

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЕЙВЛЕТ–АНАЛИЗА ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

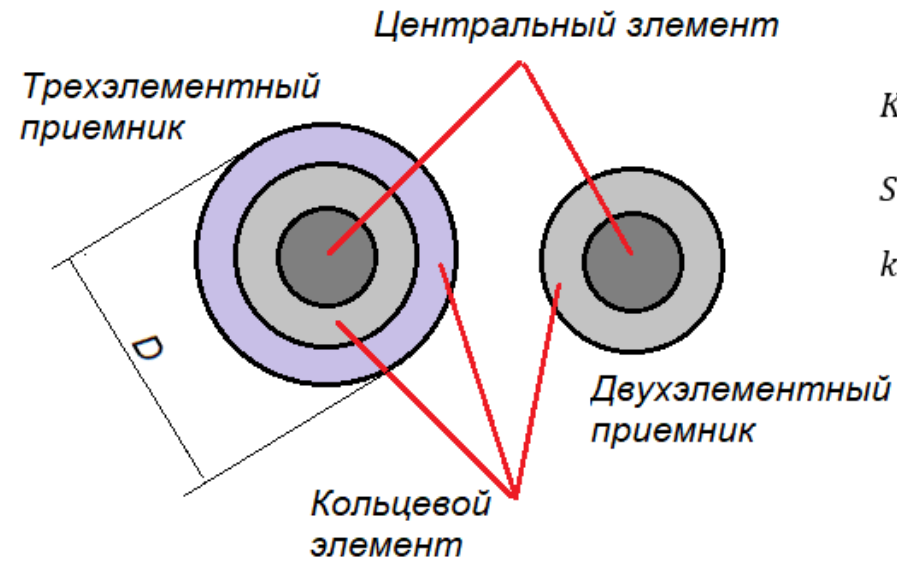
Е.Б. Кудашев, Л.Р. Яблоник

Введение. Постановка задачи

1. Частотно-волновой (пространственно-временной) вейвлет-анализ – обобщение классического спектрального анализа применительно к нестационарным и пространственно-неоднородным турбулентным полям давления.
2. Пространственный (волновой) вейвлет-анализ пристеночных турбулентных давлений до настоящего времени практически не проводился. Важен для диагностики сложных полей.
3. Локализация вейвлет-приемника в физическом пространстве неизбежно приводит к расширению волнового окна ($\delta k \cdot \delta l = \text{const}$ – принцип неопределенности).
4. Решается задача оценки габаритов компактных вейвлет-приемников, обеспечивающих адекватное представление волновых характеристик поля пристеночных турбулентных давлений.

Традиционный подход состоит в определении параметров частотно-волнового спектра в зависимости от двух компонент волнового вектора. Рассмотрение скалярного спектра, зависящего лишь от модуля волнового числа, позволяет заметно упростить задачу. В данной работе мы, основываясь на ранее полученных результатах в [1, 2], рассмотрим задачу прямых измерений скалярного спектра. Основная цель: определение условий и возможности скалярного пространственного вейвлет-анализа в исследованиях полей пристеночных турбулентных давлений.

Изотропные вейвлет-приемники пристеночных пульсаций давления



$K(\rho)$ – распределение локальной чувствительности по радиусу

$S(k_s) = \left| 2\pi \int_0^\infty \rho K(\rho) J_0(k_s \rho) d\rho \right|^2$ – волновая характеристика приемника

k_s – модуль волнового вектора

Требования	Как обеспечивается	Тип приемника
$S(k_s) = 0$	Соотношение интегральных чувствительностей элементов	Двух- и трехэлементные
$\int_0^\infty S(k_s) dk_s = 1,$	Нормирование $K(\rho)$	
$S(k_s) \sim k_s^8$ при $k_s \ll 1$	Соотношение интегральных чувствительностей элементов	Трехэлементные

Компактный скалярный волновой фильтр может быть сформирован из двух приемных элементов – центрального круглого и примыкающего к нему внешнего кольцевого. В [3] мы рассмотрели применение системы полосовых фильтров с волновыми характеристиками S_p одинаковой формы, отличающихся лишь зависящим от параметра p характерным масштабом. Для получения достаточно подробной информации будем полагать, что соседние волновые масштабы фильтров отличаются в $\sqrt{2}$ раз (сдвиг на $1/2$ волновой октавы), причем индекс $p = 0$ присвоим фильтру, настроенному на волновое число $k_s = 1$. p – индекс, задающий волновое число, на которое настроен фильтр.

Скалярный частотно-волновой спектр

ω – частота; (k_1, k_2) – компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$; $k_s = |\mathbf{k}|$.

