

В. А. Гордин

НИУ «Высшая школа экономики» & ФБГУ «Гидрометцентр России» & МФТИ

**Коэффициент турбулентного обмена лучше брать комплексным.  
По данным зондирования с высоким разрешением атмосферы Земли  
(модификация модели ветра в пограничном слое Акерблома —  
Экмана)**

при участии Ф. Л. Быкова

**26 ноября 2024 г**

*Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немислима без меры*

*Д.И.Менделеев*

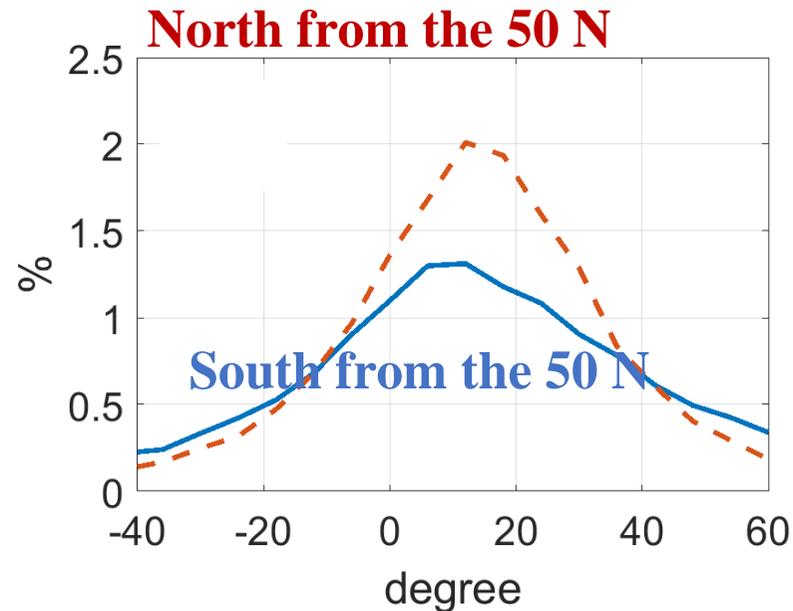
Традиционная модель Акерблома - Экмана описывает поведение ветра в пограничном слое (ПС) атмосферы или океана на вращающейся планете:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l (v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{dv}{dz} \right] = l (u - u_g), \end{cases} \quad (1)$$

где  $u(z)$ ,  $v(z)$  - горизонтальные компоненты ветра,  $u_g, v_g$  - компоненты геострофического ветра на верхней границе ПС. Вертикальная переменная  $z \in [0, H_{\max}]$  - высота над земной поверхностью,  $H_{\max}$  - высота ПС,  $l = \sin \varphi \times 1.45842 \times 10^{-4} / c$  - параметр Кориолиса,  $\varphi$  - географическая широта,  $k(z) > 0$  - коэффициент турбулентного обмена. Система (1) сингулярна, если и только если  $k(z_0) = 0$  при некотором  $z_0 \in (0, H_{\max})$ .

Если в системе (1)  $k(z) = const$ , то угол поворота ветра в ПС составляет  $45^\circ$ .

## Фактическое (по наблюдениям) распределение углов поворота ветра в ПС



А согласно классическим работам: *Ekman, V.W. (1905) On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. Ark Mat Astron Fys 2(11), 1-53; Akerblom F. Rechercher sur les courants le plus bas de l'atmosphere au-dessus de Paris. Nova Acta, Regic Societatis Scientarum. Upsala Ser. IV, V.2, №2, 1908, 203-251* ветер должен поворачиваться на  $45^\circ$ . Подберем  $k(z)$ , согласуя с данными наблюдений.

Первая стадия работы: оптимизация  $k(z)$  в классе положительных функций.

Вторая стадия: расширение области оптимизации.

Уравнение (1) инвариантно относительно действия группы вращений вокруг вертикальной оси:  $\mathbf{SO}(2)$ . Группа  $\mathbf{SO}(2)$  коммутирует только с кососимметричными и скалярными операторами. Следовательно, можно без потери этой инвариантности рассмотреть более общую систему ОДУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left[ \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{dv}{dz} + k(z) \frac{du}{dz} \right] = -l(v - v_g), \\ \frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{dv}{dz} - \gamma(z) \sin(\varphi) \frac{du}{dz} \right] = l(u - u_g), \end{array} \right. \quad (2)$$

где второй коэффициент турбулентного обмена  $\gamma(z)$  играет роль регуляризатора для (1): ведь даже, если  $k(z)=0$ , система (2) не станет сингулярной. Множитель  $\sin(\varphi)$  здесь добавлен в уравнения (2), чтобы согласовать результаты наших численных экспериментов с данными из Южного полушария.

## Комплексная форма модели

Перепишем (2) в комплексной форме:  $w = u + iv$ ,  $w_g = u_g + iv_g$  и  $\kappa = k - i\gamma \sin(\varphi)$

$$\frac{d}{dz} \left[ \kappa(z) \frac{dw}{dz} \right] = il (w - w_g). \quad (3)$$

Если  $\kappa(z) = const$ , то поворот ветра равен  $\arg \sqrt{\frac{i}{\kappa}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k}{\gamma \sin \varphi}$ .

