, \nu_6\, \nu_3\, \bar\tau_1\, \nu_1\, \nu_2\, \nu_4\, \nu_5 \,\rangle\rangle. \tag{8.61}$$

Подстановка **(8.60)** и **(8.61)** в **(8.59)** даёт окончательный результат:

$$\mu_9^{39} \;=\; \langle\langle\, \nu_8\, \nu_6\, \nu_3\, \bar\tau_1\, \nu_1\, \nu_2\, \nu_4\, \nu_5\, \nu_6\, \nu_4\, \nu_2\, \tau_1\, \nu_1\, \nu_3\, \nu_5 \,\rangle\rangle. \tag{8.62}$$

По результату **(8.62)** мы можем сделать заключение не только о том, что имеются 4 выполняющих набора, но и указать их номера: 658; 659; 936 и 937. В самом деле:

$$2^9 + 2^7 + 2^4 + 2 = 512 + 128 + 16 + 2 = 658;$$

$$1023 - (2^6 + 2^4 + 2^2 + 2) = 1023 - 86 = 937.$$

8.13 Некоторые уточнения в сегментации и исчислении

За уточнениями, о которых пойдёт речь ниже в сегментации, следует следить по *таблице* **33** в вариантах с номерами $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0$ и 7^0 (иных вариантов в *таблице* **33** нет).

Сущность уточнения в сегментации заключается в том, что (при выполнении анализа) выход на *исход* **1** ещё не означает завершение выделения операторов в сегмент: выход на *исход* **1** означает лишь присоединение к сегменту всех операторов, имеющих начало в столбце с *исходом* **1**, а сам исход в анализируемом столбце (после условного исключения указанных операторов) выбирается по общему правилу.

Например, в *варианте* 1^0 в *столбце* 3 имеется *исход* **1**, который вызван операторами 5 и 6 в нумерации N^0, но после присоединения операторов 5, 6 и 7 к *сегменту* **1** выбор указателя (в *столбце* 3) по общему правилу приводит к указателю T.

Замечание 33. Обращаем внимание, что указанное уточнение приводит к естественному включению в сегмент некоторых операторов, которые, строго говоря, безосновательно в него не включались (что нарушало установленные ранее требования по сегментации).

Второе уточнение заключается в том, что после того, как выделен i–ый сегмент (он состоит из операторов, получивших в служебном столбце i–го варианта указатели со $*$), следующий $(i+1)$–ый сегмент выделяется аналогично i–ому, но из таблицы с удалёнными операторами, которые включены в выделенные сегменты.

Третье уточнение касается исчисления, которое строго выполняется посегментно. Посегментное выполнение конъюнкций позволяет строго придерживаться декатенации, диктуемой **III** служебной строкой каждого варианта, так как она является общей для всех операторов каждого сегмента.

Итак, выполнение конъюнкций над операторами каждого сегмента приводит нас к следующим ниже выкладкам.

В уточнённой сегментации *первый* сегмент содержит, кроме операторов 1 — 7, ещё и операторы $37, 25, 36, 40$ и 24. Оператор μ_9^6 и подоператор μ_7^2, которые выше привели к результату **(8.31)**, остаются здесь такими же и мы продолжаем выкладки для *первого* сегмента так:

Начало столбца

$$\begin{array}{rcl}
\mu_9^6 = & \langle\langle\, \mu_7^2 \quad \nu_7 \quad \mu_8^2 & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{37,1} = & \langle\langle\, \bar\nu_7 \quad \lambda_5^{37,2}\lambda_8^{37} & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^7 = & \langle\langle\, \mu_7^2 \quad \nu_7 \quad \mu_8^3 & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{25,2} = & \langle\langle\, \lambda_7^{25} \quad \lambda_7^{25} \quad \lambda_7^{25,1} & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^8 = & \langle\langle\, \mu_7^3 \quad \nu_7 \quad \mu_8^4 & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{36,1} = & \langle\langle\, \bar\nu_7 \quad \lambda_4^{36,3}\lambda_8^{35} & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^9 = & \langle\langle\, \mu_7^3 \quad \nu_7 \quad \mu_8^5 & \rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rcl}
\mu_9^9 = & \langle\langle\, \mu_7^3 \quad \nu_7 \quad \mu_8^5 & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{40} = & \langle\langle\, \bar\nu_7 \quad \lambda_2^{40,5}\bar\nu_8 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{10} = & \langle\langle\, \mu_7^3 \quad \nu_7 \quad \mu_8^5 & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{24} = & \langle\langle\, \lambda_7^{24} \quad \lambda_7^{24} \quad \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{11} = & \langle\langle\, \mu_7^4 \quad \nu_7 \quad \mu_8^5 & \rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\mu_9^{11} \;=\; \langle\langle\, \mu_7^4\, \nu_7\, \mu_8^5 \,\rangle\rangle. \tag{8.63}$$

Начало столбца

$$\begin{array}{rcl}
\mu_7^2 = & \langle\langle\, \bar\nu_5 \quad \bar\tau_3 \quad \nu_3 \quad \nu_4 \quad \lambda_6^7 & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{25} = & \langle\langle\, \lambda_5^{25} \quad \bar\nu_3 \quad \tau_2^1 \quad \bar\nu_4 \quad \bar\nu_6 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_7^3 = & \langle\langle\, \lambda_5^{25} \quad \bar\tau_3 \quad \nu_3 \quad \nu_4 \quad \lambda_6^7 & \rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rcl}
\mu_7^3 = & \langle\langle\, \lambda_5^{25} \quad \bar\tau_3 \quad \nu_3 \quad \nu_4 \quad \lambda_6^7 & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{24} = & \langle\langle\, \lambda_4^{24,1}\bar\nu_3 \quad \bar\tau^3 \quad \lambda_4^{24} \quad \bar\nu_6 & \rangle\rangle \\ \hline
\mu_7^4 = & \langle\langle\, \mu_5^1 \quad \bar\tau_3 \quad \nu_3 \quad \nu_4 \quad \lambda_6^7 & \rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\mu_7^4 \;=\; \langle\langle\, \mu_5^1\, \bar\tau_3\, \nu_3\, \nu_4\, \lambda_6^7 \,\rangle\rangle. \tag{8.64}$$

