Статистическая теория турбулентности в несжимаемой жидкости в вейвлет-представлении

М.В.Алтайский [1] Н.Е.Капуткина [2] М.Гнатич [3]

[1]ИКИ РАН, Москва

[2]Университет 'МИСиС', Москва

[3]ОИЯИ, Дубна

Конференция памяти С.С.Моисеева "Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность"
26 ноября 2024, ИКИ РАН, Москва

Аннотация

Статистическая теория турбулентности вязкой несжимаемой жидкости переформулирована в терминах масштабно-зависимых полей $\mathbf{u}_a(x)$, определенных как вейвлет-коэффициенты поля скорости $\mathbf{u}$ в точке x при пространственном разрешении a. Применив методы квантовой теории поля к производящему функционалу случайных полей $\mathbf{u}_a(x,t,\cdot)$, мы показали конечность корреляционных функций $\langle \mathbf{u}_{a_1}(x_1)\ldots\mathbf{u}_{a_n}(x_n)\rangle$ для случайной силы, действующей на внешнем масштабе турбулентности (L). Рассмотрена модель трехмерной турбулентности. Модель не требует регуляризации, а ренормгрупповая симметрия представляет собой симметрию между флуктуациями поля скорости различных масштабов. Суммирование по масштабам проводилось от внешнего масштаба L до масштаба наблюдения $A \gg l$. Турбулентные поправки к вязкости и парному коррелятору скорости вычислены в однопетлевом приближении. Это дает зависимость турбулентной вязкости от масштаба наблюдения и описывает зависимость от масштаба корреляций поля скорости.

Тематика и план доклада

- Квантовополевой подход к теории турбулентности
- Колмогоровская теория турбулентности
- Ренормализационная группа
- Разделение флуктуаций различных масштабов с помощью вейвлет-преобразования
- Конечные полевые теории на основе масштабнозависимых полей $u_a(x, t)$
- Ренормгруппа в формализме масштабнозависимых полей
- Турбулентная вязкость

References:

M.V.Altaisky, M.Hnatich and N.E.Kaputkina,
Renormalization of viscosity in wavelet-based model of turbulence,
Phys. Rev. E **98**(2018)033116

Турбулентность в несжимаемой жидкости

Турбулентность:

Хаотическое движение жидкости, возникающее из ламинарного при превышении некоторых значений параметров

Симметрии:

однородность $P[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x})] = P[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})]$

стационарность $P[\boldsymbol{u}(t + \Delta t, \boldsymbol{x})] = P[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})]$

изотропия $P[\boldsymbol{u}(t, \hat{R}(\theta)\boldsymbol{x}] = P[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})]$

эргодичность

$$\langle f[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})] \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})] dt$$

Турбулентность в несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ описывается уравнениями Навье-Стокса со случайной силой $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \cdot)$ в правой части

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \nu \Delta \boldsymbol{u} - \nabla p + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \cdot)$$

Колмогоровская теория турбулентности

Reynolds similarity law [O.Reynolds,*Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*,**186**(1895)123-164]: Let

$$\tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \tilde{t} = t\frac{V}{L}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\rho V^2}$$

then the flows of the same type with equal Reynolds numbers $Re = \frac{VL}{\nu}$ are similar to each other.

Гипотезы Колмогорова (K41) *ДАН СССР*, 1941, т.**30**, сс. 9-13

I.Для локально изотропной турбулентности n-точечное распределение поля скорости F_n однозначно определяется кинематической вязкостью ν и скоростью диссипации энергии на единицу массы ε.

II. В *инерционном интервале*, т.е., когда масштаб наблюдения l существенно превосходит колмогоровский масштаб $l_0 = \nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$, распределения однозначно определяются скоростью диссипации энергии на единицу массы ε, и не зависят от вязкости ν.