Средние наблюдаемые углы поворота ветра в погранслое (10 – 20°) соответствуют отношению:

$$\gamma \sin \varphi / k \approx 1.2 - 2.7.$$

Новое слагаемое оказывается **больше** старого!

## Задача квадратичного программирования (ЗКП)

Чтобы уменьшить порядок дифференцирования, проинтегрируем ур. (2) по  $z$ :

$$\kappa(z) \frac{dw}{dz} = -\psi + c, \quad (4)$$

где для каждого профиля  $c \in \mathbb{C}$  - константа интегрирования, а векторная (комплексная) функция  $\psi(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению и нормировке:

$$\frac{d\psi}{dz} = i l (w_g - w), \quad \int_0^H \psi(z) dz = 0.$$

Ищем  $\kappa(z)$  как решение ЗКП: минимизируем среднюю относительную невязку (4) по  $j=1, \dots, N$  вертикальным профилям:

$$L(\kappa(z), \{c_j\}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{W_j} \int_0^{H_j} \left| \kappa(z) \frac{dw_j}{dz} + \psi_j(z) - c_j \right|^2 dz \rightarrow \min_{\kappa(z), \{c_j\}}, \quad (5)$$

множители  $W_j = \int_0^{H_j} |\psi(z)|^2 dz$  включены в нормировку  $L$ . Тогда минимум  $\min_{c_j} L(0, c_j) = 1$ .

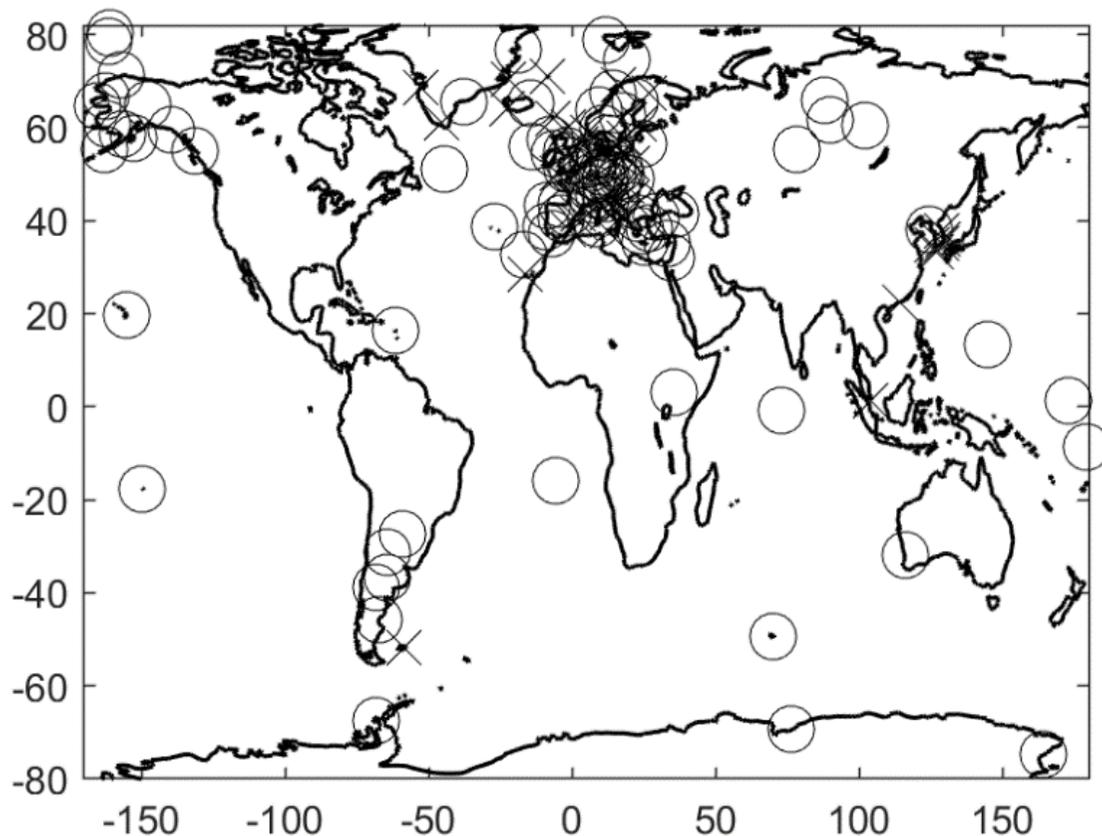
Пусть  $0 < \Lambda < 1$  - минимум функционала (5). Значение  $100\% (1 - \Lambda)$  интерпретируется как средний коэффициент детерминации, см. Таблицу 2.

## Данные

Использованы данные **26142 радиозондов**, удовлетворяющих условиям:

1. Заявленная точность измерения скорости  $0.1 m/s$  (а не 1 узел).
2. Хорошее среднее вертикальное разрешение (более 25 точек в слое 0-1000 m).
3. **Высота ПС  $H_j > 100m$ .**
4. Вариация ветра в ПС больше, чем  $2.5 m/s$ .
5. Высота первого измерения профиля не больше, чем  $5m$ .

