

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт космических исследований Российской академии наук

Федотова Мария Андреевна

**Магнитогидродинамическая теория волновых процессов
во вращающейся стратифицированной плазме**

01.04.02 Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Д.ф.-м.н., проф. Петросян Аракел Саркисович

Москва - 2022

Содержание

Введение	4
1 Магнитогидродинамическая теория мелкой воды для течений стратифицированной вращающейся астрофизической плазмы	23
1.1 Введение	23
1.2 Магнитогидродинамические уравнения стратифицированной вращающейся плазмы во внешнем магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды	24
1.3 Приближение β -плоскости. Волны магнито-Пуанкаре и магнито-Россби	33
1.3.1 Линейные волны во внешнем вертикальном магнитном поле	34
1.3.2 Линейные волны в горизонтальном магнитном поле	41
1.4 Резонансные явления волн Пуанкаре и волн Россби в стратифицированной плазме	46
1.4.1 Условия синхронизма	46
1.4.2 Амплитудные уравнения взаимодействующих волн	47
1.4.3 Неустойчивости типа распад и усиление	56
1.5 Выводы	57
2 Магнитогидродинамическая теория волновых процессов в течениях вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска	58
2.1 Введение	58
2.2 Линейная теория волновых процессов в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска	59
2.2.1 Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости	60
2.2.2 Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости	62
2.2.3 Волны в сферических течениях стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на стандартной β -плоскости	64
2.2.4 Волны в сферических течениях стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости	68
2.3 Резонансные явления волн во вращающихся течениях плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска	70
2.3.1 Условия синхронизма	70
2.3.2 Коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях	74
2.3.3 Неустойчивости типа распад и усиление	78
2.4 Выводы	79
3 Магнитогидродинамическая теория волновых процессов в сжимаемых течениях вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении	80

3.1	Введение	80
3.2	Магнитогидродинамические уравнения вращающейся сжимаемой стратифицированной плазмы в неупругом приближении	81
3.3	Линейная теория волновых процессов в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии	85
3.3.1	Сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в неупругом приближении на стандартной f -плоскости	85
3.3.2	Сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости	88
3.3.3	Волны в сжимаемых сферических течениях плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении на стандартной β -плоскости	91
3.3.4	Волны в сжимаемых сферических течениях плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости	94
3.4	Резонансные явления волн в сжимаемых вращающихся течениях плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении	98
3.4.1	Условия синхронизма	98
3.4.2	Коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях	103
3.4.3	Неустойчивости типа распад и усиление	108
3.5	Выводы	110
4	Заключение	110

Введение

Изучение фундаментальных свойств астрофизической плазмы помогает понять детальную эволюцию плазменных объектов, наблюдаемых во Вселенной, таких как Солнце, звезды, планетные системы, галактики и скопления галактик. В последнее время активно развиваются теоретические и численные исследования, направленные на решение проблемы описания и изучения многомасштабных течений астрофизической плазмы путем исследования общих свойств, характеризующих объекты во Вселенной. Изучением плазменных объектов и сред за пределами земной атмосферы занимается такая наука, как плазменная астрофизика. Целый ряд новых приложений, возникших в последние годы, актуализирует задачу изучения крупномасштабных магнитогидродинамических течений. С одной стороны, магнитная гидродинамика вращающихся течений является предметом исследования в области нелинейной динамики, как самостоятельного раздела теоретической физики. Поэтому результаты диссертационной работы самодостаточны и имеют непосредственное фундаментальное значение. С другой стороны, изучение таких течений имеет непосредственное отношение к астрофизике. Полученные в работе теоретические результаты имеют большое значение для понимания и предсказательного моделирования вращающихся астрофизических объектов. Течения в плазменной астрофизике, так же как течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа множества астрофизических объектов и явлений, например процессов в солнечном тахоклине [1, 2, 3, 4, 5, 6], устойчиво-стратифицированных областей в недрах звезд (излучающей зоны) [8] и планет (внешний жидкий слой ядра) [9], астрофизических дисков [13], экзопланет [14], осцилляций вращающихся звезд и Солнца [10, 11, 12], в частности осцилляций R-моды [43, 44, 45]. Кроме того, учет стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [11, 15, 16, 17, 12, 46].