Результат по первому сегменту получается, если подставить **(8.64)** в **(8.63)**:

$$\mu_9^{11} \;=\; \langle\langle\, \mu_5^1\, \bar\tau_3\, \nu_3\, \nu_4\, \lambda_6^7\, \nu_7\, \mu_8^5 \,\rangle\rangle. \tag{8.65}$$

Разумеется, что можно было бы частично развернуть и подоператор μ_8^5, однако торопиться этого делать не следует, когда решается **задача ВЫП**, так как раньше, чем будет выполнена подобная развёртка, может обнаружиться выполнимость.

Результаты выкладок по *второму* и *третьему* сегментам, содержащими операторы 8, 9, 10, 11, 22, 15, 18, 19 и 27, 12, 13, 14, 28, 20, 21 соответственно, таковы:

Начало столбца

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\lambda_9^{8} = & \langle\langle & \tau_6 & \bar\nu_5 & \nu_5 & \bar\nu_7 & \bar\nu_8 & & \rangle\rangle \\
\lambda_8^{9,1} = & \langle\langle & \lambda_5^{9,1} & \bar\nu_4 & \bar\tau_4 & \lambda_5^{9} & \bar\nu_7 & \lambda_8^{9} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{12} = & \langle\langle & \mu_6^{1} & \bar\nu_4 & \bar\tau_4 & \nu_5 & \bar\nu_7 & \lambda_8^{9} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{10} = & \langle\langle & \lambda_6^{10} & \bar\nu_4 & \tau_4 & \bar\nu_5 & \lambda_6^{10,1} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{13} = & \langle\langle & \mu_6^{2} & \bar\nu_4 & \nu_4 & \nu_5 & \lambda_6^{10,1} & \lambda_8^{9} & \rangle\rangle \\
\lambda_7^{11,2} = & \langle\langle & \bar\nu_6 & \bar\nu_4 & \tau_4 & \bar\nu_5 & \lambda_7^{11} & \lambda_7^{11,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{14} = & \langle\langle & \mu_6^{2} & \bar\nu_4 & \nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{1} & \mu_8^{6} & \rangle\rangle \\
\lambda_9^{22} = & \langle\langle & \lambda_5^{22,1} & \bar\nu_4 & \bar\tau_3^{1} & \lambda_5^{22} & \lambda_5^{22,2} & \bar\nu_8 & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{15} = & \langle\langle & \mu_6^{3} & \bar\nu_4 & \nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{2} & \mu_8^{6} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Продолжение столбца

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\mu_9^{15} = & \langle\langle & \mu_6^{3} & \bar\nu_4 & \nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{2} & \mu_8^{6} & \rangle\rangle & & & & \\
\lambda_9^{15} = & \langle\langle & \bar\nu_6 & \bar\tau_2^{1} & \bar\nu_3 & \lambda_4^{15} & \lambda_4^{15,1} & \lambda_4^{15} & \bar\nu_8 \;\rangle\rangle & & & & \\
\hline
\mu_9^{16} = & \langle\langle & \mu_6^{3} & \bar\tau_2^{1} & \bar\nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{3} & \mu_8^{6} & & & \rangle\rangle & \\
\lambda_7^{18,2} = & \langle\langle & \bar\nu_6 & \bar\nu_2 & \bar\nu_1 & \tau_1 & \lambda_3^{18} & \lambda_3^{18,1} & \lambda_3^{18,2} & \lambda_7^{18} & \lambda_7^{18,1} & \rangle\rangle & \\
\hline
\mu_9^{17} = & \langle\langle & \mu_6^{3} & \bar\tau_2 & \nu_1 & \tau_1 & \lambda_3^{18} & \nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{4} & \mu_8^{7} & \rangle\rangle & \\
\lambda_9^{19} = & \langle\langle & \lambda_2^{19,4} & \lambda_2^{19} & \bar\nu_1 & \tau^{1} & \lambda_2^{19,1} & \lambda_2^{19,2} & \lambda_2^{19,3} & \bar\nu_7 & \bar\nu_8 & \rangle\rangle & \\
\hline
\mu_9^{18} = & \langle\langle & \mu_6^{4} & \mu_2^{1} & \nu_1 & \tau & \nu & \mu_3^{1} & \nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{4} & \mu_8^{7} & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$
\mu_9^{18} \;=\; \langle\langle\, \mu_6^4\; \mu_2^1\; \nu_1\; \tau\; \nu\; \mu_3^1\; \nu_4\; \nu_5\; \mu_7^4\; \mu_8^7 \,\rangle\rangle. \tag{8.66}
$$

