

Вейвлеты в квантовой теории поля и теории стохастических процессов

М.В.Алтайский

ИКИ РАН, Москва

Сессия научного совета РАН по акустике
18 сентября 2025, ИКИ РАН, Москва

Теория случайных процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с гауссовой случайной силой в правой части допускают теоретико-полевую формулировку в виде производящего функционала. Это позволяет строить многомасштабные разложения таких процессов переходя от координатно-зависимых полей $u(x, \cdot)$ к их вейвлет-образам $u_a(x, \cdot)$, зависящим от масштаба a . Теория является конечной по построению, а ренормгрупповая симметрия представляет собой симметрию между флуктуациями различных масштабов. Турбулентные поправки к вязкости и парному коррелятору скорости вычислены в однопетлевом приближении. Это дает зависимость турбулентной вязкости от масштаба наблюдения.

Ссылки

MA, Quantum field theory without divergences, Phys. Rev. D 81 (2010) 125003

MA, M.Hnatch and N.E.Kaputkina, Renormalization of viscosity in wavelet-based model of turbulence, Phys. Rev. E 98 (2018) 033116

- Квантовополевой подход к теории турбулентности
- Колмогоровская теория турбулентности
- Ренормализационная группа
- Разделение флуктуаций различных масштабов с помощью вейвлет-преобразования
- Конечные полевые теории на основе масштабозависимых полей $u_a(x, t)$
- Ренормгруппа в формализме масштабозависимых полей
- Турбулентная вязкость

References:

M.V.Altaisky, M.Hnatich and N.E.Kaputkina,
Renormalization of viscosity in wavelet-based model of turbulence,
Phys. Rev. E **98**(2018)033116

Турбулентность в несжимаемой жидкости

Турбулентность:

Хаотическое движение жидкости, возникающее из ламинарного при превышении некоторых значений параметров

Симметрии:

однородность $P[\mathbf{u}(t, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})] = P[\mathbf{u}(t, \mathbf{x})]$

стационарность $P[\mathbf{u}(t + \Delta t, \mathbf{x})] = P[\mathbf{u}(t, \mathbf{x})]$

изотропия $P[\mathbf{u}(t, \hat{R}(\theta)\mathbf{x})] = P[\mathbf{u}(t, \mathbf{x})]$

эргодичность

$$\langle f[\mathbf{u}(t, \mathbf{x})] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[\mathbf{u}(t, \mathbf{x})] dt$$

Турбулентность в несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ описывается уравнениями Навье-Стокса со случайной силой $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \cdot)$ в правой части

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \cdot)$$

Колмогоровская теория турбулентности

Reynolds similarity law [O.Reynolds, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **186**(1895)123-164]: Let

$$\tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \tilde{t} = t \frac{V}{L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\rho V^2}$$

then the flows of the same type with equal Reynolds numbers $Re = \frac{VL}{\nu}$ are similar to each other.

Гипотезы Колмогорова (K41) *ДАН СССР*, 1941, т.30, сс. 9-13

I. Для локально изотропной турбулентности n -точечное распределение поля скорости F_n однозначно определяется кинематической вязкостью ν и скоростью диссипации энергии на единицу массы ε .

II. В инерционном интервале, т.е., когда масштаб наблюдения l существенно превосходит колмогоровский масштаб $l_0 = \nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$, распределения однозначно определяются скоростью диссипации энергии на единицу массы ε , и не зависят от вязкости ν .

Структурные функции и спектр энергии

Спектр энергии турбулентных пульсаций

$$E = \int |u(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty E(k) dk$$

где

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} \langle u(\mathbf{k}) u(-\mathbf{k}) \rangle d^3\mathbf{k}$$

Колмогоровский анализ размерностей дает

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

Для структурных функций поля скорости

$$S_q(l) = \langle |\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l})|^q \rangle$$

подсчет размерностей дает

$$S_q(l) \propto (\varepsilon l)^{\frac{q}{3}}, \quad \delta u(l) \propto l^{\frac{1}{3}}$$

Поправки к колмогоровскому скейлингу на масштабе наблюдения l должны зависеть от l/l_0 и l/L

