

Магнитное динамо Казанцева-Крейчнана в рамках каскадного МГД-моделирования

Юшков Егор, Абушзада Ильяс, Д.Д. Соколов, П.Г. Фрик

ИКИ РАН, Россия

Charles University, Чехия

МГУ, Россия

ИМСС УрО РАН, Россия

MSS-24, Москва, 26.11.2024

Конференция “Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность”

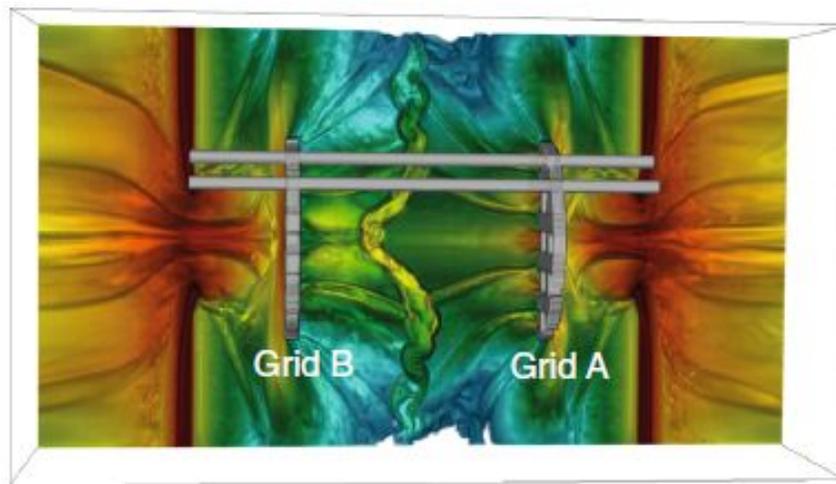
Турбулентное МГД-динамо

Теория магнитного динамо описывает процесс генерации магнитной энергии в конвективных проводящих средах. В работе рассматривается один из режимов такой генерации, называемый мелкомасштабным турбулентным динамо.

$$\partial_t \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{V} + \eta \Delta \mathbf{V}$$

Базовым подходом динамо-теории является усреднение уравнения магнитной индукции по случайному, стохастически стационарному, полю скорости. Так получение первого момента дает модель среднего поля, а получение второго – модель турбулентного динамо.

Основная сложность в изучении турбулентного динамо – это недостаток экспериментальных данных, который объясняется тем, что в процессе генерации среднее магнитное поле не растет, а растет только средняя энергия, которую наблюдать существенно сложнее.



ARTICLE

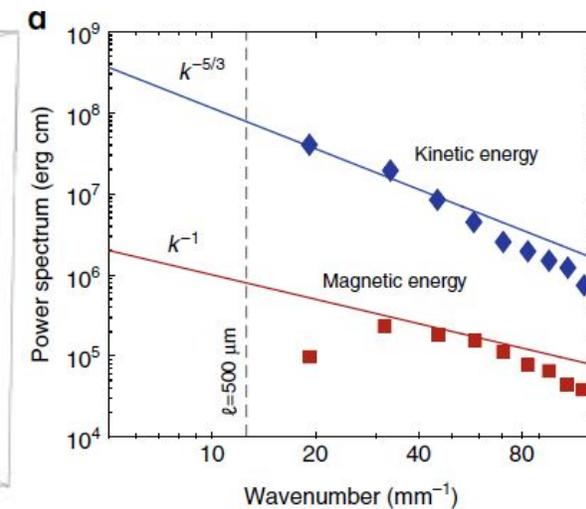
DOI: 10.1038/s41467-018-02953-2

OPEN

Laboratory evidence of dynamo amplification of magnetic fields in a turbulent plasma

P. Tzeferacos^{1,2}, A. Rigby¹, A. F. A. Bott¹, A.R. Bell¹, R. Bingham^{3,4}, A. Casner⁵, F. Cattaneo², E.M. Churazov^{6,7}, J. Emig⁸, F. Fiuza⁹, C.B. Forest¹⁰, J. Foster¹¹, C. Graziani², J. Katz¹², M. Koenig¹³, C.-K. Li¹⁴, J. Meinecke¹, R. Petrasso¹⁴, H.-S. Park⁸, B.A. Remington⁸, J.S. Ross⁸, D. Ryu¹⁵, D. Ryutov⁸, T.G. White¹, B. Reville¹⁶, F. Miniati¹⁷, A.A. Schekochihin¹, D.Q. Lamb², D.H. Froula¹² & G. Gregori^{1,2}

Magnetic fields are ubiquitous in the Universe. The energy density of these fields is typically comparable to the energy density of the fluid motions of the plasma in which they are embedded, making magnetic fields essential players in the dynamics of the luminous matter. The standard theoretical model for the origin of these strong magnetic fields is through the amplification of tiny seed fields via turbulent dynamo to the level consistent with current observations. However, experimental demonstration of the turbulent dynamo mechanism has remained elusive, since it requires plasma conditions that are extremely hard to re-create in terrestrial laboratories. Here we demonstrate, using laser-produced colliding plasma flows, that turbulence is indeed capable of rapidly amplifying seed fields to near equipartition with the turbulent fluid motions. These results support the notion that turbulent dynamo is a viable mechanism responsible for the observed present-day magnetization.