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\lambda_9^{27} = & \langle\langle & \bar\nu_8 & & \bar\nu_6 & & \bar\nu_5 & & \nu_5 & \lambda_7^{27} & \rangle\rangle & & \\
\lambda_5^{12,4} = & \langle\langle & \lambda_5^{12,3} & \lambda_5^{12,1} & \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & \lambda_5^{12} & \lambda_5^{12,2} & \rangle\rangle & & \\
\hline
\mu_9^{19} = & \langle\langle & \lambda_5^{12,3} & \lambda_5^{12,1} & \bar\nu_2 & \nu_2 & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{5} & \rangle\rangle & & \\
\lambda_8^{13,1} = & \langle\langle & \lambda_8^{13} & \bar\nu_6 & \tau_2 & \tau_2 & \tau_2^{1} & \bar\nu_4 & \lambda_5^{13} & \bar\nu_7 & \rangle\rangle & & \\
\hline
\mu_9^{20} = & \langle\langle & \mu_8^{8} & \lambda_5^{12,1} & \tau_2 & \nu_2 & \tau_2^{1} & \bar\nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{5} & \rangle\rangle & & \\
\lambda_8^{14,1} = & \langle\langle & \lambda_8^{14} & \lambda_5^{14,1} & \bar\tau_2 & \bar\tau_2 & \bar\nu_3 & \bar\nu_4 & \lambda_5^{14} & \bar\nu_7 & \rangle\rangle & & \\
\hline
\mu_9^{21} = & \langle\langle & \mu_8^{9} & \mu_6^{5} & & \nu_3 & \tau_2^{1} & \bar\nu_4 & \nu_5 & \mu_7^{5} & \rangle\rangle & & \\
\lambda_9^{28} = & \langle\langle & \bar\nu_8 & \lambda_3^{28,3} & \lambda_3^{28} & \tau_2 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{28,1} & \lambda_3^{28,2} & \lambda_3^{28,4} & \rangle\rangle & & \\
\hline
\mu_9^{22} = & \langle\langle & \mu_8^{9} & \mu_6^{6} & & \nu_3 & \tau_2^{1} & \lambda_3^{28,1} & \nu_5 & \mu_7^{6} & & & \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,6} = & \langle\langle & \lambda_3^{20,5} & \lambda_3^{20,3} & \lambda_3^{20} & \tau & \nu & \bar\nu_1 & \bar\nu_2 & \lambda_3^{20,1} & \lambda_3^{20,2} & \lambda_3^{20,4} & \rangle\rangle \\
\hline
\mu_9^{23} = & \langle\langle & \mu_8^{10} & \mu_6^{7} & \nu_3 & \tau & \nu & \nu_1 & \tau_2 & \mu_4^{1} & \nu_5 & \mu_7^{7} & \rangle\rangle \\
\lambda_6^{21,3} = & \langle\langle & \lambda_6^{21,2} & \lambda_6^{21} & \lambda_3^{21} & \bar\tau & \bar\nu & \lambda_1^{21} & \bar\nu_2 & \lambda_3^{21,1} & \bar\nu_5 & \lambda_6^{21,1} & \rangle\rangle \\
\hline
\lambda_9^{24} = & \langle\langle & \mu_8^{11} & \mu_6^{8} & & \nu_3 & \nu_2 & \tau_2 & \mu_4^{2} & \nu_5 & \mu_7^{8} & & \rangle\rangle
\end{array}
$$

Итог вычислений:

$$
\lambda_9^{24} \;=\; \langle\langle\, \mu_8^{11}\; \mu_6^8\; \nu_3\; \nu_2\; \tau_2\; \mu_4^2\; \nu_5\; \mu_7^8 \,\rangle\rangle \tag{8.67}
$$

Аналогично результаты выкладок по *четвёртому*, *пятому*, *шестому* и *седьмому* сегментам, содержащими операторы 30, 31, 16, 29 и 32; 39 и 26; 33, 34 и 23; 35, 17 и 38 соответственно, таковы:

Начало столбца

$$\begin{array}{rl}
\lambda_9^{30} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \quad\; \bar\nu_4 \; \nu_4 \; \tau_5 \; \bar\nu_6 \; \bar\nu_7 \;\rangle\rangle \\
\lambda_9^{31} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \nu_2 \; \bar\nu_2 \; \bar\tau_3 \; \bar\tau_3^1 \; \bar\tau_3^2 \; \bar\nu_6 \; \bar\nu_7 \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{25} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \nu_2 \; \bar\nu_2 \; \bar\tau_3 \; \nu_4 \; \mu_5^1 \; \bar\nu_6 \; \bar\nu_7 \;\rangle\rangle \\
\lambda_8^{16,1} = & \langle\langle\; \lambda_8^{16} \; \bar\nu_2 \; \bar\tau_2 \; \lambda_3^{16} \; \bar\nu_4 \; \lambda_5^{16} \; \lambda_5^{16,1}\bar\nu_7 \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{26} = & \langle\langle\; \lambda_8^{16} \; \nu_2 \; \bar\tau_2 \; \mu_3^2 \; \nu_4 \; \mu_5^2 \; \lambda_5^{16,1}\bar\nu_7 \;\rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rl}
\mu_9^{26} = & \langle\langle\; \lambda_8^{16} \; \nu_2 \; \bar\tau_2 \; \mu_3^2 \; \nu_4 \; \mu_5^2 \; \lambda_5^{16,1}\bar\nu_7 \;\rangle\rangle \\
\lambda_9^{29} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \bar\nu_2 \; \tau_2 \; \lambda_3^{29} \; \lambda_3^{29,1}\bar\nu_5 \; \lambda_6^{29} \; \lambda_6^{29,1} \rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{27} = & \langle\langle\; \lambda_8^{16} \quad \nu_3 \; \mu_3^3 \; \nu_4 \; \mu_5^2 \; \mu_6^9 \; \lambda_6^{29,1} \rangle\rangle \\
\lambda_9^{32} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \bar\tau_1^2 \; \bar\tau_1^2 \; \bar\nu_4 \; \lambda_5^{32} \; \bar\nu_6 \; \lambda_7^{32} \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{28} = & \langle\langle\; \lambda_8^{16} \quad \nu_3 \; \mu_3^4 \; \nu_4 \; \mu_5^3 \; \mu_6^9 \; \mu_7^9 \;\rangle\rangle
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lambda_8^{39,1} = & \langle\langle\, \lambda_8^{39} \; \bar\nu_6 \; \bar\nu_5 \; \bar\nu_3 \; \nu_3 \; \tau_4 \; \bar\nu_7 \;\rangle\rangle \\
\lambda_6^{26,3} = & \langle\langle\, \lambda_6^{26,2}\lambda_6^{26} \; \bar\nu_5 \; \lambda_2^{26,1}\lambda_2^{26,1}\bar\nu_4 \; \lambda_6^{26,1}\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{29} = & \langle\langle\, \mu_8^{12} \; \lambda_8^{26} \; \bar\nu_5 \; \lambda_2^{26,1}\nu_3 \; \tau_4 \; \lambda_6^{26,1}\rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\mu_9^{29} = \langle\langle\, \mu_8^{12}\ \lambda_8^{26}\ \bar\nu_5\ \lambda_2^{26,1}\ \nu_3\ \tau_4\ \lambda_6^{26,1} \,\rangle\rangle. \tag{8.68}$$