Квантовополевой подход к турбулентности

Турбулентность = случайный процесс, описываемый СДУ $\hat{V}[u(x)] = f(x, \cdot)$, где $\hat{V}$ – нелинейный оператор, а $f(x, \cdot)$ – случайная сила. Задача заключается в конструировании *производящего функционала* $G[A_u(x)]$, такого, что статистические моменты решения $u(x, \cdot)$ могут быть получены варьированием:

$$\langle u(x_1) \dots u(x_n) \rangle = \left. \frac{\delta^n G[A_u(x)]}{\delta A_u(x_1) \dots \delta A_u(x_n)} \right|_{A_u=0}$$

Производящий функционал может быть записан в виде

$$G[A_u] = \int e^{\int A_u(x)u(x)dx} P[u(x)] \mathcal{D}u,$$

где вероятность конфигурации $u(x)$ определяется из уравнений движения со случайной силой в правой части:

$$P[u(x)] \sim \int \delta(\hat{V}[u(x)] - f(x)) \rho[f] \mathcal{D}f, \quad \rho[f] \sim e^{-\frac{f D^{-1} f}{2}}$$

Формализм удвоения полей

P.C.Martin, E.D. Sigia, and H.A. Rose, *Phys. Rev. A* **8**(1973)423

С помощью введения дополнительного поля u' можно записать дельта-функцию от уравнений движения в виде экспоненты: $\delta(\cdot) \sim \int \mathcal{D}u'(x) \exp\left(\int dx u'(x)(\cdot)\right)$. Для уравнений Навье-Стокса это приводит к производящему функционалу вида

$$G[A] = \int \exp\left(S[\Phi] + \int d^d x dt A \Phi\right) \mathcal{D}\Phi \equiv e^{W[A]},$$

где $\Phi = (u(t, x), u'(t, x))$ – дублет полей; $u'(t, x)$ – Мартин-Сиджиа-Роузовское поле. $A(t, x) \equiv (A_u, A_{u'})$ – произвольный аргумент варьирования. "Действие" имеет вид

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \int u' D u' + \int u' [-\partial_t u + \nu \Delta u - (u \cdot \partial) u],$$

где $D(x - x') = \langle f(x) f(x') \rangle$. Давление исключается с помощью условия несжимаемости. Детерминант $\|\delta V / \delta u\|$ можно отбросить путем переопределения функций Грина на разрыве L.Ts.Adzhemyan, A.N. Vasil'ev and Yu.M. Pis'mak, *Teor. Mat. Phys.* **57**(1983) pp.1131-1143(en), 268-281(ru)

Выбор случайной силы

Работа случайной силы $D(x - x') = \langle f(x)f(x') \rangle$ должна компенсировать диссипацию энергии $\langle uf \rangle = \varepsilon$. Случайная сила считается δ -коррелированной по времени, и сконцентрированной на ИК масштабах в пространстве.

$$\langle \dot{u}_i(t, \mathbf{x}) u_i(t, \mathbf{x}) \rangle = \int e^{i\mathbf{x}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)} \langle f_i(t, \mathbf{k}_1) \int^t f_i(\tau, \mathbf{k}_2) d\tau \rangle \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}$$

для δ -коррелированной случайной силы :

$$\langle f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}') \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d(k) P_{ij}(\mathbf{k}) e^{ik(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \text{ где } P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

имеем

$$\varepsilon = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} d(k),$$

при нормировке $G_0(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}$

Обычно выбирают $\langle f(k)f(k') \rangle \sim \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') k^{-y}$;

$y > -2$ для сильно неравновесных течений V.Yakhot, S.Orszag.
J.Sci.Comp. 1(1986)3

Фейнмановские разложения

Действие S состоит из $S_0[\Phi] = \frac{\Phi K \Phi}{2}$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \partial_t + \hat{L} \\ -\partial_t + \hat{L} & D \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \nu \Delta,$$

и нелинейного взаимодействия

$$V[\Phi] = -\frac{1}{2}u_i'[\delta_{is}\nabla_j + \delta_{ij}\nabla_s]u_ju_s$$

Функциональное интегрирование по Φ , выполненное со свободным действием S_0 , дает матрицу вторых моментов $W[J] = \frac{JK^{-1}J}{2}$, где