## Географическое расположение использованных аэрологических станций



Расположение 111 станций, с которых учитывались данные радиозондирования. Крестиком показаны **28 “интенсивных станций”**, с которых усвоено много данных (более 400 запусков) в нашем архиве

## Высота ПС

Использовалась стандартное определение высоты ПС  $H_j$  - минимальный корень уравнения:

$$\Theta_j(H_j) = \Theta_{V,j}(0), \quad (5)$$

где  $\Theta$  - потенциальная температура, а  $\Theta_v$  - виртуальная потенциальная температура.

### Сведения по профилям в коде BUFR за период 4 апреля 2018 - 29 ноября 2019

Название	Условие	Число	Высота ПС $H_j$
Все	нет	26142	671±516m
Глубокий	$H_j > 1000m$	8462	1592±454m
Мелкий	$H_j < 500m$	12051	270±115m
Устойчивый	$\forall z \in [0; H_j] \quad Ri(z) > 0.3$	2622	201±105m
Неустойчивый	$\exists z_0 \in [0; H_j] \quad Ri(z_0) < 0.2$	22584	742±517m

## Число Ричардсона

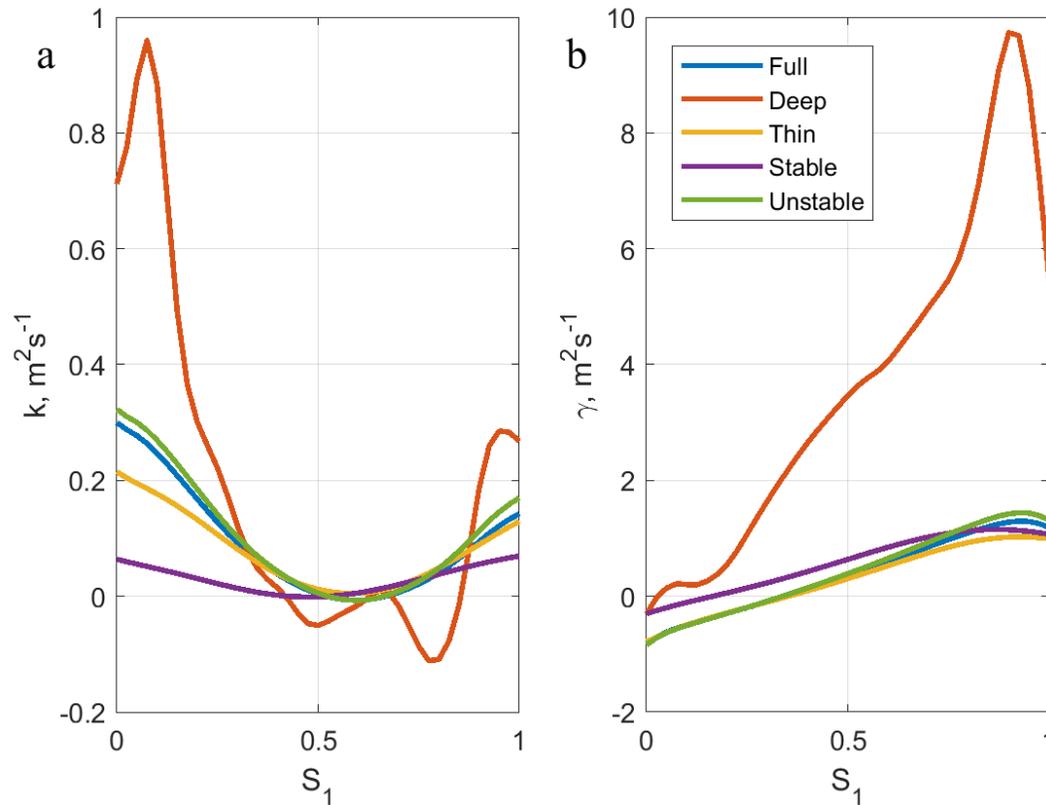
Число Ричардсона  $Ri$  - безразмерная функция высоты  $z$ :

$$Ri(z) = \frac{g}{\Theta} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \quad (6)$$

Значения  $Ri > Ri_c = 0.25$  соответствуют устойчивой стратификации,  $Ri < Ri_c$  - неустойчивой, а  $Ri < 0$  строго неустойчивой стратификации атмосферы (в столбе существует температурная инверсия).

## Результаты

а) Вещественная часть коэффициента  $k(S_1)$ , б) мнимая часть  $\gamma(S_1)$ . Внимание на вертикальную шкалу!