На самых больших масштабах плазменная среда испытывает воздействие гравитации и вращения. Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в поле силы тяжести представляет собой практически неразрешимую проблему, как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Поэтому актуальна разработка приближенных моделей, описывающих течения астрофизической плазмы на глобальных масштабах. Эффективной моделью для описания непрерывно стратифицированной плазмы является модель n слоев плазмы различной плотности, наложенных друг на друга [18, 19]. Приближение мелкой воды является одним из основным магнитогидродинамических приближений, используемых для изучения крупномасштабных процессов во вращающейся астрофизической плазме. Магнитогидродинамические уравнения мелкой воды используются для описания космической и астрофизической плазмы и являются аналогом уравнений мелкой воды в геофизической гидродинамике. При выводе магнитогидродинамических уравнений в приближении мелкой воды из полной системы уравнений магнитной гидродинамики несжимаемой плазмы усреднением по высоте слоя предполагается, что распределение давлений удовлетворяет условию гидростатики, а толщина рассматриваемого слоя плазмы мала по отношению к характерному горизонтальному линейному размеру задачи

[3, 20, 21, 22, 23, 18, 24]. Большое число работ посвящено изучению волновых процессов в приближении мелкой воды [5, 6, 12, 15, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40].

Когда рассматривают крупномасштабные течения при наличии вращения в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды, выделяют волны магнито-Пуанкаре [33, 28, 31] и волны магнито-Россби [30]. Волны магнито-Пуанкаре возникают во вращающихся течениях под действием силы тяжести и магнитного поля. Наряду с волнами магнито-Пуанкаре в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы возникают магнитострофические волны [33, 28, 31], восстанавливаемыми силами которых являются сила Кориолиса, сила Лоренца и сила гравитации. Волны магнито-Пуанкаре являются аналогом магнитогравитационных волн в плазме при наличии вращения. В работе [28] показано, что условия синхронизма для волн магнито-Пуанкаре и магнитострофических волн обеспечивают их трехволновые взаимодействия и развита слабонелинейная теория. Найдены нелинейные взаимодействия трех волн магнито-Пуанкаре; трех магнитострофических волн; двух волн магнито-Пуанкаре и одной магнитострофической волны и двух магнитострофических волн и одной волны магнито-Пуанкаре.

Волны магнито-Россби — крупномасштабные волны, возникающие вследствие неоднородности силы Кориолиса в зависимости от широты на сфере, распространяющиеся вследствие сохранения полной завихренности во вращающейся плазме, по аналогии с нейтральной жидкостью [36, 37, 38, 47, 48]. Волны магнито-Россби определяют крупномасштабную динамику солнца и звезд [2, 5, 6, 49, 50, 51, 52, 53], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [54, 55, 56] и атмосфер нейтронных звезд [57, 58, 59, 60, 61], течения в аккреционных дисках нейтронных звезд [62]. Несмотря на сложность наблюдения волн Россби в астрофизической плазме, они недавно были обнаружены на Солнце [15, 16, 63]. Отметим также ряд исследований о влиянии волн магнито-Россби на солнечные сезоны [12, 46, 64, 65] и космическую погоду [66, 67]. Кроме того, отметим работы с исследованиями, косвенно указывающими на существование волн Россби на Солнце [68, 69, 70, 71, 72]. В работах [25, 30, 73] волны магнито-Россби исследованы в приближении β -плоскости для силы Кориолиса. Приближение β -плоскости описывает вращающиеся сферические течения плазмы в локальной декартовой системе координат. В этом случае параметр Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и раскладывается в ряд до первого порядка по широте. Слабонелинейная теория волн магнито-Россби в магнитогидродинамической модели однослойной мелкой воды развита в [30], при наличии крупномасштабной сжимаемости в [73]. В работе [25] развита линейная и слабонелинейная теория волн магнито-Россби во вращающейся стратифицированной плазме в магнитогидродинамической двуслойной модели мелкой воды. В работах [25, 30, 73] исследованы условия синхронизма и найдены нелинейные взаимодействия трех волн магнито-Россби. Нелинейные взаимодействия волн магнито-Россби связывают с длительностью солнечного цикла. Нерегулярные переходы по амплитудам волн напоминают наблюдаемые временные ряды солнечной активности [53]. Приближение β -плоскости развито для упрощения теории сферических волн Россби. Тем не менее заметим, что представление силы Кориолиса в таком приближении содержит слагаемое, не зависящее от широты, которое обеспечивает существование волн магнито-Пуанкаре на β -плоскости. Такие волны магнито-Пуанкаре не исследовались в работах [33, 5, 25, 30, 73], хо-