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{D}{|\partial_t - \hat{L}|^2} & (\partial_t - \hat{L})^{-1} \\ (\partial_t - \hat{L})^{-1T} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle uu' \rangle = \frac{1}{-\omega + \nu_0 k^2}$$

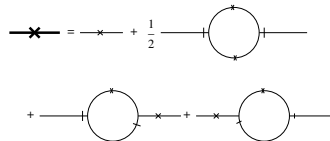
$$\langle uu \rangle = \frac{d(k)}{\omega^2 + v_0^2 k^4}$$

$$V_{ijs} = \frac{\imath}{2}(k_j\delta_{is} + k_s\delta_{ij})$$

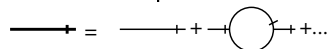
where k is momentum
incident to u' .

- Вывод колмогоровского спектра

$$E(k) = C_K \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$
- Вычисление константы Колмогорова $C_K \approx 1.6$
- Skewness $S = -\frac{\langle (\nabla u)^3 \rangle}{\langle (\nabla u)^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \approx 0.6$
- Турбулентная вязкость
- Перенос пассивной примеси
- МГД



Вычисление парного коррелятора поля скорости



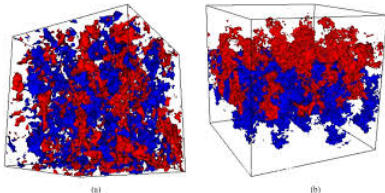
Вычисление функций Грина дает турбулентные поправки поправки к вязкости

Wavelet methods in turbulence

$$u_a(b) = \int \frac{1}{a} \bar{g} \left(\frac{x-b}{a} \right) u(x) dx$$

There are a number of reasons for using wavelets in turbulence

- Intermittency
- Self-similarity
- Fractal structure



Pictures from asme.org

... without saying a word on wavelet numeric simulations.

- V.Zimin, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **17**(1981)941
- M.Vergassola and U.Frisch, *Physica D* **54**(1991)58
- J.F.Muzy, E.Bacry and A.Arneodo, *Phys. Rev. Lett* **67**(1991)3515
- C.Meneveau, *J.Fluid.Mech* **232**(1991)469
- M.Farge, *Ann. rev. fluid. mech.* **24**(1992) 395
- N.Astafieva, *Phys. Usp.* **39**(1996)1085
- and many others ...

Вейвлет-разложение поля скорости

MA, M.Hnatich, N.E.Kaputkina, *Phys. Rev. E* **98** (2018)033116

$$\lambda \ll$$

mean free path

$$l_0 \ll$$

Kolmogorov scale

$$a < L$$

External scale

Для анализа *локальных* свойств турбулентного поля скорости $u(t, \mathbf{x})$ применяют непрерывное вейвлет-преобразование (CWT):

$$u_a(\mathbf{b}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^d} \bar{g}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{a}\right) u(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x}$$

Обратное преобразование:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_g} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^d} g\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{a}\right) u_a(\mathbf{b}) d^d \mathbf{b},$$

при достаточно слабых ограничениях на базисный вейвлет g :

$$C_g = \int_0^\infty |\tilde{g}(a)|^2 \frac{da}{a} < \infty.$$

Имеет место частотная фильтрация: $\tilde{u}_a(\mathbf{k}) = \bar{\tilde{g}}(a\mathbf{k}) \tilde{u}(\mathbf{k})$

Многомасштабный производящий функционал

Многомасштабная КТП:

- $\Phi(x)$ выражается через $\Phi_a(x)$ посредством обратного вейвлет-преобразования.
- Мера интегрирования $dx \equiv dt d^d x$ меняется на $d\mu_a = dt \frac{d^d x da}{a}$

Так строится производящий функционал для масштабно-зависимых полей

$$G[A] = e^{W[A]} = \int \mathcal{D}\Phi_a(x) e^{S[\Phi_a] + \int \frac{dx da}{a} A_a(x) \Phi_a(x)}$$

Функциональные производные берутся по мере $d\mu_a$:

$$\langle \Phi_{a_1}(x_1) \dots \Phi_{a_n}(x_n) \rangle_c = \frac{\delta^n W[A]}{\delta A_{a_1}(x_1) \dots \delta A_{a_n}(x_n)} \Big|_{A=0}.$$