Модель Казанцева-Крейчнана

Модель КК описывает динамику корреляционной функции магнитного поля $M(\mathbf{r})$, а соответственно и энергии, в коротко-коррелированном поле скорости. Впервые она была получена в 1967 году А.П. Казанцевым для дельта коррелированного во времени зеркально симметричного турбулентного течения, стационарные свойства которого описываются корреляционной функцией $F(\mathbf{r})$.

Модель турбулентного динамо путем замены сводится к стационарному уравнению Шредингера для осциллятора в потенциальной яме $V(\mathbf{r})$, глубина которой определяется магнитным числом Рейнольдса.

ENHANCEMENT OF A MAGNETIC FIELD BY A CONDUCTING FLUID

A. P. KAZANTSEV

Semiconductor Physics Institute, Siberian Division, USSR Academy of Sciences

Submitted June 29, 1967

Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53, 1806–1813 (November, 1967)

$$\langle u_i(\mathbf{k}, t) u_j(\mathbf{k}', t) \rangle = u(k, |t - t'|) \sigma_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2.$$

$$u(k, t) = v(k) \delta(t)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \eta \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{2M}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \xrightarrow{\varphi(r) \exp(\gamma t) r^{-2} \eta(r)^{-1/2}} \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + (V(r) - \gamma/2) \varphi = 0$$

$$\langle b_i(\mathbf{x}_1, t) b_j(\mathbf{x}_2, t) \rangle = \left(M + \frac{r}{2} \frac{\partial M}{\partial r} \right) \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{2r} \frac{\partial M}{\partial r}.$$

$$\langle u_i(\mathbf{x}_1, t) u_j(\mathbf{x}_2, t) \rangle = \left(F + \frac{r}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{2r} \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{2\eta}{r^2} + \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2$$

$$\eta(r) = \frac{1}{\text{Rm}} + \tau (F(0) - F(r))$$

Порог динамо генерации

В случае достаточно глубокой потенциальной ямы $V(r)$, за глубину которой отвечает функция турбулентной диффузии, модель КК описывает экспоненциальный рост со временем корреляционной функции магнитного поля, а следовательно и магнитной энергии.

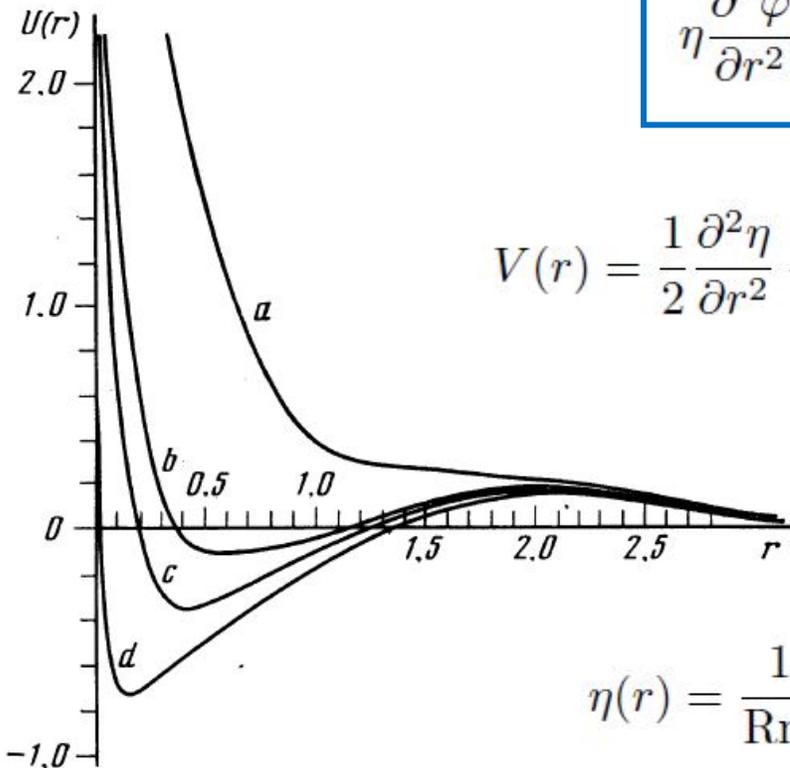


FIG. 2. Potential for $F_1 = \exp(-3r^2/5)$, $R_m = 4$ (a), 25 (b), 53, (c) 10^4 (d).

$$\eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + (V(r) - \gamma/2) \varphi = 0$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{2\eta}{r^2} + \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2$$

$$\eta(r) = \frac{1}{R_m} + \tau (F(0) - F(r))$$

Kinematic dynamo in a reflection-invariant random field

V. G. Novikov, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokolov

Applied Mathematics Institute, USSR Academy of Sciences

(Submitted 11 March 1983)

Zh. Eksp. Teor. Fiz. 85, 909–918 (September 1983)