Структурные функции и спектр энергии

Спектр энергии турбулентных пульсаций

$$E = \int |u(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty E(k)dk$$

где

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} \langle u(\mathbf{k})u(-\mathbf{k})\rangle d^3\mathbf{k}$$

Колмогоровский анализ размерностей дает

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

Для структурных функций поля скорости

$$S_q(l) = \langle |\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x+l)|^q \rangle$$

подсчет размерностей дает

$$S_q(l) \propto (\varepsilon l)^{\frac{q}{3}}, \quad \delta u(l) \propto l^{\frac{1}{3}}$$

Поправки к колмогоровскому скейлингу на масштабе наблюдения l должны зависеть от l/l_0 и l/L

Квантовополевой подход к турбулентности

Турбулентность = случайный процесс, описываемый СДУ $\hat{V}[u(x)] = f(x,\cdot)$, где $\hat{V}$ – нелинейный оператор, а $f(x,\cdot)$ – случайная сила. Задача заключается в конструировании *производящего функционала* $G[A_u(x)]$, такого, что статистические моменты решения $u(x,\cdot)$ могут быть получены варьированием:

$$\langle u(x_1)\ldots u(x_n)\rangle = \left.\frac{\delta^n G[A_u(x)]}{\delta A_u(x_1)\ldots \delta A_u(x_n)}\right|_{A_u=0}$$

Производящий функционал может быть записан в виде

$$G[A_u] = \int e^{\int A_u(x)u(x)dx} P[u(x)]\mathcal{D}u,$$

где вероятность конфигурации $u(x)$ определяется из уравнений движения со случайной силой в правой части:

$$P[u(x)] \sim \int \delta(\hat{V}[u(x)] - f(x))\rho[f]\mathcal{D}f, \qquad \rho[f] \sim e^{-\frac{fD^{-1}f}{2}}$$

Формализм удвоения полей

P.C.Martin, E.D. Sigia, and H.A. Rose, *Phys. Rev. A* **8**(1973)423

С помощью введения дополнительного поля u' можно записать дельта-функцию от уравнений движения в виде экспоненты: $\delta(\cdot) \sim \int \mathcal{D}u'(x) \exp\left(\int dx u'(x)(\cdot)\right)$. Для уравнений Навье-Стокса это приводит к производящему функционалу вида

$$G[A] = \int \exp\left(S[\Phi] + \int d^d\mathbf{x}dtA\Phi\right)\mathcal{D}\Phi \equiv e^{W[A]},$$

где $\Phi = (u(t,\mathbf{x}), u'(t,\mathbf{x}))$ – дублет полей; $u'(t,\mathbf{x})$ – Мартин-Сиджиа-Роузовское поле. $A(t,\mathbf{x}) \equiv (A_u, A_{u'})$ – произвольный аргумент варьирования. "Действие" имеет вид

$$S[\Phi] = \frac{1}{2}\int u'Du' + \int u'[-\partial_t u + \nu\Delta u - (u\cdot\partial)u],$$

где $D(x-x') = \langle f(x)f(x')\rangle$. Давление исключается с помощью условия несжимаемости. Детерминант $\|\delta V/\delta u\|$ можно отбросить путем переопределения функций Грина на разрыве L.Ts.Adzhemyan, A.N. Vasil'ev and Yu.M. Pis'mak, *Teor. Mat. Phys.* **57**(1983) pp.1131-1143(en), 268-281(ru)

Выбор случайной силы

Работа случайной силы $D(x-x') = \langle f(x)f(x')\rangle$ должна компенсировать диссипацию энергии $\langle uf\rangle = \varepsilon$. Случайная сила считается δ-коррелированной по времени, и сконцентрированной на ИК масштабах в пространстве.

$$\langle \dot{u}_i(t,\mathbf{x})u_i(t,\mathbf{x})\rangle = \int e^{\imath\mathbf{x}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)}\langle f_i(t,\mathbf{k}_1)\int^t f_i(\tau,\mathbf{k}_2)d\tau\rangle \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}$$

для δ-коррелированной случайной силы :
$\langle f_i(x)f_j(x')\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d(k)P_{ij}(\mathbf{k})e^{\imath k(x-x')}$, где $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}$, имеем

$$\varepsilon = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} d(k),$$

при нормировке $G_0(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$
Обычно выбирают $\langle f(k)f(k')\rangle \sim \delta(\omega+\omega')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')k^{-y}$;
$y > -2$ для сильно неравновесных течений V.Yakhot, S.Orszag. *J.Sci.Comp.* **1**(1986)3

Фейнмановские разложения

Действие S состоит из $S_0[\Phi] = \frac{\Phi K \Phi}{2}$

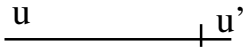
$$K = \begin{pmatrix} 0 & \partial_t + \hat{L} \\ -\partial_t + \hat{L} & D \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \nu\Delta,$$