Начало столбца

$$\begin{array}{rl}
\lambda_9^{33} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \bar\nu_7 \; \bar\nu_5 \; \tau_4 \; \bar\nu_3 \; \nu_3 \; \lambda_6^{33} \;\rangle\rangle \\
\lambda_9^{34} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \bar\nu_7 \; \bar\tau_2^3 \; \bar\tau_2^2 \; \bar\tau_2 \; \bar\tau_2 \; \bar\tau_2^1 \; \bar\nu_6 \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{30} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \bar\nu_7 \; \bar\tau_2^3 \; \mu_4^3 \; \bar\tau_2 \; \bar\tau_2 \; \nu_3 \; \lambda_6^{33} \;\rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rl}
\mu_9^{30} = & \langle\langle\; \bar\nu_8 \; \bar\nu_7 \; \bar\tau_2^3 \; \mu_4^3 \; \bar\tau_2 \; \bar\tau_2 \; \nu_3 \; \lambda_6^{33} \;\rangle\rangle \\
\lambda_7^{23,2} = & \langle\langle\; \lambda_7^{23,1}\lambda_7^{23} \; \lambda_4^{23,1}\lambda_4^{23} \; \tau_1^1 \; \bar\nu_2 \; \bar\nu_3 \; \bar\nu_6 \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{31} = & \langle\langle\; \lambda_7^{23,1}\lambda_7^{23} \; \mu_5^4 \; \mu_4^4 \; \nu_1 \; \tau_1 \; \bar\tau_2 \; \nu_3 \; \lambda_6^{33} \;\rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\mu_9^{31} = \langle\langle\, \lambda_7^{23,1}\ \lambda_7^{23}\ \mu_5^4\ \mu_4^4\ \nu_1\ \tau_1\ \bar\tau_2\ \nu_3\ \lambda_6^{33} \,\rangle\rangle. \tag{8.69}$$

Начало столбца

$$\begin{array}{rl}
\lambda_8^{35,1} = & \langle\langle\; \bar\nu_7 \; \lambda_5^{35,1}\bar\nu_4 \; \bar\nu_3 \; \bar\nu_2 \; \nu_2 \; \lambda_3^{35} \; \lambda_8^{35} \;\rangle\rangle \\
\lambda_9^{17} = & \langle\langle\; \lambda_6^{17,1}\lambda_6^{17} \; \lambda_4^{17} \; \bar\nu_3 \; \tau_1 \; \tau_1 \; \tau_1^1 \; \bar\nu_5 \; \bar\nu_8 \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{32} = & \langle\langle\; \lambda_6^{17,1}\mu_6^{10} \; \lambda_4^{17} \; \bar\nu_3 \; \tau_1 \; \tau_1 \; \nu_2 \; \lambda_5^{35} \; \lambda_8^{35} \;\rangle\rangle
\end{array}$$

Продолжение столбца

$$\begin{array}{rl}
\mu_9^{32} = & \langle\langle\; \lambda_6^{17,1}\mu_6^{10} \; \lambda_4^{17} \; \bar\nu_3 \; \tau_1 \; \tau_1 \; \nu_2 \; \lambda_5^{35} \; \lambda_8^{35} \;\rangle\rangle \\
\lambda_8^{38,1} = & \langle\langle\; \bar\nu_7 \; \bar\nu_6 \; \lambda_2^{38,2}\lambda_2^{38,1}\tau_1 \; \bar\nu_1 \; \lambda_2^{38} \; \lambda_2^{38,3}\lambda_8^{38} \;\rangle\rangle \\ \hline
\mu_9^{33} = & \langle\langle\; \lambda_6^{17,1}\mu_6^{10} \; \mu_4^5 \; \lambda_2^{38,1}\tau_1^1 \; \nu_2 \; \mu_5^5 \; \mu_8^{13} \;\rangle\rangle
\end{array}$$

Итог вычислений:

$$\mu_9^{33} = \langle\langle\, \lambda_6^{17,1}\ \mu_6^{10}\ \mu_4^5\ \lambda_2^{38,1}\ \tau_1^1\ \nu_2\ \mu_5^5\ \mu_8^{13} \,\rangle\rangle. \tag{8.70}$$

Результаты выкладок по всем *семи* сегментам, представленные в равенствах **(8.65) — (8.70)**, позволяют сделать некоторые заключения о подоператорах, которые (в зависимости от их значения) могут либо скорректировать такие значения, либо потребовать дальнейшую развёртку некоторых подоператоров. Чтобы говорить более конкретно, запишем указанные результаты в порядке следования сегментов и, кроме того, рядом запишем принятые нами обозначения для самого *левого* сегмента (выбор *левого* сегмента может быть заменён на *правый*, или любой другой):