Случайная сила, δ -коррелированная по x и t , сосредоточена на внешнем масштабе L : $D_{aa'}(\mathbf{k}) \sim \delta(t - t') \delta(a - a') \delta(a - L)$:

Диаграммная техника многомасштабной теории

- Интегрирование на внутренних линиях выполняется по мере $\frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{da}{a} \frac{1}{C_g}$
- 2 типа линий: а) Функции Грина $\langle uu' \rangle$ и б) корреляционные функции $\langle uu \rangle$; они определяются элементами матрицы пропагатора, умноженными на вейвлет-факторы $\tilde{g}(a\mathbf{k})$.
- Каждая линия с импульсом k содержит ортогональный проектор $P_{ij}(\mathbf{k})$, где i и j векторные индексы линии:

$$G_{i\alpha j\beta}^{(0)} = \frac{\tilde{g}(\alpha\mathbf{k}) P_{ij}(\mathbf{k}) \bar{\tilde{g}}(\beta\mathbf{k})}{-i\omega + \nu_0 \mathbf{k}^2}, \quad D_{i\alpha j\beta}^{(0)} = \frac{g_0 \nu_0^3}{C_g L} \frac{\tilde{g}(\alpha\mathbf{k}) P_{ij}(\mathbf{k}) |\tilde{g}(kL)|^2 \bar{\tilde{g}}(\beta\mathbf{k})}{|-i\omega + \nu_0 \mathbf{k}^2|^2}$$

- Вершины диаграмм задаются выражением $m_{abc}(k) = \frac{i}{2} (k_b \delta_{ac} + k_c \delta_{ab})$, умноженным на 3 вейвлет-фактора.
- Внутренние линии диаграмм не содержат масштабов a_i , меньших минимального масштаба всех внешних линий $A = \min_e a_e$.

Однопетлевая поправка к вязкости

Интегрирование функций Грина по внутренним линиям в диапазоне масштабов (A, ∞) дает фактор $f_g^2(x)$:

$$f_g(x) = \frac{1}{C_g} \int_x^\infty \frac{|\tilde{g}(a)|^2}{a} da, \quad x = kA$$

The corrections to viscosity are determined by the vertex function $\Gamma^{(2)}$, which is inverse to two-point Green function $\Gamma^{(2)} G^{(2)} = 1$.

In null order approximation

$$\Gamma_0^{(2)} = \tilde{g}(\alpha \mathbf{k}) P_{ij}(\mathbf{k}) \tilde{g}(\beta \mathbf{k}) (-i\omega + \nu_0 \mathbf{k}^2)$$

Turbulent contribution to viscosity:

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma_0^{(2)} + \Sigma$$

Безразмерный масштаб
 $\xi = A/L$

Calculations with g_1 wavelet

$$\tilde{g}_1(k) = -i k e^{-\frac{k^2}{2}},$$

$$C_{g_1} = \frac{1}{2},$$

$$f_{g_1}(x) = e^{-x^2}$$

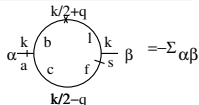
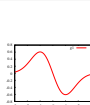


Диаграмма "собственной энергии" Σ

$$p^{\pm} = \frac{k}{2} \pm q$$

$$\Sigma = -\nu_0 g_0 k L \int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{(2\pi)^2} e^{-(kL)^2(1+4\xi^2)(\frac{1}{4}+y^2)} \times \\ \times \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{L_{as}(k, p^+, p^-) e^{-(kL)^2 y \cos \theta}}{\frac{1}{4} + y^2 - i \frac{\omega}{2\nu_0 k^2}}$$