и нелинейного взаимодействия

$$V[\Phi] = -\frac{1}{2} u_i{}'[\delta_{is}\nabla_j + \delta_{ij}\nabla_s] u_j u_s$$

Функциональное интегрирование по Φ, выполненное со свободным действием S_0, дает матрицу вторых моментов $W[J] = \frac{JK^{-1}J}{2}$, где

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{D}{|\partial_t - \hat{L}|^2} & (\partial_t - \hat{L})^{-1} \\ (\partial_t - \hat{L})^{-1T} & 0 \end{pmatrix}.$$



$$\langle u u' \rangle = \frac{1}{-\imath\omega + \nu_0 k^2}$$

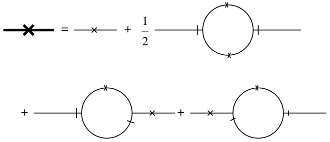
$$\langle u u \rangle = \frac{d(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4}$$

$$V_{ijs} = \frac{\imath}{2}(k_j\delta_{is} + k_s\delta_{ij})$$

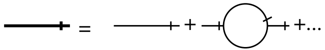
where k is momentum incident to u'.

Применение методов КТП к турбулентности

- Вывод колмогоровского спектра $E(k) = C_K \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$
- Вычисление константы Колмогорова $C_K \approx 1.6$
- Skewness $S = -\frac{\langle (\nabla u)^3 \rangle}{\langle (\nabla u)^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \approx 0.6$
- Турбулентная вязкость
- Перенос пассивной примеси
- МГД



Вычисление парного коррелятора поля скорости

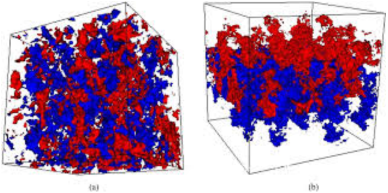


Вычисление функций Грина дает турбулентные поправки поправки к вязкости

$$u_a(b) = \int \frac{1}{a}\bar{g}\left(\frac{x-b}{a}\right) u(x)dx$$

There are a number of reasons for using wavelets in turbulence

- Intermittency
- Self-similarity
- Fractal structure



Pictures from asme.org

... without saying a word on wavelet numeric simulations.

- V.Zimin, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **17**(1981)941
- M.Vergassola and U.Frisch, *Physica D* **54**(1991)58
- J.F.Muzy, E.Bacry and A.Arneodo, *Phys. Rev. Lett* **67**(1991)3515
- C.Meneveau, *J.Fluid.Mech* **232**(1991)469
- M.Farge, *Ann. rev. fluid. mech.* **24**(1992) 395
- N.Astafieva, *Phys. Usp.* **39**(1996)1085
- and many others ...

$\lambda \ll$	$l_0 \ll$	$a < L$
mean free path	Kolmogorov scale	External scale

Для анализа *локальных* свойств турбулентного поля скорости $u(t, \boldsymbol{x})$ применяют непрерывное вейвлет-преобразование (CWT):

$$u_a(\boldsymbol{b}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^d} \bar{g}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}}{a}\right) u(\boldsymbol{x}) d^d\boldsymbol{x}$$

Обратное преобразование:

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C_g}\int_0^\infty \frac{da}{a}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^d} g\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}}{a}\right) u_a(\boldsymbol{b}) d^d\boldsymbol{b},$$

при достаточно слабых ограничениях на базисный вейвлет g: $C_g = \int_0^\infty |\tilde{g}(a)|^2 \frac{da}{a} < \infty$.
Имеет место частотная фильтрация: $\tilde{u}_a(\boldsymbol{k}) = \bar{\tilde{g}}(a\boldsymbol{k})\tilde{u}(\boldsymbol{k})$

Многомасштабный производящий функционал

Многомасштабная КТП:

- $\Phi(x)$ выражается через $\Phi_a(x)$ посредством обратного вейвлет-преобразования.
- Мера интегрирования $dx \equiv dtd^d\mathbf{x}$ меняется на $d\mu_a = dt\frac{d^d\mathbf{x}da}{a}$

Так строится производящий функционал для масштабно-зависимых полей

$$G[A] = e^{W[A]} = \int \mathcal{D}\Phi_a(x)e^{S[\Phi_a]+\int \frac{dxda}{a}A_a(x)\Phi_a(x)}$$