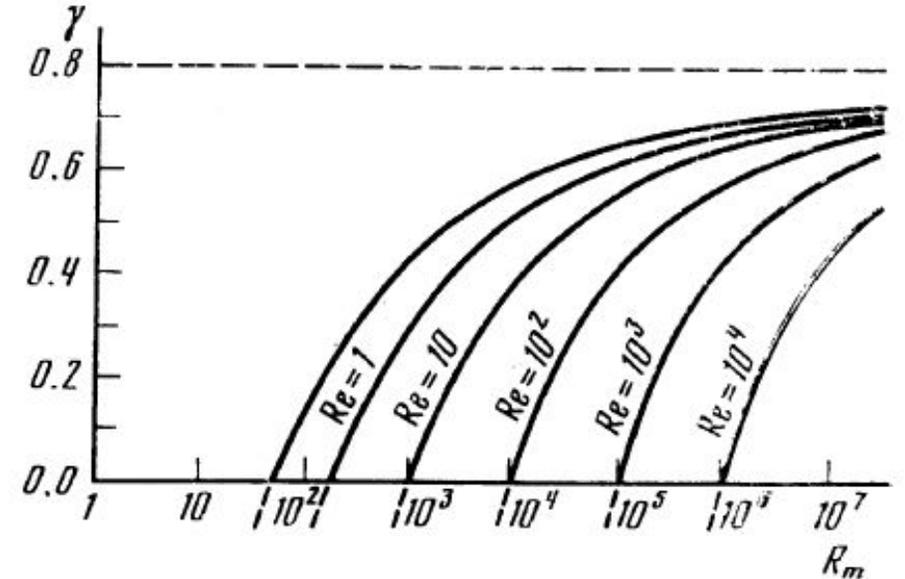


FIG. 4. Rate of exponential growth of magnetic field as a function of the magnetic Reynolds number for F_1 and F_2 with different values of Re .

Главный вопрос здесь связан с тем, насколько корректны модельные предположения о коротко коррелированности поля скорости? И почему до сих пор не удается получить экспериментальное подтверждение работы турбулентного динамо?

Каскадный МГД-подход

Формализм каскадного подхода, разработанного для описания транспорта энергии и спиральности турбулентных флуктуаций на конечном числе спектральных оболочек, был предложен академиком Обуховым для систем гидродинамического типа:

1. в бездиссипативном пределе система сохраняет фазовый объем;
2. в бездиссипативном пределе система обладает по меньшей мере одним квадратичным интегралом движения;
3. уравнения содержат квадратичную нелинейность;
4. при рассмотрении цепочки уравнений обмен энергией предполагается только между соседними оболочками.

Квадратичные интегралы движения

$$E = E_V + E_B = \int (\mathbf{v}^2 + \mathbf{B}^2) dV$$

$$H_B = \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) dV$$

$$H = \int (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) dV$$



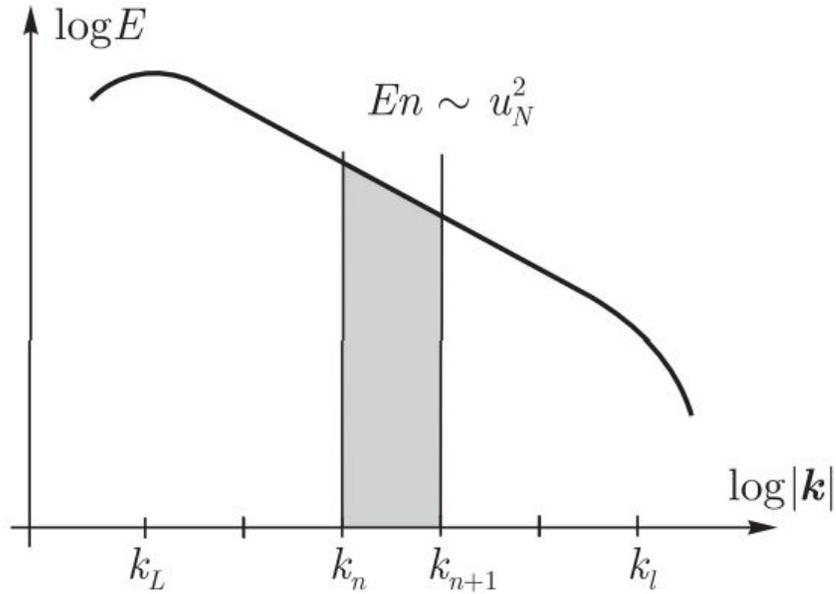
В.А. Магницкий и А.М. Обухов на заседании Ученого Совета отделения геофизики

Безразмерная МГД-система типичный пример системы гидродинамического типа с тремя законами сохранения в бездиссипативном приближении.

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla(P + B^2/2) + R^{-1} \Delta \mathbf{v}$$

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + Rm^{-1} \Delta \mathbf{B}$$

Численная модель



Расчет реализуется на 41-ой спектральной оболочке $k_n < |\mathbf{k}| < k_{n+1}$, распределенных равномерно по логарифмической шкале $k_n = 1/\lambda^n$. Каждая оболочка характеризуется коллективными комплексными переменными поля скорости U_n и магнитного поля B_n . В бездиссипативной форме записи сохраняются три модельных закона сохранения, а система представляет собой систему ОДУ, решаемых методом РК 4го порядка.