тя их нелинейные взаимодействия могут быть важны для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике.

Магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает не только вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля, но и учет вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, не являясь трехмерной, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы. В диссертационной работе сделан существенный шаг вперед в изучении трехмерных волновых процессов в магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы, являющийся принципиальным для реальных течений с непрерывной стратификацией. Как хорошо известно в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны в следствие двух восстанавливающих механизмов – вращения и стратификации. В случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче в следствие наличие дополнительной восстанавливающей силы, а именно силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести [76]. Кроме того, учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби [11] обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца. Для учета горизонтальной составляющей вектора Кориолиса используются приближения нестандартных f - и β -плоскостей [78, 38]. Для изучения устойчиво-стратифицированных течений как нейтральной жидкости [77, 78, 79], так и астрофизической плазмы [80, 81, 82] широко используется приближение Буссинеска. Отметим, что приближение Буссинеска работает, когда градиент плотности пропорционален только градиенту температуры, и описывает несжимаемые стратифицированные течения [37]. Вариации плотности и температуры в приближении Буссинеска должны быть небольшими. Таким образом, приближение правильно описывает несжимаемую жидкость, но также учитывает изменения плотности [83]. В [84] показано, что уравнения магнитной гидродинамики в приближении Буссинеска представляют собой систему уравнений несжимаемой плазмы с градиентом температуры, близким к адиабатическому, и отфильтровывают быстрые (акустические) волновые процессы. В [85] приближение Буссинеска было расширено за счет включения переменных магнитных полей. В приближении Буссинеска для нейтральной жидкости флуктуации давления не учитываются в уравнении состояния. В магнитных уравнениях Буссинеска флуктуации полного давления (магнитного и теплового) по-прежнему считаются небольшими.

Важным принципиальным отличием течений астрофизической плазмы является свойство сжимаемости, характеризующее большинство наблюдаемых объектов во Вселенной. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей. Учет сжимаемости в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы существенно повышает возможность интерпретации астросейсмологических данных, например, данных о широтной зависимости собственных мод сол-

нечных осцилляций [11]. В работах [86], [87] выведена система уравнений мелкой воды для нейтральной жидкости с учетом крупномасштабной сжимаемости, и затем в [73] обобщена для магнитогидродинамических течений. В работах [88, 113] волновые процессы в сжимаемых течениях исследуются в неупругом приближении (anelastic approximation). В таком приближении акустические волны отфильтрованы, а градиент плотности зависит как от градиента давления, так и от градиента температуры [89]. Магнитогидродинамическая система уравнений в неупругом приближении не содержит акустических волн и получается из полной системы сжимаемых уравнений магнитной гидродинамики в предположении малых возмущений плотности и описывает течения с малыми числами Маха.