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mu_9^{11} & = & \langle\langle\, \mu_5^1\,\bar{\tau}_3\,\nu_3\,\nu_4\,\lambda_6^7\,\nu_7\,\mu_8^5\,\rangle\rangle; & \mu_5^1; & & \\
\mu_9^{18} & = & \langle\langle\, \mu_6^4\,\mu_2^1\,\nu_1\,\tau\,\nu\,\mu_3^1\,\nu_4\,\nu_5\,\mu_7^4\,\mu_8^7\,\rangle\rangle; & \mu_6^4 & \rightleftharpoons & \eta_5^1\,\eta_5^2; \\
\mu_9^{24} & = & \langle\langle\, \mu_8^{11}\,\mu_6^8\,\nu_3\,\nu_2\,\tau_2\,\mu_4^2\,\nu_5\,\mu_7^8\,\rangle\rangle; & \mu_8^{11} & \rightleftharpoons & \eta_5^3\,\eta_5^4\,\eta_6^1\,\eta_7^1; \\
\mu_9^{28} & = & \langle\langle\, \lambda_8^{16}\,\nu_3\,\mu_3^4\,\nu_4\,\mu_5^3\,\mu_6^9\,\mu_7^9\,\rangle\rangle; & \lambda_8^{16} & = & \lambda_5^{16}\,\lambda_5^{16}\,\lambda_5^{16,1}\,\bar{\nu}_7; \\
\mu_9^{29} & = & \langle\langle\, \mu_8^{12}\,\lambda_6^{26}\,\bar{\nu}_5\,\lambda_2^{26,1}\,\nu_3\,\tau_4\,\lambda_6^{26,1}\,\rangle\rangle; & \mu_8^{12} & \rightleftharpoons & \eta_5^5\,\eta_5^6\,\eta_6^2\,\eta_7^2; \\
\mu_9^{31} & = & \langle\langle\, \lambda_7^{23,1}\,\lambda_7^{23}\,\mu_5^4\,\mu_4^4\,\nu_1\,\tau_1\,\bar{\tau}_2\,\nu_3\,\lambda_6^{33}\,\rangle\rangle; & \lambda_7^{23,1} & = & \lambda_4^{23,1}\,\lambda_4^{23,1}\,\bar{\nu}_6\,\lambda_7^{23}; \\
\mu_9^{33} & = & \langle\langle\, \lambda_6^{17,1}\,\mu_6^{10}\,\mu_4^5\,\lambda_2^{38,1}\,\tau_1^1\,\nu_2\,\mu_5^5\,\mu_8^{13}\,\rangle\rangle; & \lambda_6^{17} & = & \lambda_4^{17,1}\,\bar{\nu}_5\,\lambda_6^{17}.
\end{array}
$$

Сопоставляя правые части μ_9^{11} и μ_9^{18}, заключаем:

$$\mu_7^4 = \nu_7,$$

а сопоставление μ_9^{11} с μ_9^{33} позволяет заключить, что

$$\mu_6^{10}\;\mu_4^5\;\lambda_2^{38,1}\;\tau_1^1\;\nu_2\;\mu_5^5 = \nu_7.$$

Можно сделать и другие заключения, однако лучше выполнить последовательно анализ содержания сегментов, выполняя выкладки по развёртке сегментов. Покажем это на сегментах: μ_5^1, η_5^1, η_5^3, λ_5^{16}, η_5^5, $\lambda_4^{23,1}$, $\lambda_4^{17,1}$, где по выкладкам **(8.65)** — **(8.70)** имеем для

$$
\begin{aligned}
\mu_5^1 &= \langle\langle\,\lambda_5^{25}\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_4^{24,1}\,\rangle\rangle, \quad \eta_5^1 = \langle\langle\,\lambda_5^{9}\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_5^{10}\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_5^{22}\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_2^{19,3}\,\rangle\rangle, \\
\eta_5^3 &= \langle\langle\,\lambda_5^{12}\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_5^{14}\,\rangle\rangle,\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_3^{20,2}\,\rangle\rangle\,\bar{/}\,\langle\langle\,\lambda_3^{21,2}\,\rangle\rangle, \quad \eta_5^5 = \langle\langle\,\bar{\nu}_5\,\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

Итак:

$$
\begin{array}{rl}
\lambda_5^{25} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_3\ \ \tau_2^1\ \ \bar{\nu}_4\ \ \rangle\rangle \\
\lambda_4^{24,1} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_3\ \ \bar{\tau}^3\ \ \lambda_4^{24,1}\rangle\rangle \\
\hline
\mu_5^1 = & \langle\langle\ \bar{\nu}_3\ \ \eta_2^{1,1}\lambda_4^{24,1}\rangle\rangle \\
 & \\
\lambda_5^{16} = & \langle\langle\ \lambda_3^{16}\,\lambda_3^{16}\,\bar{\nu}_4\ \ \rangle\rangle \\
 & \\
\lambda_4^{23,1} = & \langle\langle\ \lambda_3^{23}\,\bar{\nu}_3\ \ \lambda_4^{23}\ \ \rangle\rangle \\
 & \\
\lambda_4^{17,1} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_3\ \ \tau_1^2\ \ \lambda_4^{17}\ \ \rangle\rangle,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lambda_5^{9} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_4\ \ \nu_8\ \ \bar{\nu}_3\ \ \rangle\rangle \\
\lambda_5^{10} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_4\ \ \bar{\nu}_3\ \ \nu_3\ \ \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{7} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_4\ \ \nu_4\ \ \rangle\rangle \\
\lambda_5^{22} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_4\ \ \bar{\tau}_3^1\ \ \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{8} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_4\ \ \nu_4\ \ \rangle\rangle \\
\lambda_2^{19,3} = & \langle\langle\ \lambda_2^{19,1}\lambda_2^{19,1}\lambda_2^{19,2}\rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{1} = & \langle\langle\ \lambda_2^{19,1}\lambda_2^{19,1}\nu_4\ \ \rangle\rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lambda_5^{12} = & \langle\langle\ \bar{\nu}_2\ \ \nu_2\ \ \bar{\nu}_3\ \ \bar{\nu}_4\ \ \rangle\rangle \\
\lambda_5^{14} = & \langle\langle\ \bar{\tau}_2\ \ \bar{\tau}_2\ \ \bar{\nu}_3\ \ \bar{\nu}_4\ \ \rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{9} = & \langle\langle\ \bar{\tau}_2\ \ \nu_2\ \ \bar{\nu}_3\ \ \bar{\nu}_4\ \ \rangle\rangle \\
\lambda_3^{20,2} = & \langle\langle\ \lambda_2^{20}\ \ \bar{\nu}_2\ \ \lambda_3^{20}\,\lambda_3^{20,1}\rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{10} = & \langle\langle\ \eta_2^{2}\ \ \nu_2\ \ \lambda_3^{20}\,\lambda_3^{20,1}\rangle\rangle \\
\lambda_3^{21,2} = & \langle\langle\ \lambda_1^{21,1}\bar{\nu}_2\ \ \lambda_3^{21}\,\lambda_3^{21,1}\rangle\rangle \\
\hline
\eta_5^{3} = & \langle\langle\ \eta_2^{3}\ \ \nu_2\ \ \eta_3^{1}\ \ \eta_4^{1}\ \ \rangle\rangle
\end{array}
$$