Модельные законы сохранения

$$E^T = \sum (|U_n|^2 + |B_n|^2)/2$$

$$H_m = \sum ik_n^{-1} ((B_n^*)^2 - B_n^2)/4$$

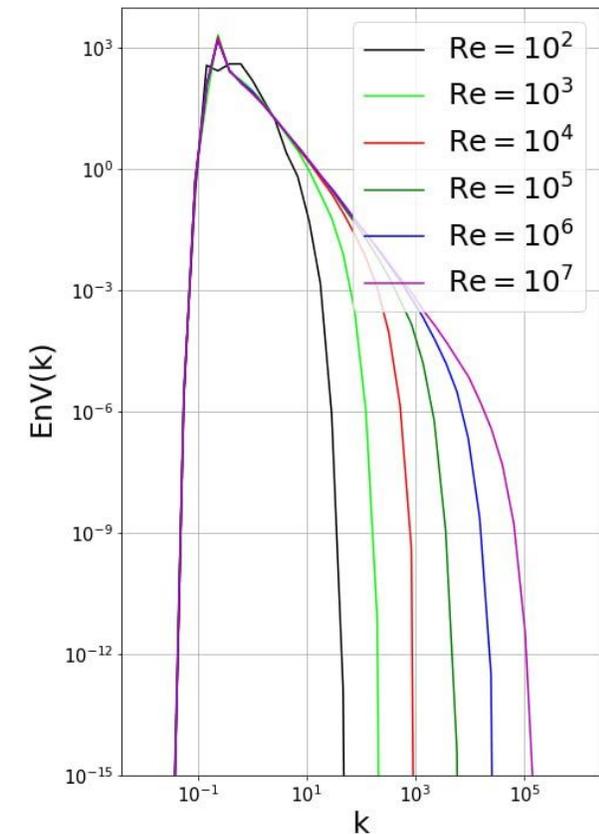
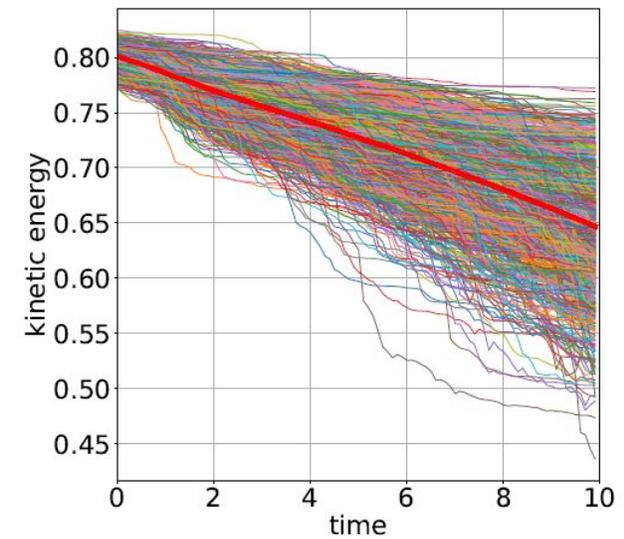
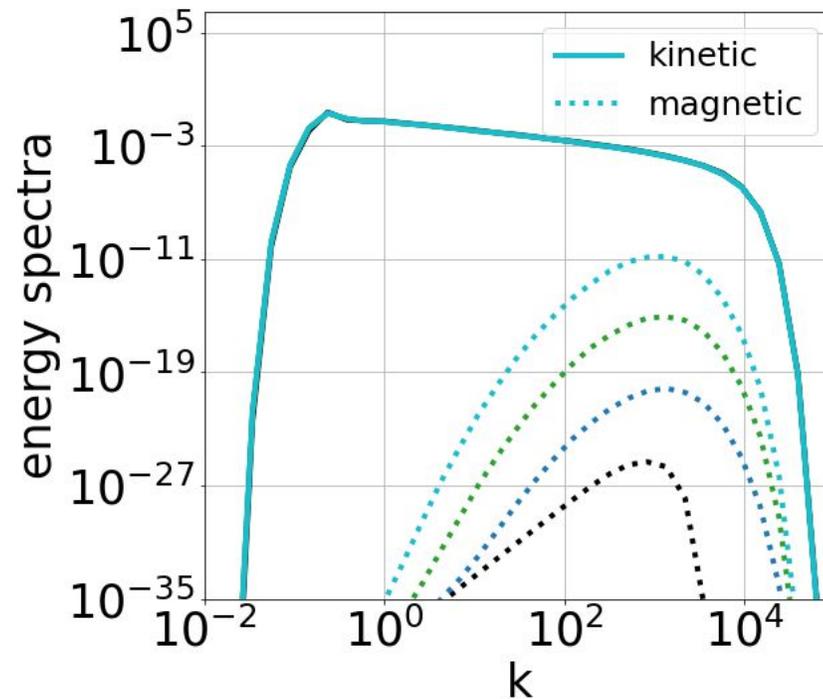
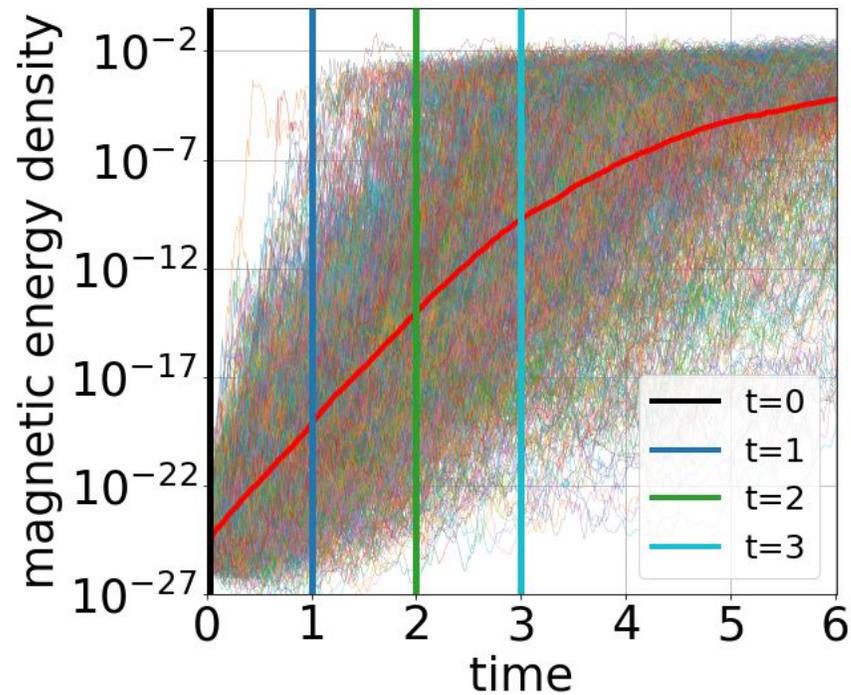
$$H = \sum (U_n B_n^* + B_n U_n^*)/2$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= W_n(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - W_n(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - \frac{k_n^2}{\text{Re}} U_n, \\ \frac{dB_n}{dt} &= W_n(\mathbf{U}, \mathbf{B}) - W_n(\mathbf{B}, \mathbf{U}) - \frac{k_n^2}{\text{Rm}} B_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= ik_n [(X_{n-1} Y_{n-1} + X_{n-1}^* Y_{n-1}^*) - \lambda X_n^* Y_{n+1}^* \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2} (X_n Y_{n+1} + X_{n+1} Y_n + X_n Y_{n+1}^* + X_{n+1}^* Y_n) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} (X_{n-1}^* Y_{n-1} - X_{n-1} Y_{n-1}^*) + \lambda X_n^* Y_{n+1}] \\ &\quad - ik_n \lambda^{-5/2} [\frac{1}{2} (X_{n-1} Y_n + X_n Y_{n-1}) + \lambda X_n^* Y_{n-1}^* \\ &\quad - \lambda^2 (X_{n+1} Y_{n+1} + X_{n+1}^* Y_{n+1}^*) + \frac{1}{2} (X_n Y_{n-1}^* + X_{n-1}^* Y_n) \\ &\quad - \lambda X_n^* Y_{n-1} + \frac{\lambda}{2} (X_{n+1}^* Y_{n+1} - X_{n+1} Y_{n+1}^*)]. \quad (6) \end{aligned}$$