Подробный качественный анализ эффектов малых чисел Маха в астрофизике приведен в работе [90], которая посвящена разработке нового численного алгоритма для описания объектов плазменной астрофизики. В [90] приведено краткое, но информативное сравнение различных типов приближений, используемых при численном моделировании течений с малым числом Маха. Наиболее простым является приближение несжимаемой жидкости, предполагающее постоянство фоновой плотности и давления по координате. В данном приближении при движении плотность жидкости можно считать постоянной вдоль всего объема жидкости в течении всего времени движения. Следующим важным приближением при условии несжимаемого потока жидкости является приближение Буссинеска. В нем по-прежнему считается постоянным фоновое состояние, однако в уравнении импульса при массовых силах включены эффекты плавучести. Как в несжимаемом, так и в приближении Буссинеска уравнение непрерывности переходит в условие бездивергентности поля скоростей в силу отсутствия эффектов сжимаемости. Следующие два приближения, неупругое и псевдонесжимаемое, основаны на стратифицированном фоновом состоянии (исходном состоянии равновесия). В обоих этих приближениях элемент жидкости может расширяться или сжиматься при движении по вертикали относительно фонового состояния в ответ на изменение давления окружающей среды. Уравнение непрерывности в неупругом приближении является условием бездивергентности произведения фоновой плотности и скорости. Уравнение непрерывности в псевдонесжимаемом приближении имеет более сложный вид, а именно ненулевую дивергенцию произведения скорости и фонового давления, возведенного в степень $1/\gamma$ ($\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты). При этом уравнения в псевдонесжимаемом приближении сводятся к уравнениям в неупругом приближении в случае малых возмущений плотности и температуры, но сами по себе не предполагают малости таких изменений. Кроме того, псевдонесжимаемые уравнения учитывают локальные эффекты нагрева.

Впервые неупругое приближение предложено в [91] для решения задач геофизической гидродинамики. В [91] с использованием масштабного анализа приведен вывод уравнений на основе предположения о том, что распределение давления, плотности и потенциальной температуры газа всегда близки к модели адиабатически стратифицированной атмосферы, а временной масштаб определяется частотой Брента-Вяйсяля. Такие предположения и приближения при выводе уравнений привели к отсутствию в них акустических волн, хотя это не было непосредственной целью исследования. Задача о фильтрации акустических волн в крупномасштабных моделях геофизической гидродинамики была впервые сформулирована в работе [92] с целью упростить

численное моделирование тепловой конвекции в геофизике, поскольку присутствие акустических волн в полной сжимаемой системе уравнений требует очень малого временного шага в численной схеме конечно-разностного интегрирования. Отметим работу [93], в которой показана возможность использования неупругого приближения для исследования внутренних гравитационных волн при малых числах Маха, а также работы [94, 95, 96, 97, 98], в которых исследуются математические свойства неупругого приближения для течений нейтральной жидкости. Упомянем работы по развитию теории неупругого приближения в рамках задач земной конвекции и геодинамо [99, 100, 101, 102], которые инициировали применение неупругого приближения для изучения астрофизических течений. Говоря о развитии неупругого приближения в астрофизике и физике планет отметим работы [103, 104], в которых используется неупругое приближение в нейтральной жидкости, и работы [105, 106, 107, 108, 109, 110, 111], в которых используются магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для исследования конвекции и динамо на Солнце и в звездах.

Цели работы

1. Развитие магнитогидродинамической теории в приближении двуслойной мелкой воды и приближении Буссинеска для описания крупномасштабных вращающихся течений плазмы с устойчивой стратификацией. Расширение теории в приближении Буссинеска на случай четырех различных приближений силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной (с учетом горизонтальной компоненты вектора Кориолиса) f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости и приближение нестандартной β плоскости.
2. Развитие теории линейных волн во вращающихся магнитогидродинамических течениях с устойчивой стратификацией в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях, а также в приближении Буссинеска. Исследование дисперсионных соотношений волн магнито-Россби, волн магнито-Пуанкаре, магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн, развитие слабонелинейной теории взаимодействий волн и анализ неустойчивостей типа распад и усиление.
3. Развитие магнитогидродинамической теории в неупругом приближении для описания крупномасштабных сжимаемых вращающихся течений плазмы с устойчивой стратификацией, расширение теории на случай четырех различных приближений силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости и приближение нестандартной β плоскости.
4. Развитие теории линейных волн в сжимаемых вращающихся магнитогидродинамических течениях с устойчивой стратификацией в неупругом приближении в четырех приближениях для силы Кориолиса. Исследование дисперсионных соотношений магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби, сравнение со случаем несжимаемых течений в приближении Буссинеска, развитие слабонелинейной теории