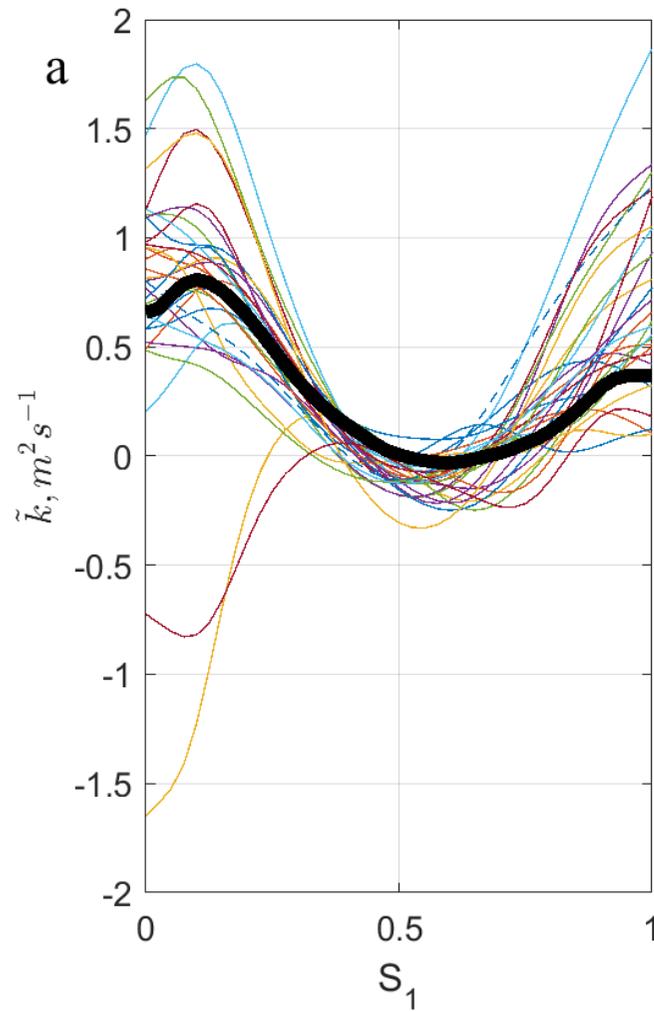


Оптимальный (разные цвета для различных случаев) КТО  $\kappa$ , зависящий от относительной высоты  $S_1 = z / H$ .

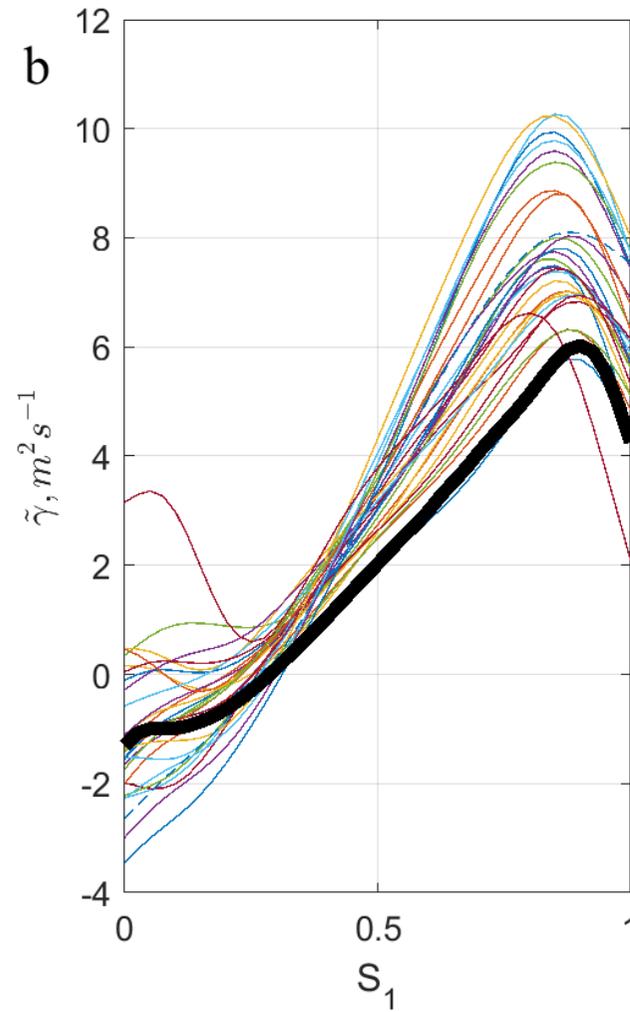
Также рассмотрены нормализованные КТО:

$$\kappa = \frac{\tilde{\kappa} \cdot H_j}{1000m}$$

а) вещественная часть  $\tilde{k}(S_1)$ ,

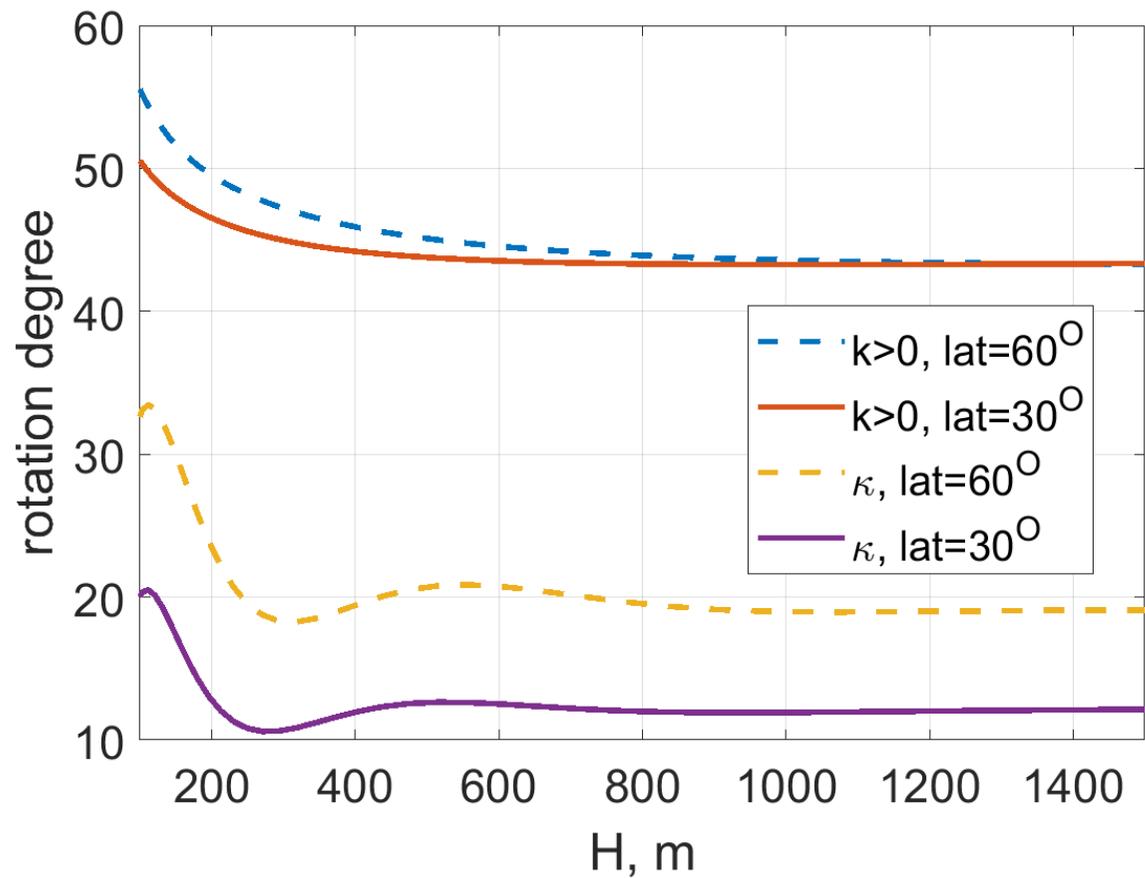


б) мнимая часть  $\tilde{\gamma}(S_1)$ .