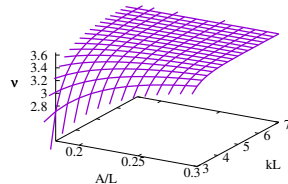
$$L_{as}(k, p^+, p^-) = \frac{\delta_{as}}{4} \left[\frac{(p^+ k)(p^+ p^-)}{p^{+2}} - (k p^-) \right] \\ + \frac{p_a^+ p_s^-}{2} \left[\frac{(p^+ k)}{p^{+2}} - \frac{(p^- k)(p^+ p^-)}{p^{-2} p^{+2}} \right] \\ + p_a^- p_s^- \left[\frac{(k p^-)}{p^{-2}} - \frac{(p^+ k)(p^+ p^-)}{2 p^{-2} p^{+2}} \right] \\ - \frac{k_a p_s^-}{2} + p_a^+ k_s \frac{p^+ p^-}{4 p^{+2}} - \frac{p_a^- k_s}{4}$$

Перенормировка вязкости: $\nu(\xi) = \nu_L (1 - g_L \Sigma^\delta(\xi))$

Можно выразить вклад "собственной энергии" в обратный пропагатор $\Gamma^{(2)}$ в виде сумму трансверсальной и продольной частей. Трансверсальная часть ответственна за поправки к вязкости:

$$\Sigma_{as}^{\alpha=\beta=A} = \nu_0 g_0 \Sigma^\delta k^2 \left(\delta_{as} - \frac{k_a k_s}{k^2} \right) + \nu_0 g_0 \Sigma^\lambda k_a k_s$$

Величина $\Sigma^\delta(\xi)$ конечна, и может быть вычислена для малых масштабах $\frac{A}{L} \equiv \xi \lesssim 1$, если известны ν_L и g_L на внешнем масштабе L . Мы их не знаем, и вынуждены применять итерационную процедуру РГ.



The dependence of turbulent viscosity $\nu_A(k)$ on the observation scale $\xi = A/L$ and the dimensionless momentum $x = kL$.

Calculations were performed in the IR region at the assumption of invariant $g_A \nu_A^3 = g_L \nu_L^3$, i.e., small $K(\xi)$, and normalization momentum $x_* = 4\pi$.

Figure from MA, M.Hnatich, N.E.Kaputkina, *Phys. Rev. E*98(2018)

033116

$$\Sigma^\delta = \frac{kL}{128C_g} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(2\pi)^2} \frac{e^{-(kL)^2(1+4\xi^2)(\frac{1}{4}+y^2)}}{\frac{1}{4} + y^2 - i\frac{\omega}{2\nu_0 k^2}} \times \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)(8\mu^2 y^2 + \mu(8y^3 - 10y) + 4y^2 + 1)}{\left(\frac{1}{4y} + y - \mu\right) \left(\frac{1}{4y} + y + \mu\right)} e^{-(kL)^2 y \mu}$$

Уравнения ренормализационной группы

Сетка масштабов

$$\frac{l_0}{L} = \xi_0 < \dots < \xi_{L-2} < \xi_{L-1} < \xi_L = 1$$

$$\xi_k = \xi_0 \delta^k, \delta > 1, \ln \xi_k = \ln \xi_0 + k \ln \delta$$

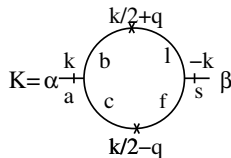
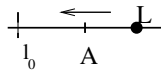
Итерационная процедура:

$$\frac{\nu_{k-1} - \nu_k}{\nu_k} = -g(\xi_k) \Sigma(\xi_{k-1}) \leftrightarrow \frac{d \ln \nu}{d \ln \xi} = g(\xi) \frac{\Sigma(\xi)}{\ln \delta}$$

Force renormalization $D(\xi) = g(\xi) \nu^3(\xi)/L$:

$$\frac{D_{L-1} - D_L}{D_L} = D_L * \text{OneLoop}K(\xi_{L-1}).$$

$$\frac{d \ln \nu}{d \ln \xi} = g(\xi) \frac{\Sigma(\xi)}{\ln \delta}, \quad \frac{d \ln D}{d \ln \xi} = -\frac{K(\xi)}{\ln \delta}$$



$$K(\xi) = \frac{(kL)^3}{16} \int \frac{y^4 dy}{(2\pi)^2} d\mu \frac{e^{-2(Lk)^2(1+2\xi^2)\left(\frac{1}{4}+y^2\right)} \left(\frac{1}{4}+y^2\right)}{\left(\frac{1}{4}+y^2 + i \frac{2k_0}{\nu_0 k^2}\right) \left(\frac{1}{4}+y^2 - i \frac{2k_0}{\nu_0 k^2}\right)} \frac{(1-\mu^2)(8y^2\mu^2+4y^2+1)}{\left(\frac{1}{4}+y^2-y\mu\right) \left(\frac{1}{4}+y^2+y\mu\right)}$$

$$D(\xi) = g(\xi) \nu^3(\xi) / L \Rightarrow \ln g(\xi) = \ln D + \ln L - 3 \ln \nu(\xi)$$