Функциональные производные берутся по мере $d\mu_a$:

$$\langle \Phi_{a_1}(x_1)\ldots\Phi_{a_n}(x_n)\rangle_c = \left.\frac{\delta^n W[A]}{\delta A_{a_1}(x_1)\ldots\delta A_{a_n}(x_n)}\right|_{A=0}.$$

Случайная сила, δ-коррелированная по x и t, сосредоточена на внешнем масштабе L: $D_{aa'}(\mathbf{k}) \sim \delta(t-t')\delta(a-a')\delta(a-L)$:

Диаграмная техника многомасштабной теории

- Интегрирование на внутренних линиях выполняется по мере $\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{da}{a}\frac{1}{C_g}$
- 2 типа линий: a) Функции Грина $\langle uu'\rangle$ и b) корреляционные функции $\langle uu\rangle$; они определяются элементами матрицы пропагатора, умноженными на вейвлет-факторы $\tilde{g}(a\mathbf{k})$.
- Каждая линия с импульсом k содержит ортогональный проектор $P_{ij}(\mathbf{k})$, где i и j векторные индексы линии:

$$G^{(0)}_{i\alpha,j\beta} = \frac{\tilde{g}(\alpha\mathbf{k})P_{ij}(\mathbf{k})\bar{\tilde{g}}(\beta\mathbf{k})}{-\imath\omega+\nu_0\mathbf{k}^2}, D^{(0)}_{i\alpha,j\beta} = \frac{g_0\nu_0^3}{C_g L}\frac{\tilde{g}(\alpha\mathbf{k})P_{ij}(\mathbf{k})|\tilde{g}(kL)|^2\bar{\tilde{g}}(\beta\mathbf{k})}{|-\imath\omega+\nu_0\mathbf{k}^2|^2}$$

- Вершины диаграмм задаются выражением $m_{abc}(k) = \frac{\imath}{2}\left(k_b\delta_{ac}+k_c\delta_{ab}\right)$, умноженным на 3 вейвлет-фактора.
- Внутренние линии диаграмм не содержат масштабов a_i, меньших минимального масштаба всех внешних линий $A = \min_e a_e$.

Интегрирование функций Грина по внутренним линиям в диапазоне масштабов (A,∞) дает фактор $f_g^2(x)$:

$$f_g(x) = \frac{1}{C_g}\int_x^\infty \frac{|\tilde{g}(a)|^2}{a}da, \quad x = kA$$

The corrections to viscosity are determined by the vertex function $\Gamma^{(2)}$, which is inverse to two-point Green function $\Gamma^{(2)}G^{(2)} = 1$.
In null order approximation

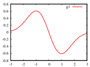
$$\Gamma_0^{(2)} = \tilde{g}(\alpha\mathbf{k})P_{ij}(\mathbf{k})\bar{\tilde{g}}(\beta\mathbf{k})(-\imath\omega + \nu_0\mathbf{k}^2)$$

Turbulent contribution to viscosity:
$\Gamma^{(2)} = \Gamma_0^{(2)} + \Sigma$

Безразмерный масштаб
$\xi = A/L$

Calculations with g_1 wavelet

$$\tilde{g}_1(k) = -\imath k e^{-\frac{k^2}{2}},$$
$$C_{g_1} = \frac{1}{2},$$
$$f_{g_1}(x) = e^{-x^2}$$



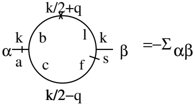


Диаграмма "собственной энергии" Σ

$p^{\pm} = \frac{k}{2} \pm q$

$$\Sigma = -\nu_0 g_0 kL \int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{(2\pi)^2} e^{-(kL)^2(1+4\xi^2)\left(\frac{1}{4}+y^2\right)} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{L_{as}(k,p^+,p^-) e^{-(kL)^2 y \cos\theta}}{\frac{1}{4} + y^2 - \imath \frac{\omega}{2\nu_0 \boldsymbol{k}^2}}$$