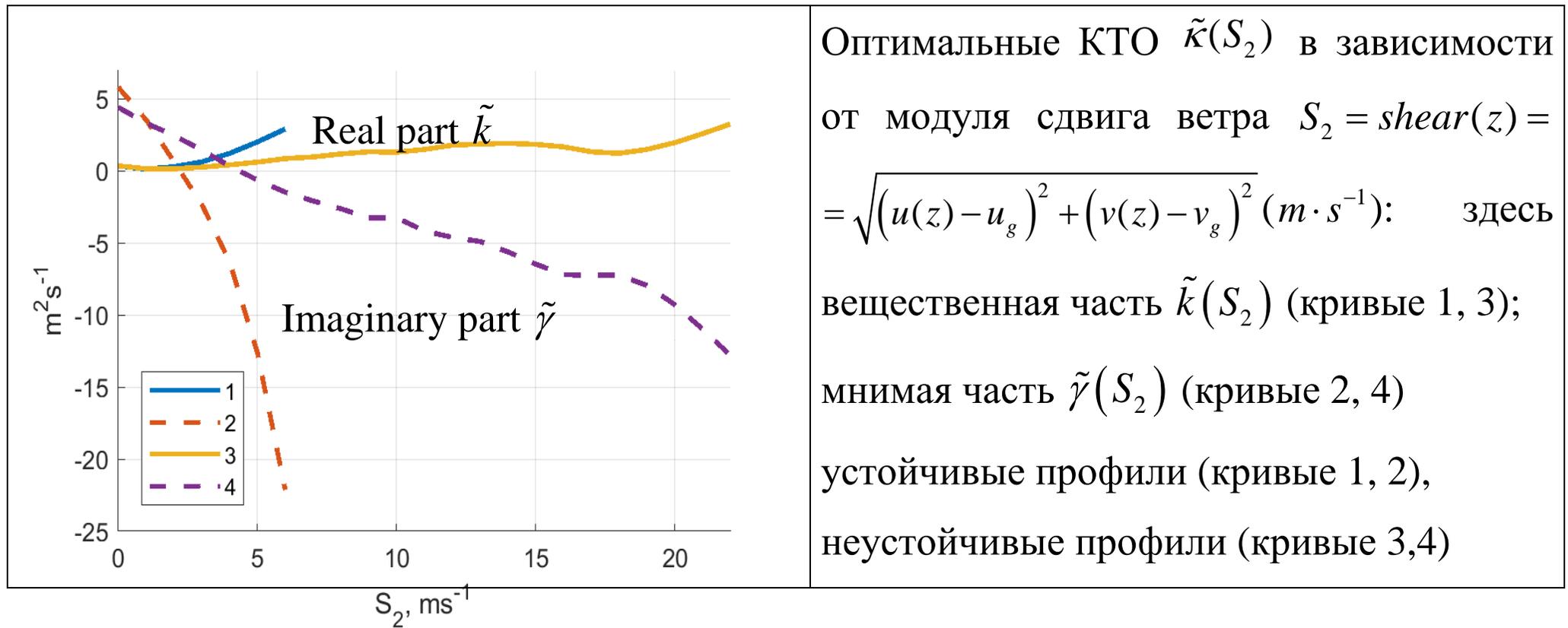


Оптимальные нормализованные КТО  $\tilde{k}(S_1)$ , зависящие от относительной высоты  $S_1 = z/H_j$ , были определены и тут показаны для 28 “интенсивных” станций.

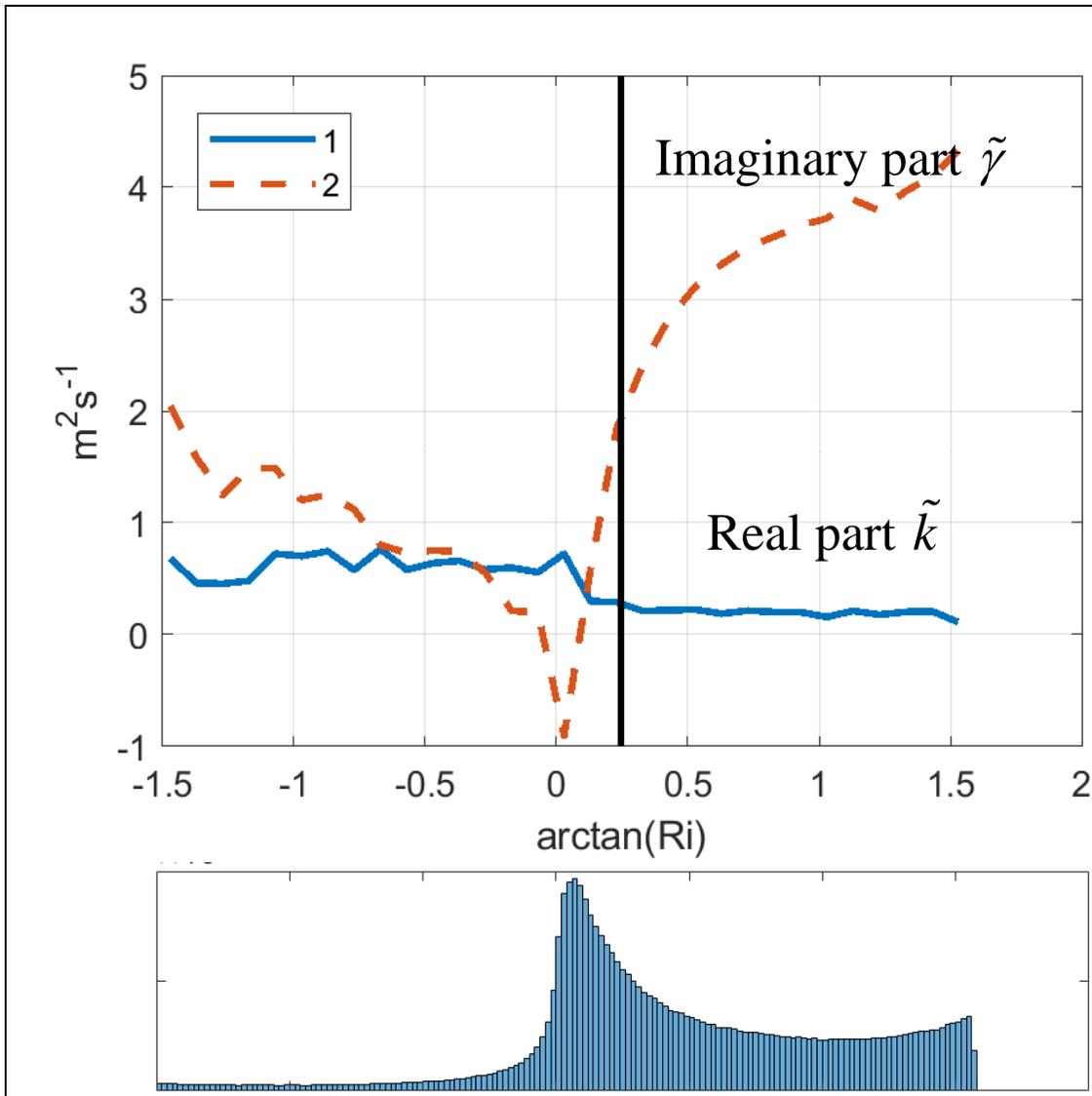
**Модельные углы поворота для оптимальных:**  
**вещественного  $k$  и комплексного  $\kappa = H \tilde{\kappa}(z/H)$**



## Альтернативные параметризации КТО



Оптимальные КТО  $\tilde{k}(S_2)$  в зависимости от модуля сдвига ветра  $S_2 = shear(z) = \sqrt{(u(z) - u_g)^2 + (v(z) - v_g)^2}$  ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ): здесь вещественная часть  $\tilde{k}(S_2)$  (кривые 1, 3); мнимая часть  $\tilde{\gamma}(S_2)$  (кривые 2, 4) устойчивые профили (кривые 1, 2), неустойчивые профили (кривые 3, 4)



Оптимальный КТО  $\tilde{k}(S_3)$  (все случаи), в зависимости от  $S_3 = \arctan(Ri)$ , где  $Ri$  – число Ричардсона.