где

$$\eta_2^1 = \langle\langle\, \tau_2 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \bar{\tau}^2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \bar{\tau}^1\, \nu_1 \,\rangle\rangle, \quad \eta_2^3 = \langle\langle\, \bar{\tau}_2 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_2^{20} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_1^{21,1} \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \nu_1\, \lambda_1^{21} \,\rangle\rangle,$$

$$\eta_3^1 = \langle\langle\, \lambda_3^{20} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_3^{11} \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \bar{\tau}_1\, \lambda_1^{21}\, \bar{\nu}_2 \,\rangle\rangle.$$

А поскольку

$$\langle\langle\, \lambda_3^{16} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_3^{23} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_2^{19,1} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \eta_2^3\, \nu_2 \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \nu_3 \,\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle\, \eta_2^{1,1} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_3^{16} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \tau_1^2 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_2^{19,1} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \eta_3^1 \rangle\rangle = \langle\langle\, \nu_3 \,\rangle\rangle,$$

то, имея ввиду *третью* компоненту в η_5^1, заключаем, что

$$\langle\langle\, \mu_5^1 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \eta_5^1 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \eta_5^3 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_5^{16} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \eta_5^5 \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_4^{23,1} \,\rangle\rangle \,\bar{/}\, \langle\langle\, \lambda_4^{17,1} \,\rangle\rangle = \langle\langle\, \nu_5 \,\rangle\rangle.$$

8.14 О научных и прикладных программах

В этом томе книги *главы* **7** и **8** имеют большей частью прикладной, чем теоретический характер. И тем не менее, каждое практическое действие является следствием теоретических изысканий и проверено соответствующей программной проработкой. Всё дело в том, что во многих частях этих глав ведётся речь о том или ином алгоритме, хотя, строго говоря, следовало бы вести разговор о том или ином методе, на базе которого разрабатывались соответствующие алгоритмы и были разработаны компьютерные программы, в основе которых не малую долю занимает и ноу–хау (know–haw). Отметим здесь, что отдельные программные проработки и весь программный продукт, созданный на базе *глав* **7** и **8**, выполнен А.А.Фоминым.

В соответствии с изложенным в *главе* **7**, точнее в *п.* **7.1**, была разработана программа `ВКНФ`. Эта программа имеет ещё две модификации: `ВКНФ–1` и `ВКНФ–2`. Как сама программа, так и её модификации предназначены определять выполнимость заданной конъюнктивной нормальной формы и в случае выполнимости строить *один* или несколько выполняющих наборов. В этих модификациях изучались зависимости между объёмом дополнительной памяти и скоростью работы при малой дополнительной памяти или даже без использования таковой. Кроме того, устанавливалась роль различных способов приведения.

Дальнейшее изложение в *главе* **7** сопровождалось исследовательскими программами: `ПКД1` и `ПКДП`. В `ПКД1` определение выполнимости осуществляется в результате преобразования конъюнктивной формы в дизъюнктивную, а в `ПКДП` выполняется полное преобразование **КНФ** в **ДНФ**.

Каждая из этих двух программ имеет по одной модификации соответственно: `МПКД1` и `МПКДП`.

В модификациях исследуются примерно те же вопросы, что и в указанных выше модификациях с включением ещё и вопросов сегментирования. Кроме того, здесь берут начало вопросы суперприведения: программа `SKНФ` выполняет суперприведение заданной **КНФ**, программа `SKД` выполняет суперприведение **КНФ** в результате преобразования, а программа `SMKД` — это модификация суперприведения **КНФ** в результате преобразования.

По теоретическому материалу *главы* **8** были разработаны программы $FS-\sigma$, $FS-\sigma-S$, $FS-\sigma-SM$ и $FS-\sigma-\text{Д}$. Программа $FS-\sigma$, позволяющая решать `задачу` **ВЫП**, могла бы появиться уже при работе над *п.* **7.1**. Программа $FS-\sigma-S\text{М}$ является одной из модификаций программы $FS-\sigma-S$, которая позволяет выполнять суперприведение заданной **КНФ** в результате эквивалентных преобразований, а $FS-\sigma-\text{Д}$ позволяет суперприведённую **КНФ** представить в виде **ДНФ**.

Отметим, что суперприведение над `задачами` **ВЫП** (оно может быть осуществлено программой $FS-\sigma-S$ или $FS-\sigma-S\text{М}$) является ключевым как в теории, так и в практике переработки информации, связанной с NP–полнотой.