взаимодействий волн и анализ неустойчивостей типа распад и усиление.

Научная новизна

Впервые система магнитогидродинамических уравнений в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле получена из полной трехмерной системы уравнений магнитной гидродинамики для случая стратифицированных вращающихся течений. Впервые исследованы волны магнито-Пуанкаре на β -плоскости, найдены новые дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби с учетом эффектов стратификации. Впервые сформулирована задача о реализуемости трехволновых взаимодействий для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби на β -плоскости в приближении мелкой воды. Исследовано влияние стратификации на групповые и фазовые скорости волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби. Показано наличие нелинейных трехволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби, вычислены коэффициенты взаимодействия трех волн. Найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Впервые система магнитогидродинамических уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска исследована сразу для четырех различных приближений силы Кориолиса (стандартные f - и β -плоскости, нестандартные (с учетом горизонтальной составляющей вектора Кориолиса) f - и β -плоскости). Впервые в рамках полученных уравнений исследованы магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитострофические волны и волны магнито-Россби. Показано нарушение условия перпендикулярности групповой скорости волновому вектору для магнитных инерционно-гравитационных волн в следствие наличия магнитного поля. Показано наличие нелинейных трехволновых взаимодействий найденных новых типов волн, получены коэффициенты взаимодействия и инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Впервые система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении получена из полной трехмерной системы уравнений магнитной гидродинамики для случая сжимаемых течений. Система является новой, так как содержит одновременно силу Кориолиса и магнитное поле, а также предполагает постоянное ненулевое магнитное поле в исходном состоянии равновесия. Кроме того, полученная система впервые исследована сразу для четырех различных приближений силы Кориолиса (стандартные f - и β -плоскости, нестандартные (с учетом горизонтальной составляющей вектора Кориолиса) f - и β -плоскости). Найдены новые типы волн в сжимаемых вращающихся течениях астрофизической плазмы с линейным профилем энтропии: магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитострофические волны и волны магнито-Россби. Показано отличие от их аналогов в несжимаемых течениях в приближении Буссинеска. Кроме того, обнаружены магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны с принципиально новыми дисперсионными соотношениями. Показано наличие нелинейных трехволновых взаимодействий найденных новых типов волн, получены коэффициенты взаимодействия и инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Практическая и научная ценность работы

Полученные магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях мелкой воды для вращающейся плазмы важен для анализа осцилляций R-моды во вращающихся звездах и на Солнце и позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце. Также найденные в работе резонансные взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби на β -плоскости могут оказаться принципиально важными для интерпретации различных явлений в плазменной астрофизике, в особенности солнечных сезонов.

В полученных магнитогидродинамических уравнениях в приближении Буссинеска учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы. Кроме того, произведенный в уравнениях учет горизонтальной составляющей силы Кориолиса является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца.

Полученные магнитогидродинамические уравнения сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении важны для анализа процессов в солнечном тахоклине, устойчиво стратифицированных областях в недрах звезд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра), астрофизических дисках, экзопланетах, а также для анализа осцилляций вращающихся звезд и Солнца. Отметим, что первые экспериментальные наблюдения крупномасштабных течений астрофизической плазмы выполнены на основе изучения магнитных полей или методами астросейсмологии, что естественным образом мотивирует развитие магнитогидродинамической теории с учетом как эффектов сжимаемости, так и эффектов магнитных полей.

Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при планировании космических миссий и астрофизических наблюдений.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Вывод уравнений мелкой воды магнитной гидродинамики осуществлялся методом усреднения по глубине слоя исходной системы уравнений, широко используемым и хорошо себя зарекомендовавшим в геофизической гидродинамике и в физике планетных атмосфер. Полученная система магнитогидродинамических уравнений в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле в частном случае переходит в классические уравнения нейтральной жидкости и широко известные в астрофизике магнитогидродинамические уравнения без внешнего магнитного поля. Вывод уравнений сжимаемой плазмы в неупругом приближении магнитной гидродинамики осуществлялся методом, широко используемым и хорошо себя зарекомендовавшим в работах по исследованию течений астрофизической плазмы. Все полученные результаты линейной теории, развитые в диссертации, согласуются с известными результатами для течений нейтральной жидкости и для магнитогидродинамических течений. Для развития нелинейной теории используется хорошо зарекомендовавший себя асимптотический метод мно-

гомасштабных разложений.

Положения, выносимые на защиту

1. Получены новые системы магнитогидродинамических уравнений для стратифицированной плазмы, а именно: в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле и с учетом сжимаемости в неупругом приближении. Магнитогидродинамические уравнения в приближении Буссинеска и в неупругом приближении записаны для четырех различных приближений силы Кориолиса: стандартных и нестандартных (с учетом горизонтальной составляющей) f - и β -плоскостей.
2. Развита теория волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды. Найдены дисперсионные соотношения для волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби на β -плоскости и поправки к ним, описывающие влияние стратификации во внешнем вертикальном и в горизонтальном магнитных полях. Показано влияние стратификации на групповые и фазовые скорости найденных волн. Выявлены трехволновые взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.
3. Развита теория волновых процессов во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби. Показано влияние стратификации и учета горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трехволновых взаимодействий в четырех различных приближениях силы Кориолиса и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.
4. Получена полная система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении. Получены магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении для сжимаемых вращающихся течений с устойчивой стратификацией в приближении стандартных и нестандартных f - и β -плоскостей для силы Кориолиса. Найдены дисперсионные соотношения для магнитных инерционно - гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито - Россби. Показано отличие в динамике найденных волн в неупругом приближении от волн в приближении Буссинеска. Показано влияние сжимаемости, стратификации и учета горизонтальной составляющей силы Кориолиса на динамику найденных волн. Выявлены все возможные типы трехволновых взаимодействий в четырех различных приближениях силы Кориолиса и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах сектора 53.9 ИКИ РАН, а также на международных и российских конференциях:

- Конференция молодых ученых ИКИ РАН, Москва, 2019-2021
- Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, 2018-2020
- Курчатовская междисциплинарная молодежная научная школа, Москва, НИЦ ”Курчатовский Институт 2019
- Arcetri Workshop on Plasma Astrophysics, Florence, Italy, 2019
- General Assembly of European Geosciences Union, Vienna, Austria, 2020
- American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco, USA, 2020

Публикации по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 6 статьях в реферируемых российских и международных журналах, рекомендованных ВАК:

1. Федотова, М.А., Климачков Д.А., Петросян А.С., Магнитогидродинамическая теория мелкой воды для течений стратифицированной вращающейся астрофизической плазмы. Приближение бета-плоскости, магнитные волны Россби, Физика плазмы, Том 46, Вып. 1, стр. 57, 2020
2. Petrosyan, A., Klimachkov, D., Fedotova, M., Zinyakov, T., Shallow Water Magnetohydrodynamics in Plasma Astrophysics. Waves, Turbulence, and Zonal Flows. Atmosphere, 11, p. 314, 2020.
3. Федотова, М.А., Петросян А.С., Волновые процессы в трехмерных стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска, ЖЭТФ, Том 158, Вып. 2, стр. 374, 2020
4. Федотова, М.А., Петросян А.С., Волновые процессы во вращающихся сжимаемых течениях астрофизической плазмы с устойчивой стратификацией, ЖЭТФ, Том 158, Вып. 6, стр. 1188, 2020
5. Fedotova, M., Klimachkov, D., Petrosyan, A., Variable Density Flows in Rotating Astrophysical Plasma. Linear Waves and Resonant Phenomena, Universe, 7, p. 87, 2021.
6. Fedotova, M., Klimachkov, D., Petrosyan, A., Resonant interactions of magneto-Poincaré and magneto-Rossby waves in quasi-two-dimensional rotating astrophysical plasma, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 509(1), p.312, 2022

Полный список работ включает также 10 публикаций в тезисах докладов российских и международных конференций.

Личный вклад автора

Автор принимал участие в постановке задач, проводил все аналитические исследования, принимал участие в интерпретировании полученных результатов, принимал участие в подготовке статей.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, содержит 124 страницы и 23 рисунка. Список используемой литературы содержит 126 наименований.

Содержание работы

В первой главе диссертации развита магнитогидродинамическая теория двуслойной мелкой воды для вращающейся стратифицированной плазмы со свободной границей в поле силы тяжести, находящейся во внешнем вертикальном магнитном поле (Рис. 1). Полученная система уравнений имеет стационарное решение либо в вертикальном, либо в горизонтальном магнитном поле. Исследуются волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби и их трехволновые взаимодействия.

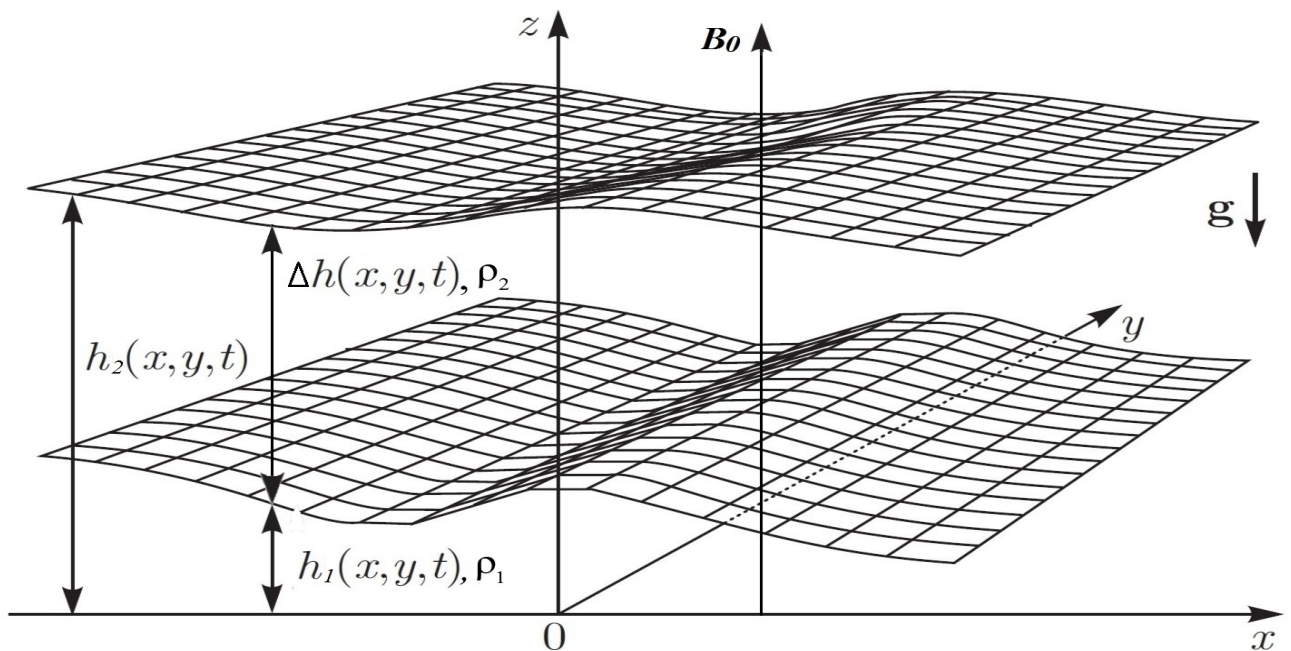


Рис. 1: Тонкий слой плазмы в вертикальном магнитном поле, разделенный на два слоя различной, но постоянной плотности.