Черная вертикальная линия показывает критическое число Ричардсона  $Ri = Ri_c = 0.25$ . Для значений  $Ri > 0.5$  получается отношение  $\gamma/k > 20$ .

Снизу – гистограмма  $S_3 = \arctan(Ri)$

При оптимальных КТО		$\kappa$	$k > 0, \gamma = 0$	$\tilde{\kappa}$	$\tilde{k} > 0, \gamma = 0$	Отношение
Случаи	Аргумент(ы) $S$	Средний коэффициент детерминации				$\frac{1 - \Lambda(\tilde{\kappa} \in \mathbb{C})}{1 - \Lambda(\tilde{\kappa} \in \mathbb{R})}$
		100%(1 - $\Lambda$ )				
Все	Относительная высота $S_1$	38,5%	11,7%	<b>48,3%</b>	13,8%	3,5
Глубокие		34,6%	7,7%	<b>35,0%</b>	8,0%	4,5
Тонкие		62,3%	17,4%	<b>72,6%</b>	20,9%	3,3
Устойчивые		65,9%	10,2%	<b>77,5%</b>	11,6%	<b>7,1</b>
Неустойчивые		38,9%	12,3%	<b>48,2%</b>	14,0%	3,5
Все	Модуль сдвига ветра $S_2$	37,6%	12,2%	46,3%	15,1%	3,1
Глубокие		29,2%	8,3%	29,8%	8,6%	3,4
Тонкие		59,9%	18,2%	67,7%	22,4%	3,0
Устойчивые		59,7%	11,6%	67,8%	13,5%	5,5
Неустойчивые		39,1%	12,6%	46,7%	15,3%	3,0
Все	Число $Ri$	24,4%	11,4%	34,1%	12,6%	2,7
Глубокие		29,2%	7,4%	29,9%	7,5%	4,1
Тонкие		36,0%	16,8%	43,0%	19,8%	2,1

Устойчивые		33,0%	9,7%	39,4%	10,3%	4,0
Неустойчивые		28,6%	11,8%	35,3%	12,8%	2,7
Все	Относительная высота $S_1$ и модуль сдвига ветра $S_2$	41,2%	12,7%	<b>53,4%</b>	15,4%	3,4
Глубокие		35,2%	8,7%	<b>35,7%</b>	9,1%	4,0
Тонкие		65,2%	18,9%	<b>76,7%</b>	22,9%	3,3
Устойчивые		66,3%	11,7%	<b>78,1%</b>	13,5%	6,3
Неустойчивые		42,0%	13,1%	<b>53,4%</b>	15,7%	3,4
Все		Относительная высота $S_1$ и число Ричардсона	39,5%	12,4%	50,3%	13,8%
Глубокие	34,7%		7,9%	35,1%	8,1%	4,5
Тонкие	63,6%		18,4%	74,7%	21,4%	3,4
Устойчивые	65,9%		10,2%	77,5%	11,6%	<b>7,1</b>
Неустойчивые	40,6%		12,9%	50,1%	14,1%	3,6

## Сравнение реальных профилей и модельных решений

Представим КТО  $\mathcal{K}$  в виде  $\mathcal{K} = H\tilde{\mathcal{K}}(S_1)$ . Тогда можно найти решение  $\hat{w}_j(z, \mathcal{K}, w_0)$  уравнения (2) при условиях Дирихле  $w(H) = w_g$ ,  $w(0) = w_0$  и оценим среднюю ошибку восстановленного профиля по сравнению с реальным:

$$ABS_{speed}(S_1, \mathcal{K}, w_0) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \left| \hat{w}_j(S_1 H_j, \mathcal{K}, w_0) \right| - \left| w_j(S_1) \right| \right|,$$