Суперприведение лучше всего использовать уже на этапе постановки `задачи` **ВЫП**. Всякое сложное устройство состоит из частей и для этих частей нужно составлять и суперприводить их тексты, а затем из суперприведённых текстов получать объединённый текст, над которым и выполнять окончательное суперприведение. Можно кратко сформулировать эту мысль и так: предварительное посегментное суперприведение, затем совместное суперприведение над уже суперприведёнными сегментами — это та уникальная особенность, которая позволяет не только получать ответы на поставленные вопросы, но и содержит основной элемент обучаемости: выделение знания из информационных потоков.

При таком подходе не будут получаться задачи экспоненциальной сложности. Иносказательно говоря, задачи экспоненциальной сложности — это результат неразумной постановки или результат нарочитого усложнения.

В завершении отметим, что описанный нами подход, полностью оформившийся к концу второго тысячелетия, не имеет аналога в мировой практике. Для такого вывода имеются все основания: до сих пор различные исследователи, занимающиеся `задачей` **ВЫП**, публикуют свои примеры так называемых критериев (`benchmarks`), в которых имеются тысячи переменных и десятки тысяч дизъюнкций или даже десяти тысяч переменных и сотни тысяч дизъюнкций, для желающих попробовать свои силы в распознавании выполнимости. И здесь подходы за последние двадцать лет не изменились по сравнению с тем, что имелось на старте японского проекта ЭВМ пятого поколения (*см.* [**8**], [**9**] и [**15**]). Теперь можно питать надежды, что в третьем тысячелетии проблематика существенно изменится.

Литература

[1] Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления / В кн. “Энциклопедия элементарной математики”, кн. 1: Арифметика. М. - Л. 1951, с. 11 – 74.

[2] Остроградский М.В. Педагогическое наследие: Документы о жизни и деятельности. М.: Физматгиз, 1961, 399 с.

[3] Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: ГИФМЛ, 1959.

[4] Битюцков В.И. Цифры / В кн. Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988, с. 626 – 627.

[5] Нечаев В.И. Счисление, нумерация / В кн. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1985, т. 5, с. 314 – 316.

[6] Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962.

[7] Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983, 560 с.

[8] ЭВМ пятого поколения: Концепции, проблемы, перспективы / Под ред. Т.Мото-ока; Пер. с англ.; Предисл. Е.П.Велихова. – М.: Финансы и статистика, 1984, 110 с.

[9] Симонс Дж. ЭВМ пятого поколения: компьютеры 90-х годов: Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1985, 173 с.

[10] Робинсон Дж. Логическое программирование — прошлое, настоящее и будущее. / В кн. Логическое программирование: Пер. с англ. и фр. – М.: Мир, 1988, с. 7 – 26.

[11] Фути К. К вычислительным системам пятого поколения. / В кн. Язык Пролог в пятом поколении ЭВМ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988, с. 7 – 16.

[12] Лекции лауреатов премии Тьюринга за первые двадцать лет: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993, 560 с.

[13] Кук С.А. Сложность процедур вывода теорем. – Киб. сб. нов. сер., вып. 12. – М.: Мир, 1975, с. 5 – 15.

[14] Карп Р.М. Сводимость комбинационных задач. – Киб. сб. нов. сер., вып. 12. – М.: Мир, 1975, с. 16 – 38.

[15] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982, 416 с.

[16] Тельпиз М.И. Позиционные принципы представления функций алгебры логики. Препринт. – АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика", М.: 1984, 76 с.

[17] Тельпиз М.И. Представления функций алгебры логики. – Кибернетика. Киев: 1985, N 4, с. 37 – 40, 51.

[18] Тельпиз М.И. Позиционные операторы и преобразования в алгебре логики. Препринт. – АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика", М.: 1985, 60 с.

[19] Тельпиз М.И. Алгебра позиционных операторов и эквивалентных преобразований. Препринт. – АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика", М.: 1988, 64 с.

[20] Тельпиз М.И., Демидчик С.М., Щербанский Л.М. Принцип позиционности в трёхзначной алгебре логики. Пр. – 1436. ИКИ АН СССР, М.: 1988, 20 с.

[21] Тельпиз М.И. Позиционные фундаментальные симметрические операторы и задачи логического распознавания. Пр. – 1601. ИКИ АН СССР, М.: 1989, 72 с.

[22] Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962, 476 с.

[23] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979, 272 с.

[24] Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973, 400 с.

[25] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: логические исчисления и формализация арифметики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1979, 560 с.

[26] Яблонский С.В. Функциональные построения в **k**-значной логике. – Труды МИАН СССР, 51, 1958, с. 5 – 142.

[27] Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. – М.: Наука, 1977, 328 с.

[28] Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки: Пер. с укр. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1985, 160 с.

[29] Робинсон Дж.А. Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюций / Кибернетический сборник – 1970. Вып. 7.

[30] Закревский А.Д. Проверка тождеств в алгебре логики. В кн. Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств. – М.: Наука, 1966, с. 159 – 163.

[31] Закревский А.Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. – М.: Наука, 1971, 512 с.

[32] Закревский А.Д. Комбинаторика логического проектирования / АВТ. – 1990. N 2, с. 68 – 79.

[33] Закревский А.Д. Логические уравнения. – Минск: Наука и техника, 1975, 96 с.

[34] Уткин А.А. Решение логических уравнений / Автоматизация логического проектирования. – Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1982, с. 41 – 58.

[35] Уткин А.А. Построение проверяющих тестов для сетей из программируемых логических матриц. / В кн. Проектирование дискретных систем. – Минск: Ин-т техн. кибернетики АН БССР, 1989, с. 111 – 124.

[36] Уткин А.А. Анализ логических сетей и техника булевых вычислений. – Минск: Наука и техника, 1979, 152 с.

[37] Данцин Е.Я. Алгоритмы задачи выполнимости / Вопросы кибернетики. Проблемы сокращённого перебора. Вып. ВК – 131. – М.: АН СССР, 1987 с. 7 – 29.

[38] Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта: Пер. с франц. – М.: Мир, 1991, 568 с.