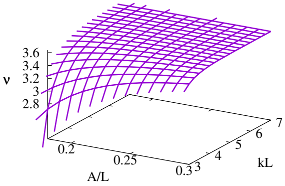
$$\begin{aligned} L_{as}(k,p^+,p^-) = & \quad \frac{\delta_{as}}{4}\left[\frac{(p^+k)(p^+p^-)}{p^{+2}} - (kp^-)\right] \\ + & \quad \frac{p_a^+ p_s^-}{2}\left[\frac{(p^+k)}{p^{+2}} - \frac{(p^-k)(p^+p^-)}{p^{-2}p^{+2}}\right] \\ + & \quad p_a^- p_s^-\left[\frac{(kp^-)}{p^{-2}} - \frac{(p^+k)(p^+p^-)}{2p^{-2}p^{+2}}\right] \\ - & \quad \frac{k_a p_s^-}{2} + p_a^+ k_s \frac{p^+p^-}{4p^{+2}} - \frac{p_a^- k_s}{4} \end{aligned}$$

Перенормировка вязкости: $\nu(\xi) = \nu_L \left(1 - g_L \Sigma^\delta(\xi)\right)$

Можно выразить вклад "собственной энергии" в обратный пропагатор $\Gamma^{(2)}$ в виде сумму трансверсальной и продольной частей. Трансверсальная часть ответственна за поправки к вязкости:

$$\Sigma_{as}^{\alpha=\beta=A} = \nu_0 g_0 \Sigma^\delta k^2 \left(\delta_{as} - \frac{k_a k_s}{k^2}\right) + \nu_0 g_0 \Sigma^\lambda k_a k_s$$

Величина $\Sigma^\delta(\xi)$ конечна, и может быть вычислена для малых масштабах $\frac{A}{L} \equiv \xi \lesssim 1$, если известны ν_L и g_L на внешнем масштабе L. Мы их не знаем, и вынуждены применять итерационную процедуру РГ.



The dependence of turbulent viscosity $\nu_A(k)$ on the observation scale $\xi = A/L$ and the dimensionless momentum $x = kL$. Calculations were performed in the IR region at the assumption of invariant $g_A \nu_A^3 = g_L \nu_L^3$, i.e., small $K(\xi)$, and normalization momentum $x_* = 4\pi$. Figure from MA, M.Hnatich, N.E.Kaputkina, *Phys. Rev.* E98(2018) 033116

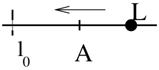
$$
\begin{aligned}
\Sigma^\delta = & \frac{kL}{128 C_g} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(2\pi)^2} \frac{e^{-(kL)^2(1+4\xi^2)\left(\frac{1}{4}+y^2\right)}}{\frac{1}{4} + y^2 - \imath \frac{\omega}{2\nu_0 \boldsymbol{k}^2}} \\
\times & \int_{-1}^{1} d\mu \frac{(1-\mu^2)(8\mu^2 y^2 + \mu(8y^3 - 10y) + 4y^2 + 1)}{\left(\frac{1}{4y} + y - \mu\right)\left(\frac{1}{4y} + y + \mu\right)} e^{-(kL)^2 y\mu}
\end{aligned}
$$

Уравнения ренормализационной группы

Сетка масштабов

$\frac{l_0}{L} = \xi_0 < \ldots < \xi_{L-2} < \xi_{L-1} < \xi_L = 1$

$\xi_k = \xi_0 \delta^k, \delta > 1, \ln \xi_k = \ln \xi_0 + k \ln \delta$

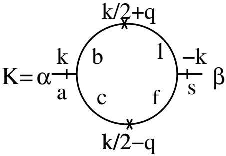


Итерационная процедура:

$$\frac{\nu_{k-1} - \nu_k}{\nu_k} = -g(\xi_k)\Sigma(\xi_{k-1}) \leftrightarrow \frac{d \ln \nu}{d \ln \xi} = g(\xi)\frac{\Sigma(\xi)}{\ln \delta}$$

Force renormalization $D(\xi) = g(\xi)\nu^3(\xi)/L$:

$$\frac{D_{L-1} - D_L}{D_L} = D_L * OneLoopK(\xi_{L-1}).$$



$$\frac{d \ln \nu}{d \ln \xi} = g(\xi)\frac{\Sigma(\xi)}{\ln \delta}, \qquad \frac{d \ln D}{d \ln \xi} = -\frac{K(\xi)}{\ln \delta}$$

$$K(\xi) = \frac{(kL)^3}{16} \int \frac{y^4 dy}{(2\pi)^2} d\mu \frac{e^{-2(Lk)^2(1+2\xi^2)\left(\frac{1}{4}+y^2\right)} \left(\frac{1}{4}+y^2\right)}{\left(\frac{1}{4}+y^2+\imath\frac{2k_0}{\nu_0 \mathbf{k}^2}\right)\left(\frac{1}{4}+y^2-\imath\frac{2k_0}{\nu_0 \mathbf{k}^2}\right)} \frac{(1-\mu^2)(8y^2\mu^2+4y^2+1)}{\left(\frac{1}{4}+y^2-y\mu\right)\left(\frac{1}{4}+y^2+y\mu\right)}$$