$E(\omega, k_1, k_2)$ – частотно-волновой спектр.

$P(\omega) = \int_{\infty} E(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k}$ – частотный спектр.

$\Phi(k_s, \omega) = k_s \int_0^{2\pi} E(k_s \cos \varphi, k_s \sin \varphi, \omega) d\varphi$ – **скалярный частотно-волновой спектр.**

U – скорость внешнего потока; δ – толщина пограничного слоя;

$$\overline{\omega} = \omega \delta / U; \quad \kappa_s = k_s U / \omega.$$

$\varphi(\kappa_s, \overline{\omega}) = \frac{\omega}{U} \frac{\Phi(k_s, \omega)}{P(\omega)}$ – **приведенный скалярный спектр**

Моделирование пространственного вейвлет-анализа

$$\left(\frac{\omega D}{U}\right)_{p+1} = \sqrt{2} \left(\frac{\omega D}{U}\right)_p \quad (p = \pm 1, \pm 2 \dots)$$



Размеры приемников при $\frac{\omega}{U} = \text{const}$

$p=-2$	$p=-1$	$p=0$	$p=1$	$p=2$

Волновая характеристика приемника « p »:

$$S_p(\kappa_s) = \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} S_0\left(\frac{\kappa_s}{2^{\frac{p}{2}}}\right).$$

Центральное волновое число приемника « p »:

$$\kappa_{sp} = \int_0^\infty \kappa_s S_p(\kappa_s) d\kappa_s.$$

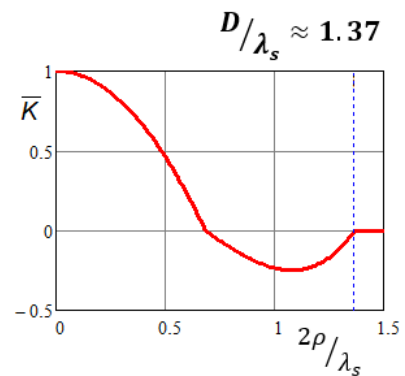
Выходной сигнал приемника « p »:

$$\varphi_{mp}(\bar{\omega}, p) = \int_0^\infty S_p(\kappa_s) \varphi(\kappa_s, \bar{\omega}) d\kappa_s.$$

На следующих слайдах исследована эффективность пространственного вейвлет-анализа, основанного на применении двухэлементных приемников. В значительной части частотно-волнового диапазона волновой спектр оценивается с отклонением менее **трех децибел** («зеленый» диапазон значений κ_s на диаграммах). Отклонения более 5 дБ («красный» диапазон) выявлены лишь в достаточно узком интервале волновых параметров в зоне значений $\kappa_s \approx 0.3$ при относительно высоких безразмерных частотах $\bar{\omega} \geq \sim 10$.

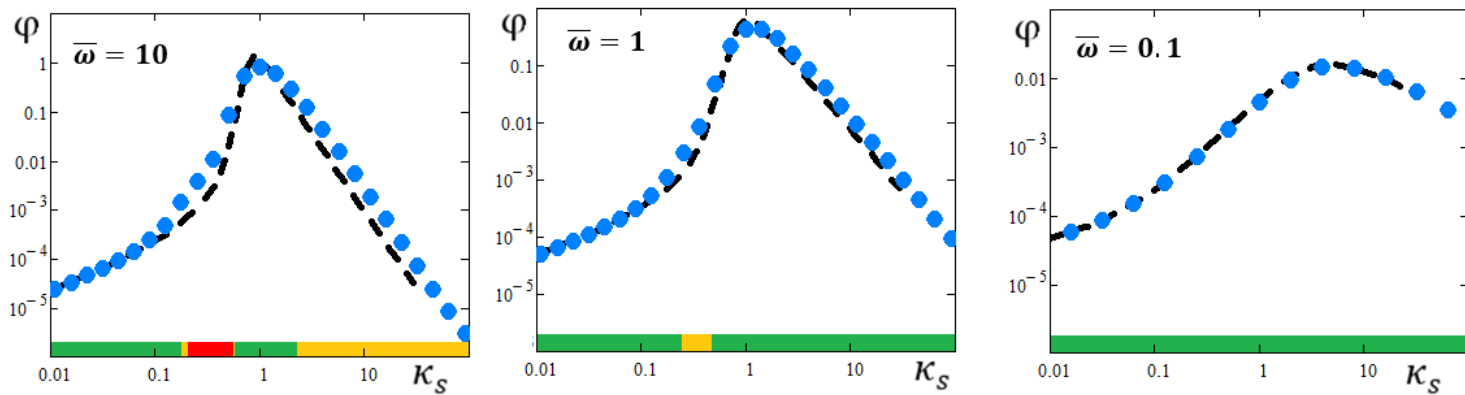
Работа двухэлементного параболического вейвлет-приемника