[39] Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию: Пер. с франц. / Тейз А., Грибомон П., Луи Ж. и др. – М.: Мир, 1990, 432 с.

[40] Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем: Пер. с англ. / Под ред. С.Ю.Маслова. – М.: Наука, 1983. 360 с.

Предметный указатель

Обозначения

$$
\begin{aligned}
Q &\rightleftharpoons \{\, T,\, \bar{T},\, T^*,\, \bar{T}^*,\, M,\, \bar{M},\, M^*,\, \bar{M}^* \,\} \\
Q^i &\rightleftharpoons \{\, T_i,\, \bar{T}_i,\, T_i^*,\, \bar{T}_i^*,\, M_i,\, \bar{M}_i,\, M_i^*,\, \bar{M}_i^* \,\} \\
Q_1 &\rightleftharpoons \{\, T,\, \bar{T},\, T^*,\, \bar{T}^*,\, M,\, \bar{M} \,\} \\
Q_2 &\rightleftharpoons \{\, T,\, T^*,\, \bar{T},\, \bar{T}^*,\, M \,\} \\
Q_3 &\rightleftharpoons \{\, T,\, T^*, M \,\} \\
Q_4 &\rightleftharpoons \{\, \bar{T},\, \bar{T}^*, M \,\} \\
Q_5 &\rightleftharpoons \{\, \bar{M},\, M \,\} \\
Q_7 &\rightleftharpoons \{\, M,\, T,\, T^*,\, R_i,\, L_i,\, R_i^*,\, L_i^* \,\}, \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,. \\
Q_8 &\rightleftharpoons \{\, M,\, T,\, T^*,\, R_i,\, L_i,\, \bar{E}_i,\, E_i \,\}, \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,. \\
Q_9 &\rightleftharpoons \{\, M,\, T,\, T^*,\, R_i,\, L_i,\, \bar{I}_i^*,\, I_i^* \,\}, \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,. \\
Q_{10} &\rightleftharpoons \{M, T, T^*, R_i, L_i, R_i^*,\, L_i^*,\, E_i, \bar{E}_i,\, I_i, \bar{I}_i \,\}, \quad i = 0, 1, 2,\, \ldots\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_R &\rightleftharpoons \{\, R,\, R^*, \bar{R},\, \bar{R}^* \,\} \\
K_L &\rightleftharpoons \{\, L,\, L^*, \bar{L},\, \bar{L}^* \,\} \\
K_1 &\rightleftharpoons \{\, R,\, L, \bar{R},\, \bar{L} \,\} \\
K_2 &\rightleftharpoons \{\, R^*,\, L^*, \bar{R}^*,\, \bar{L}^* \,\} \\
K_K &\rightleftharpoons \{\, R,\, L, R^*,\, L^* \,\} \\
K_D &\rightleftharpoons \{\, \bar{R},\, \bar{L}, \bar{R}^*,\, \bar{L}^* \,\} \\
K &\rightleftharpoons K_R \cup R_L = K_1 \cup K_2 = K_K \cup K_D \\
K_Q &\rightleftharpoons \{\, I,\, E,\, P,\, Z,\, O,\, N \,\} \\
\bar{K}_Q &\rightleftharpoons \{\, \bar{I},\, \bar{E},\, \bar{P},\, \bar{Z},\, \bar{O},\, \bar{N} \,\} \\
K_Q^* &\rightleftharpoons \{\, I^*,\, E^*,\, P^*,\, Z^*,\, O^*,\, N^* \,\} \\
\bar{K}_Q^* &\rightleftharpoons \{\, \bar{I}^*,\, \bar{E}^*,\, \bar{P}^*,\, \bar{Z}^*,\, \bar{O}^*,\, \bar{N}^* \,\} \\
K_q &\rightleftharpoons K_Q \cup K_Q^*,\; K_{\bar{q}} \rightleftharpoons \bar{K}_Q \cup \bar{K}_Q^*,\; Q_k \rightleftharpoons K_q \cup K_{\bar{q}}
\end{aligned}
$$

$$Q_3' \rightleftharpoons Q_3 \cup [I] \cup \{Q, Q^*\} \cup K_K = \{T, T^*, M, I, \bar{I}, I^*, \bar{I}^*, O, O^*, R, R^*, L, L^*\}.$$

$$Q_4' \rightleftharpoons Q_4 \cup [I] \cup \{\bar{Q}, \bar{Q}^*\} \cup K_D = \{\bar{T}, \bar{T}^*, M, I, \bar{I}, I^*, \bar{I}^*, O, O^*, \bar{R}, \bar{R}^*, \bar{L}, \bar{L}^*\}.$$

$$Q_3'' \rightleftharpoons Q_3 \cup [E] \cup K_K = \{\, T,\, T^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, R,\, R^*,\, L,\, L^*, \}.$$

$$Q_4'' \rightleftharpoons Q_4 \cup [E] \cup K_D = \{\, \bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, \bar{R},\, \bar{R}^*,\, \bar{L},\, \bar{L}^*, \}.$$

$$Q_3''' \rightleftharpoons \{\, T,\, T^*,\, M,\, I,\, \bar{I},\, R,\, R^*,\, L,\, L^*, \}.$$

$$Q_4''' \rightleftharpoons \{\, \bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, I,\, \bar{I},\, \bar{R},\, \bar{R}^*,\, \bar{L},\, \bar{L}^*, \}.$$

$$Q_3^+ \rightleftharpoons Q_3'' \setminus \{\, R^*,\, L^* \,\} = \{\, T,\, T^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, R,\, L \,\}.$$

$$Q_4^+ \rightleftharpoons Q_4'' \setminus \{\, \bar{R}^*,\, \bar{L}^* \,\} = \{\, \bar{T},\, \bar{T}^*,\, M,\, E,\, \bar{E},\, E^*,\, \bar{E}^*,\, \bar{R},\, \bar{L} \,\}.$$