Решение уравнений РГ $\frac{d\ln\nu}{d\ln\xi} = g(\xi)\frac{\Sigma(\xi)}{\ln\delta}$

$$D(\xi) = g(\xi)\nu^3(\xi)/L \Rightarrow \ln g(\xi) = \ln D + \ln L - 3\ln\nu(\xi)$$

$g(\xi)$ можно понимать как бегущую константу связи. Уравнение РГ

$$\frac{d\ln g}{d\ln\xi} = -\frac{K(\xi)}{\ln\delta} - 3g(\xi)\frac{\Sigma(\xi)}{\ln\delta}$$

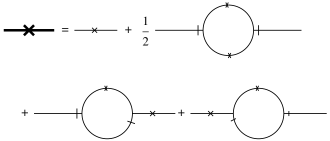
имеет решение $g(\xi) = \dfrac{g_L e^{\int_\xi^1 \frac{d\eta}{\eta}K(\eta)}}{1-3g_L\int_\xi^1 \frac{d\xi'}{\xi'}\Sigma(\xi')e^{\int_{\xi'}^1 \frac{d\eta}{\eta}K(\eta)}}$.

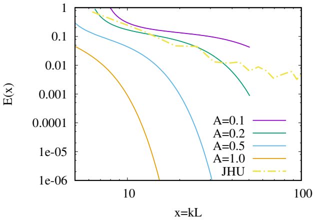
Поскольку $K(\xi) \ll 1, K(\xi) \ll \Sigma(\xi)$ коррелятор силы можно считать практически константой

$$g(\xi) = \frac{g_L}{1-3g_L\int_\xi^1 \frac{\Sigma(\eta)}{\ln\delta}\frac{d\eta}{\eta}}, \ln\frac{\nu(\xi)}{\nu_L} = -\int_\xi^1 \frac{g_L}{1-3g_L\int_{\xi'}^1 \frac{\Sigma(\eta)}{\ln\delta}\frac{d\eta}{\eta}}\frac{\Sigma(\xi')}{\ln\delta}\frac{d\xi'}{\xi'},$$

где $g_0\nu_0^3 \approx g_L\nu_L^3$.

Парный коррелятор поля скорости $\langle \tilde{\boldsymbol{u}}_a(\omega, \boldsymbol{k}) \tilde{\boldsymbol{u}}'_{a'}(\omega', \boldsymbol{k}') \rangle$ в однопетлевом приближении





From *Phys. Rev. E* 98(2018)033116

$$
\begin{aligned}
C(k,\xi) = \quad & \frac{g_0 \nu_0^3}{\nu_A(k)} L e^{-(Lk)^2} + \frac{(g_0\nu_0^3)^2}{128} \frac{(Lk)L}{\nu_A^4(k)} e^{-2\xi^2 (Lk)^2} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2(kL)^2(1+2\xi^2)\left(\frac14 + y^2\right)}}{1+\frac12\left(\frac14 + y^2\right)} \\
\times \quad & \int_{-1}^{1} d\mu \frac{(1-\mu^2)(8\mu^2 y^2 + 4y^2 + 1)}{\left(\frac14 + y^2 - y\mu\right)\left(\frac14 + y^2 + y\mu\right)} + \frac{(g_0\nu_0^3)^2}{32} \frac{(Lk)L}{\nu_A^4(k)} \\
\times \quad & e^{-(Lk)^2(1+2\xi^2)} \int_0^\infty \frac{y^4 dy}{(2\pi)^2} \frac{e^{-(kL)^2(1+4\xi^2)\left(\frac14 + y^2\right)}}{1+2\left(\frac14 + y^2\right)} \\
\times \quad & \int_{-1}^{1} d\mu \frac{(\mu^2-1)(8\mu^2 y^2 + 2\mu y(4y^2-5) + 4y^2 + 1)}{\left(\frac14 + y^2 - y\mu\right)\left(\frac14 + y^2 + y\mu\right)} e^{-(kL)^2 y\mu}
\end{aligned}
$$

Спасибо за внимание !