$$\bar{K}_{\Pi}(\rho) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\rho}{\mu_2}\right)^2 & \text{при } 0 \leq \frac{\rho}{\mu_2} \leq 1; \\ \alpha_2 \left[1 - \left(\frac{\rho}{\mu_2}\right)^2\right] \left[4 - \left(\frac{\rho}{\mu_2}\right)^2\right] & \text{при } 1 < \frac{\rho}{\mu_2} \leq 2 \\ 0 & \text{при } \frac{\rho}{\mu_2} > 2. \end{cases}$$



--- приведенный скалярный спектр φ ●●● выходной сигнал приемника φ_{mp} $\Delta = 10 \lg(\varphi_{mp}/\varphi)$

■ $|\Delta| > 5$ ■ $3 < |\Delta| < 5$ ■ $|\Delta| < 3$

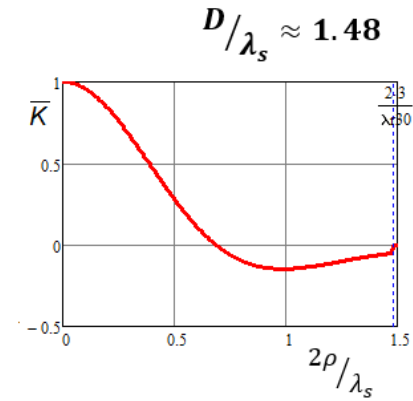


**Работа двухэлементного вейвлет-приемника
«ограниченная мексиканская шляпа»**

$$\bar{K}_{\text{МН}}(\rho) = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 \right]$$

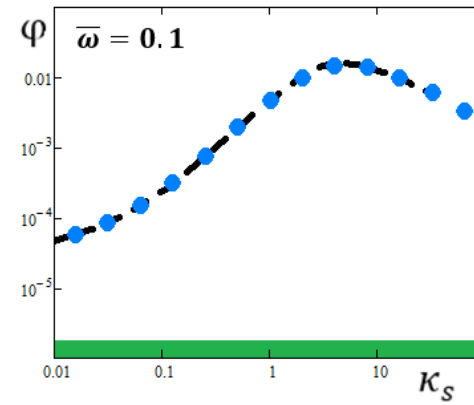
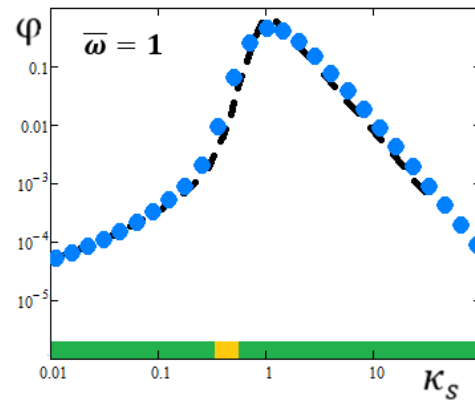
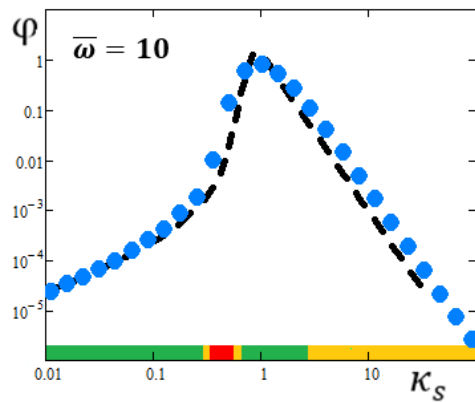
$$\bar{K}_{\text{МНс}}(\rho, R_e) = \begin{cases} \bar{K}_{\text{МН}}(\rho) - \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{R_e}{\mu} \right)^2 \right] & \text{при } 0 \leq \rho \leq R_e \\ 0 & \text{при } \rho > R_e \end{cases}$$

$$R_e/\mu = 0.3$$



--- приведенный скалярный спектр φ ●●● выходной сигнал приемника φ_{mp} $\Delta = 10 \lg(\varphi_{mp}/\varphi)$

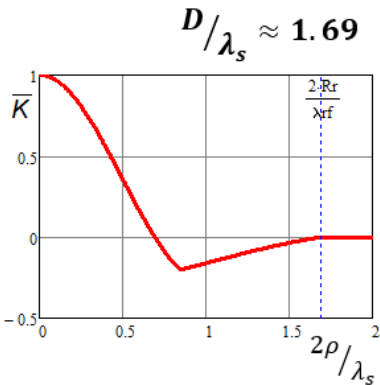
■ $|\Delta| > 5$ ■ $3 < |\Delta| < 5$ ■ $|\Delta| < 3$