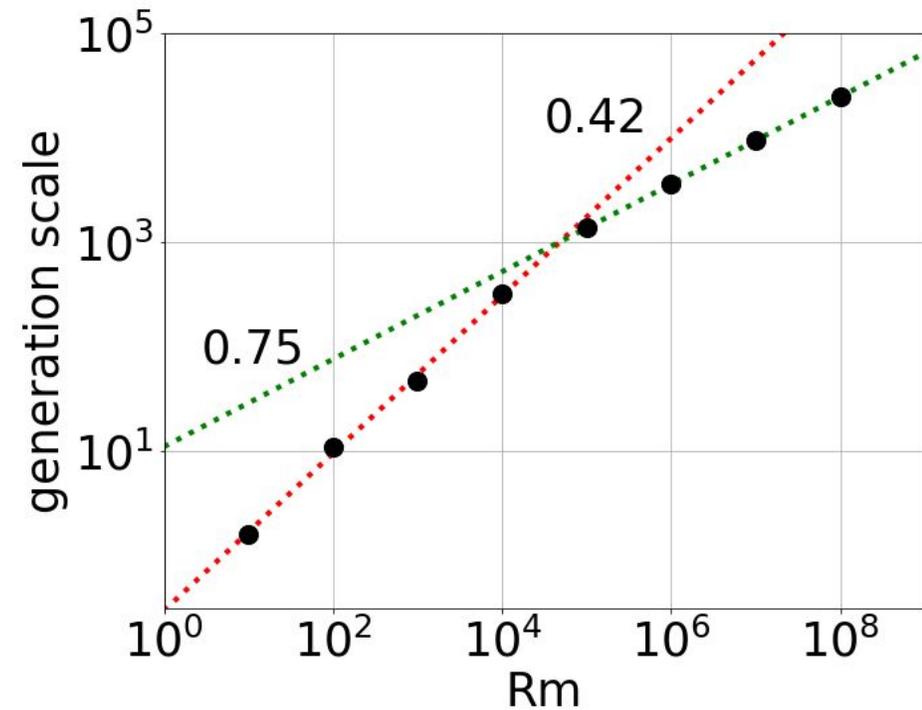
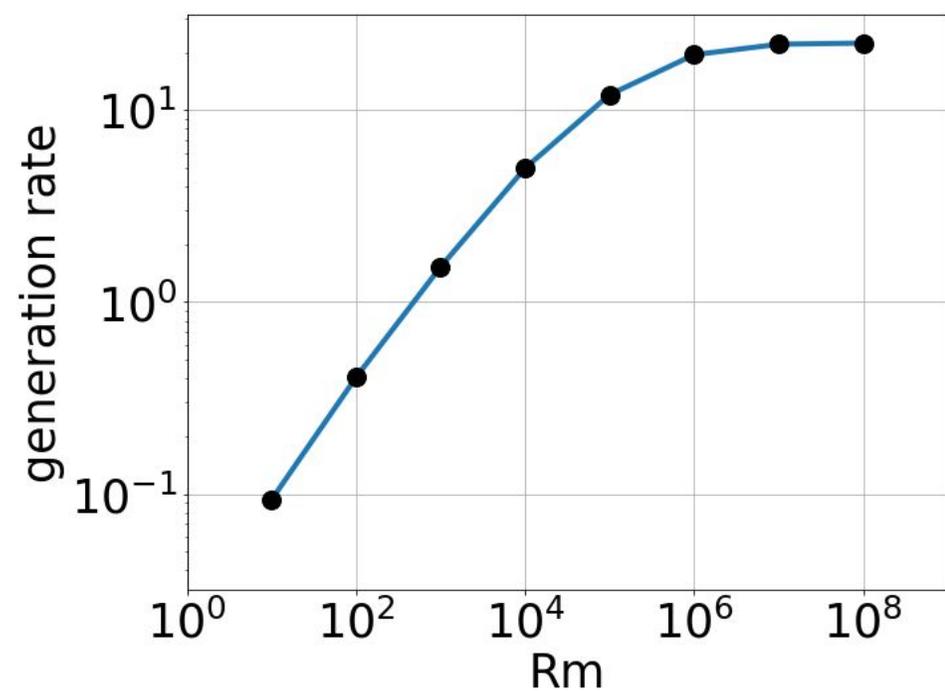
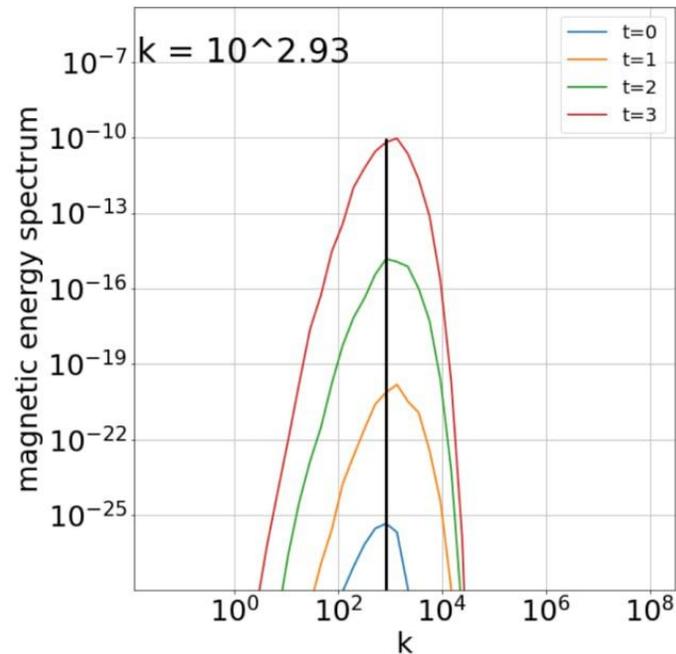
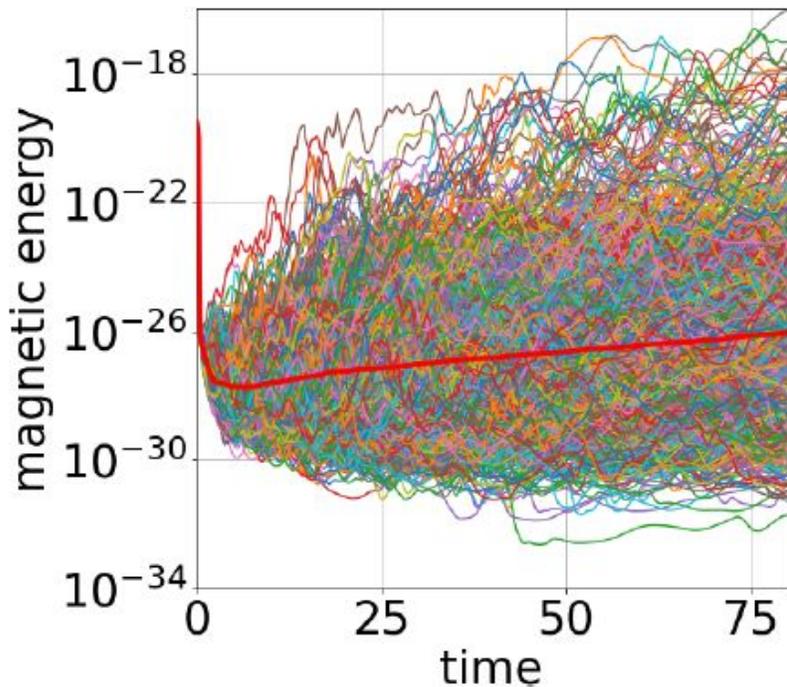
Постановка эксперимента