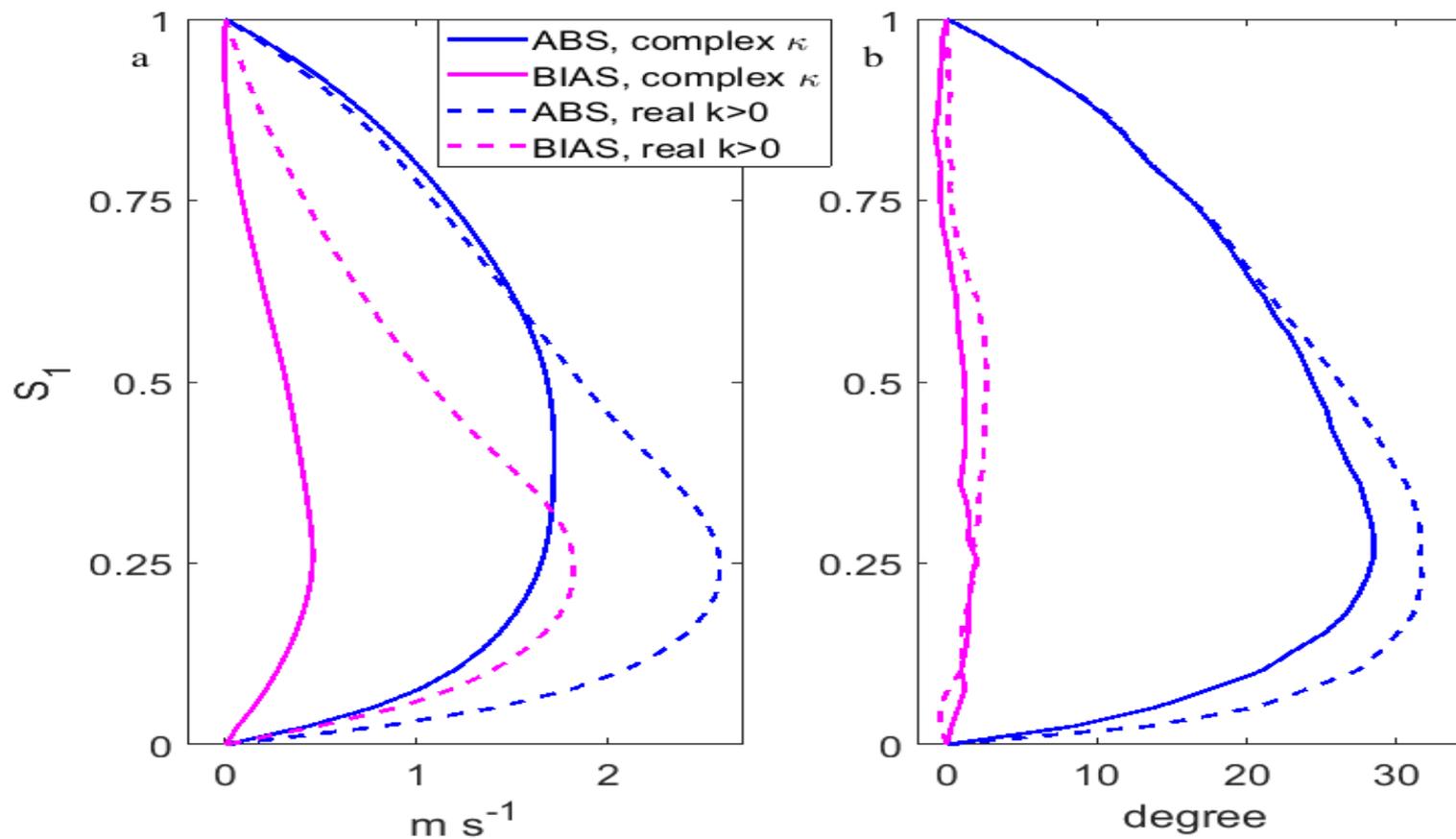
$$ABS_{direction}(S_1, \mathcal{K}, w_0) = \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \left| \arg \hat{w}_j(S_1 H_j, \mathcal{K}, w_0) - \arg w_j(S_1) \right|,$$

Мы исключаем из оценки  $ABS_{direction}$  случаи с малыми скоростями  $|\hat{w}_j|$  или  $|w_j| \leq 2m/s$ , когда определение направления вектора ненадежно. Поэтому предел в сумме для направлений меньше:  $\tilde{N} \approx 0.69N$ .

# Ошибка восстановления профилей ветра для оптимальных вещественного и комплексного коэффициентов

Для модуля скорости ветра

для направления ветра



## Заключение

1. Первоначальная модель Аккерблома – Экмана предсказывает поворот ветра в ПС на  $45^\circ$ . Наблюдаемые повороты в среднем втрое меньше.
2. Мы включили в модель коэффициент  $\mathcal{U}$ , и в результате оптимизации КТО согласованность с данными зондирования в коде BUFR возрастает в 7 раз для устойчивой стратификации и в 3.5 – для неустойчивой. Коэффициент  $\mathcal{U}$  может интерпретироваться как мнимая часть коэффициента  $\mathcal{K}$ ;
3. Мы сравнили КТО  $\mathcal{K}$ , построенный как функция относительно высоты  $S_1 = z / H$ , или от сдвига ветра  $S_2$ , или от числа Ричардсона  $Ri$ . Предпочтительна относительная высота.

Bykov, Philipp L. and Gordin, Vladimir A. "Complex turbulent exchange coefficient in Akerblom–Ekman model" Journal of Inverse and Ill-posed Problems, vol. 32, no. 2, 2024, pp. 199-211. <https://doi.org/10.1515/jiip-2021-0039>

Главное: тензор турбулентности в пограничном слое на плоскости  $\langle x, y \rangle$  стоит искать в виде

$$\begin{pmatrix} k(z) & \gamma(z) \\ -\gamma(z) & k(z) \end{pmatrix}.$$

Комплексный прогноз погоды:

<https://method.meteorf.ru/ansambl/complex.html>

Спасибо за внимание