Работа двухэлементного бesselева вейвлет-приемника

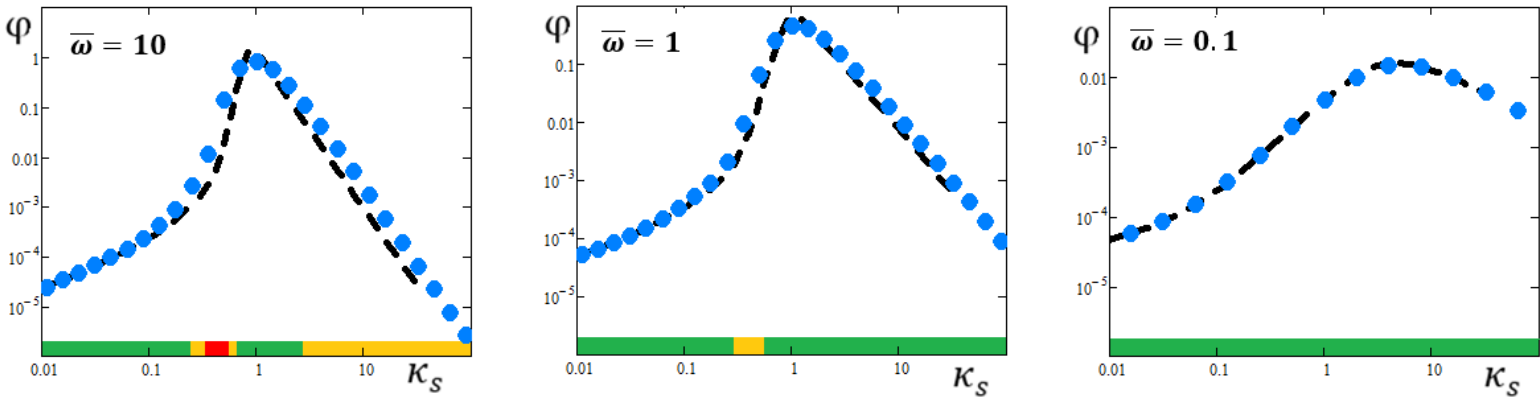
$$\bar{K}_{2B}(\rho) = \frac{2}{3} \left[4b\left(\frac{2\rho}{\mu}\right) - b\left(\frac{\rho}{\mu}\right) \right]$$
$$b(\rho) = \begin{cases} \frac{J_1(\rho)}{\rho} & \text{при } 0 < \rho \leq rJ_1 \\ 0 & \text{при } \rho > rJ_1 \end{cases}$$

$rJ_1 \approx 3.8$ – первый корень бesselевой функции $J_1(\rho)$.



--- приведенный скалярный спектр φ ●●● выходной сигнал приемника φ_{mp} $\Delta = 10 \lg(\varphi_{mp}/\varphi)$

■ $|\Delta| > 5$ ■ $3 < |\Delta| < 5$ ■ $|\Delta| < 3$



На следующем слайде представленные результаты относятся к применению трехэлементного вейвлет-приемника.

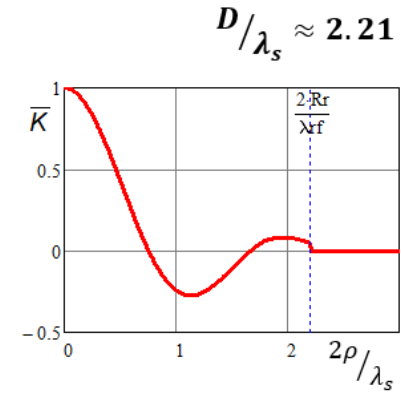
Результаты моделирования пространственного вейвлет-анализа турбулентных пульсаций давления демонстрируют эффективную оценку волновых характеристик. Здесь в отличие от двухэлементных вейвлет-приемников отклонение не превышает величины 2 дБ во всем исследованном частотно-волновом диапазоне.