Начальные данные для численного эксперимента готовятся в отсутствии магнитного поля. Для различных Re в процессе свободного вырождения формируются инерционные интервалы, на фоне которых и добавляется исходно малое магнитное поле. При достаточно больших Rm наблюдается рост магнитной энергии на малых масштабах в течение времени необходимого для выравнивания энергий и перехода в нелинейную фазу роста, которая в текущей постановке не рассматривается.



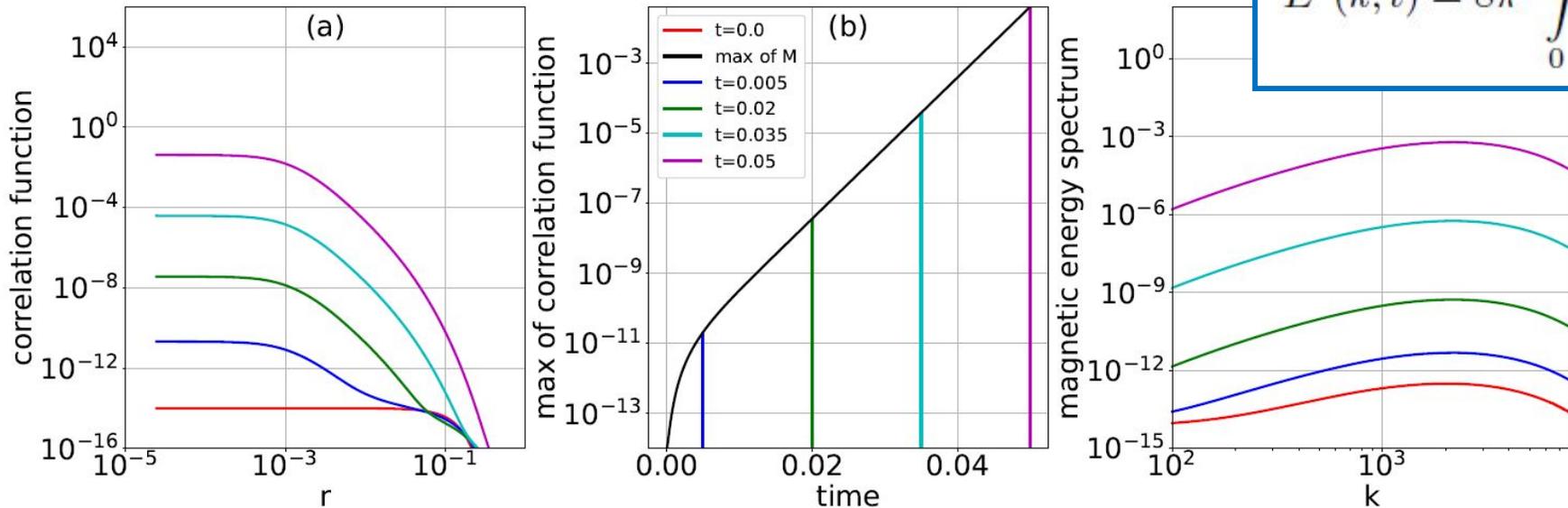
Скорость и масштаб генерации

Скорость роста средней магнитной энергии и масштаб её максимума фиксируются при различных Rm и Re . И если Re существенного влияния не оказывает, то с увеличением Rm растёт как скорость генерации, так и масштаб k локализации растущей магнитной энергии. Характер полученных зависимостей почти в точности соответствует численным и аналитическим результатам анализа модели КК, однако абсолютные значения имеют существенное различие.



Сопоставление моделей

Начальные спектральные плотности кинетической энергии, полученные в рамках каскадного моделирования, используются для реконструкции корреляционных функций поля скорости для модели КК. А рассчитанные корреляционные функции магнитного поля, полученные в модели КК, могут быть переведены в спектральные плотности магнитной энергии. При сопоставлении моделей сравниваются скорости роста магнитной энергии и их масштабы локализации от корреляционного времени τ , от Rm и от Re .



$$F(r) = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{\infty} E^u(k) \frac{\sin(kr) - kr \cos(kr)}{(kr)^3} dk$$

$$\eta(r) = \frac{1}{Rm} + \tau (F(0) - F(r))$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \eta \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{2M}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial \eta}{\partial r} \right)$$