$g(\xi)$ можно понимать как бегущую константу связи. Уравнение РГ

$$\frac{d \ln g}{d \ln \xi} = -\frac{K(\xi)}{\ln \delta} - 3g(\xi) \frac{\Sigma(\xi)}{\ln \delta}$$

имеет решение
$$g(\xi) = \frac{g_L e^{\int_{\xi}^1 \frac{d\eta}{\eta} K(\eta)}}{1 - 3g_L \int_{\xi}^1 \frac{d\xi'}{\xi'} \Sigma(\xi') e^{\int_{\xi'}^1 \frac{d\eta}{\eta} K(\eta)}}.$$

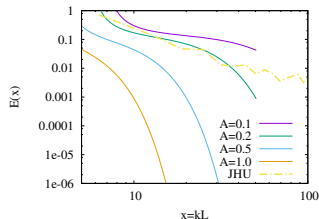
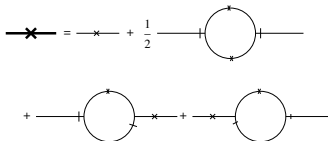
Поскольку $K(\xi) \ll 1$, $K(\xi) \ll \Sigma(\xi)$ коррелятор силы можно считать практически константой

$$g(\xi) = \frac{g_L}{1 - 3g_L \int_{\xi}^1 \frac{\Sigma(\eta)}{\ln \delta} \frac{d\eta}{\eta}}, \quad \ln \frac{\nu(\xi)}{\nu_L} = - \int_{\xi}^1 \frac{g_L}{1 - 3g_L \int_{\xi'}^1 \frac{\Sigma(\eta)}{\ln \delta} \frac{d\eta}{\eta}} \frac{\Sigma(\xi')}{\ln \delta} \frac{d\xi'}{\xi'},$$

где $g_0 \nu_0^3 \approx g_L \nu_L^3$.

Вычисление спектра энергии

Парный коррелятор поля скорости $\langle \tilde{u}_a(\omega, \mathbf{k}) \tilde{u}_{a'}^*(\omega', \mathbf{k}') \rangle$ в однопетлевом приближении



From *Phys. Rev. E* 98(2018)033116

$$\begin{aligned}
 C(k, \xi) = & \frac{g_0 \nu_0^3}{\nu_A(k)} L e^{-(Lk)^2} + \frac{(g_0 \nu_0^3)^2}{128} \frac{(Lk)L}{\nu_A^4(k)} e^{-2\xi^2(Lk)^2} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2(kL)^2(1+2\xi^2)(\frac{1}{4}+y^2)}}{1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}+y^2)} \\
 & \times \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)(8\mu^2 y^2 + 4y^2 + 1)}{(\frac{1}{4}+y^2-y\mu)(\frac{1}{4}+y^2+y\mu)} + \frac{(g_0 \nu_0^3)^2}{32} \frac{(Lk)L}{\nu_A^4(k)} \\
 & \times e^{-(Lk)^2(1+2\xi^2)} \int_0^\infty \frac{y^4 dy}{(2\pi)^2} \frac{e^{-(kL)^2(1+4\xi^2)(\frac{1}{4}+y^2)}}{1 + 2(\frac{1}{4}+y^2)} \\
 & \times \int_{-1}^1 d\mu \frac{(\mu^2-1)(8\mu^2 y^2 + 2\mu y(4y^2-5) + 4y^2 + 1)}{(\frac{1}{4}+y^2-y\mu)(\frac{1}{4}+y^2+y\mu)} e^{-(kL)^2 y \mu}
 \end{aligned}$$

Спасибо за внимание !