Работа трехэлементного бesselова вейвлет-приемника

$$\bar{K}_{3B}(\rho) = \frac{2}{3} \left[4b_1 \left(\frac{2\rho}{\mu} \right) - b \left(\frac{\rho}{\mu} \right) \right]$$

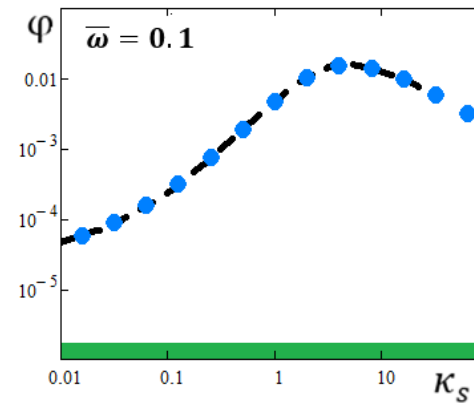
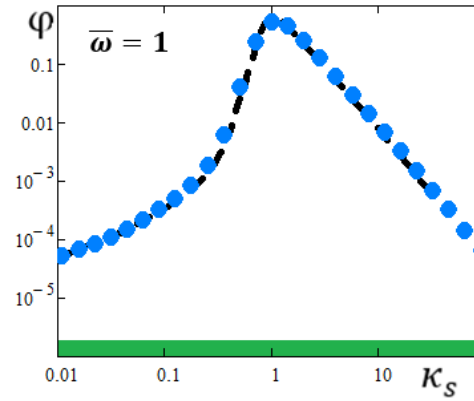
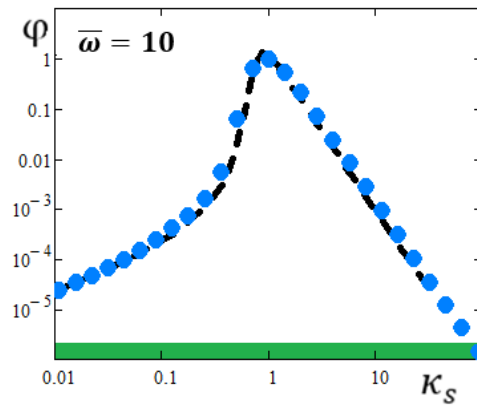
$$b(\rho) = \begin{cases} \frac{J_1(\rho)}{\rho} & \text{при } 0 < \rho \leq rJ_1 \\ 0 & \text{при } \rho > rJ_1 \end{cases}; \quad b_1(\rho) = \begin{cases} \frac{J_1(\rho)}{\rho} & \text{при } 0 < \rho \leq R0 \\ 0 & \text{при } \rho > R0 \end{cases}$$

$rJ_1 \approx 3.8$ – первый корень бesselовой функции $J_1(\rho)$; $R0 \approx 9.5$



--- приведенный скалярный спектр φ ●●● выходной сигнал приемника φ_{mp} $\Delta = 10 \lg(\varphi_{mp}/\varphi)$

■ $|\Delta| < 2$



Основные результаты

1. Компактные двухэлементные изотропные вейвлет-приемники способны обеспечить удовлетворительное решение задачи оценки волновых характеристик пристеночных пульсаций давления в пограничном слое в широком частотно-волновом диапазоне. Диаметры двухэлементных приемников составляют примерно 1.5 длины волны, на которую настроен волновой фильтр.
2. Применение трехэлементных вейвлет-приемников, диаметр которых составляет примерно 2.2 длины регистрируемой волны, позволяет достичь весьма качественной оценки волновых характеристик во всем исследованном частотно-волновом диапазоне.
3. Результаты модельного вейвлет-анализа достаточно близки для различных гладких распределений локальной чувствительности по радиусу, что практически снимает труднорешаемую задачу обеспечения конкретных локальных характеристик |приемной поверхности вейвлет-приемника при физических измерениях.

Выводы

1. Использование скалярных волновых фильтров в качестве изотропных вейвлет-приемников позволяет осуществить пространственный вейвлет-анализ турбулентных полей пристеночных пульсаций давления.
2. Методы скалярной волновой фильтрации существенно расширяют возможности экспериментального исследования пространственно-временной структуры полей пристеночных пульсаций давления.
3. Выделение отдельных компонент частотно-волнового спектра посредством изотропных вейвлет-приемников позволяет определять вклад различных масштабов турбулентного движения жидкости или газа..

Подробные результаты моделирования пространственного (волнового) вейвлет-анализа полей пристеночных пульсаций давления представлены в [3].

Литература

1. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Модели и методы скалярной волновой фильтрации полей пристеночных турбулентных пульсаций давления // Акустический журнал. 2022, том 68, № 6, с. 670–678.
2. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Характеристики скалярного частотно-волнового спектра пристеночных пульсаций давления в безградиентном турбулентном пограничном слое // Акустический журнал. 2024, том 70, № 2, с. 244–252.
3. Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Моделирование работы скалярных волновых фильтров – изотропных вейвлетов – в поле пристеночных турбулентных пульсаций давления // Акустический журнал. 2025 том 71, № 5.