$$E^b(k, t) = 8\pi^2 \int_0^{\infty} M(r, t) kr (\sin(kr) - kr \cos(kr)) dr$$

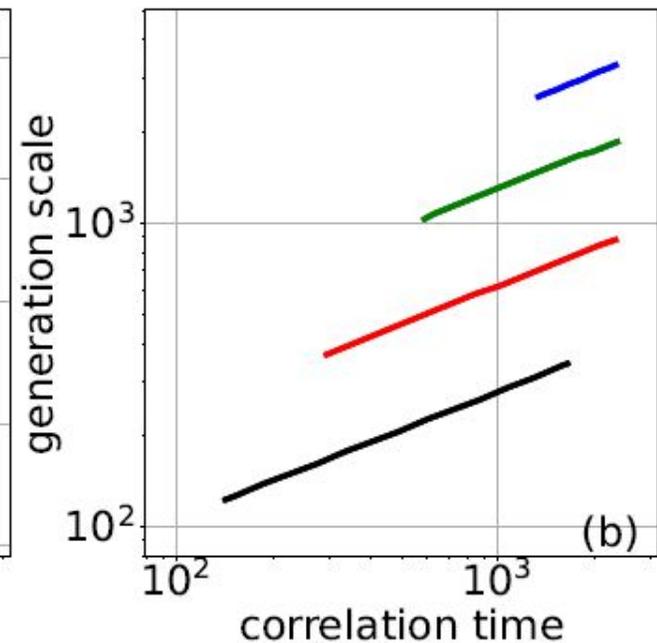
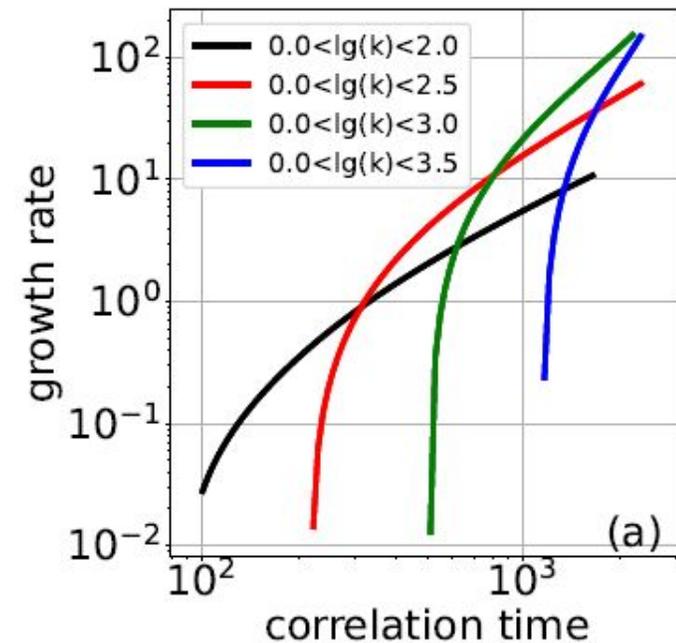
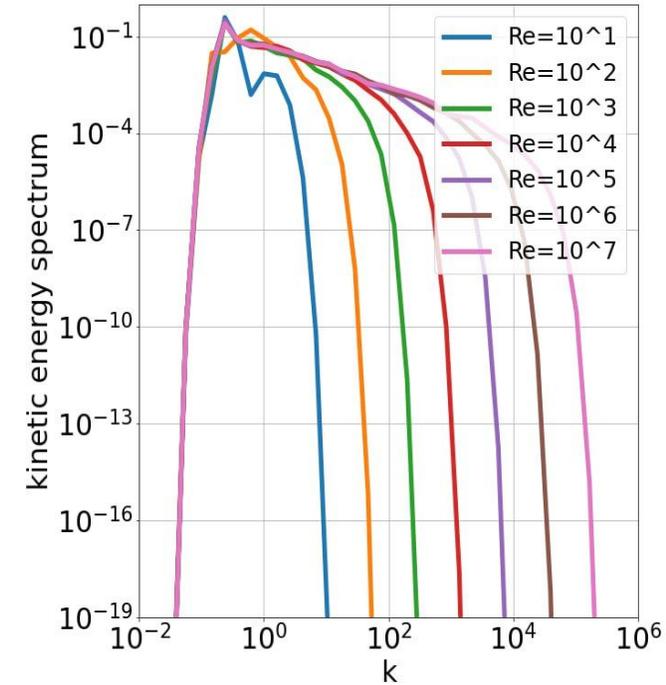
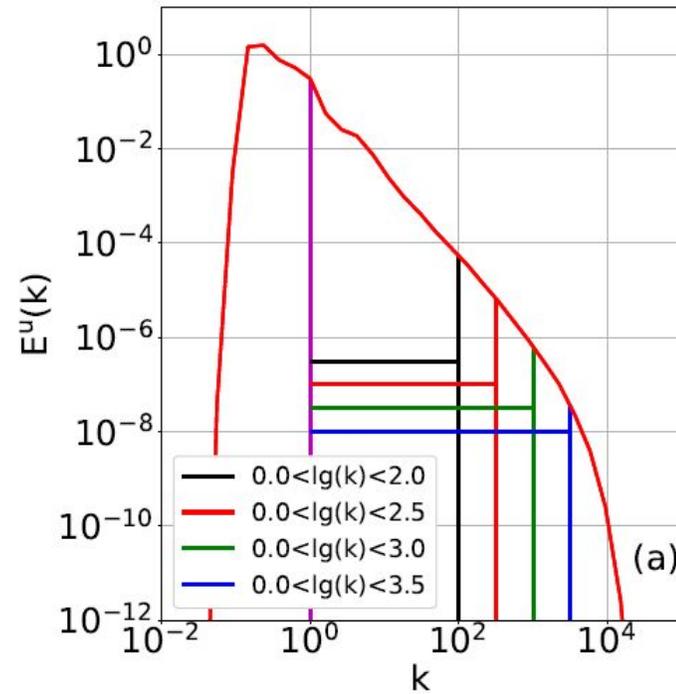
Сопоставление моделей показало, что не существует такого τ , при котором скорости и масштабы роста в обеих моделях совпадают!

Сравнение параметров

Возможным решением проблемы несоответствия моделей является вариация Re , которая реализуется изменением ширины инерционного интервала, используемого для восстановления корреляционной функции поля скорости. Вариации показывают, что при уменьшении числа Re , и соответственно при выборе более крупномасштабной части инерционного интервала появляется возможность выбора корреляционного времени, при котором масштабы и скорости турбулентного динамо в обеих моделях совпадают.

$$\partial_{\tau t} M = 2r^{-4} \partial_r (r^4 \eta \partial_r M) + 2Mr^{-4} \partial_r (r^4 \partial_r \eta)$$

$$\eta(r) = 1/(\tau Rm) + F(0) - F(r)$$



Краткие выводы

- В рамках каскадного МГД-моделирования при достаточно больших значениях магнитных чисел Рейнольдса нами зафиксирован процесс генерации магнитной энергии на малых масштабах и с экспоненциальной скоростью роста.
- Исследованы зависимости скорости роста и масштаба генерации от параметров каскадного моделирования, которые продемонстрировали удивительное совпадение с классической моделью КК в общих чертах, различающееся однако в абсолютных значениях.
- Вариация чисел Рейнольдса показала, что в случае больших Re или при выборе крупномасштабной части гидродинамического спектра, возможно подобрать такое корреляционное время, при котором совпадают как скорости, так и масштабы роста и в абсолютных значениях.
- На основании проведенного моделирование, выдвинута гипотеза о проблеме экспериментального наблюдения, связанная с сильной хаотизацией наблюдаемого процесса.