В разделе 1.2 получена система магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды для вращающейся плазмы в поле силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле. Система получена из исходных трехмерных уравнений магнитной гидродинамики усреднением уравнений по высоте слоев в предположении гидростатичности распределений давлений и малости толщины слоев по отношению к характерным горизонтальным линейным размерам задачи. В

результате полученная система уравнений записывается относительно переменных высоты слоев, средних по высоте горизонтальных скоростей течения и среднего по высоте магнитного поля. В полученной системе уравнений наличие внешнего вертикального магнитного поля приводит к дополнительным слагаемым в уравнениях для изменения импульса и для магнитной индукции и к необходимости учета вертикальной компоненты магнитного поля. В разделе получены уравнения для вертикальной составляющей магнитного поля и следствие условия бездивергентности, удовлетворяющееся тождественно при задании корректных начальных условий. Таким образом, модернизированные уравнения двуслойной мелкой воды описывают трехмерную структуру магнитного поля и позволяют глубже понять как линейные, так и нелинейные эффекты в изучаемых плазменных течениях. Уравнение для вертикальной составляющей магнитного поля отделяется от остальных уравнений системы, так что для дальнейшего исследования течений оно не используется. При отсутствии внешнего магнитного поля система уравнений мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле сводится к известной системе со стационарными решениями в виде горизонтальных (полоидального, тороидального и их суммы) магнитных полей. В частном случае равенства высот и плотностей слоев система уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле сводится к известной системе уравнений однослойной мелкой воды во внешнем магнитном поле.

В разделе 1.3 получена система магнитогидродинамических уравнений двуслойной мелкой воды для вращающейся плазмы в поле силы тяжести во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении β -плоскости. В подразделе 1.3.1 полученная система уравнений линеаризована на фоне стационара с вертикальным магнитным полем. Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы получено полное дисперсионное соотношение. Найдены решения в виде суммы волны (магнито - Пуанкаре, магнито - Россби) и малой поправки, описывающей влияние стратификации:

$$\begin{aligned} \omega_{MP_v} + \delta_{MP_v} &= \sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02}} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right) \pm + \\ &\pm \frac{1}{2} \left(\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right)^2 - \frac{\varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right)}{(\omega_{MP_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MP_v}^2 - \omega_2^2)} \right)^{(1/2)}, \\ \omega_{MR_v} + \delta_{MR_v} &= \frac{\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + \frac{gk^2 (h_{01}^3 + \Delta h_0^3)}{h_{01} \Delta h_0} \right)}{\beta k_x g h_{02}} - \frac{\varphi_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right)}{(\omega_{MR_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_v}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right) &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \cdot \left(\omega_{MP_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MP_v} + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \left(\omega_{MP_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MP_v} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right), \\ \varphi_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right) &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \cdot \left(\omega_{MR_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MR_v} + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \left(\omega_{MR_v}^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega_{MR_v} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right), \end{aligned}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(f_0^2 + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} - \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)^2 + f_0^2 \left(f_0^2 + \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)} \right),$$

B_0 — внешнее вертикальное магнитное поле, h_{01} — высота нижнего слоя, $\Delta h_0 = h_{02} - h_{01}$ — высота нижнего слоя, $f_0 = 2\Omega_0 \sin \theta_0$, $\beta = 2\Omega_0 \cos \theta_0 / R$, Ω_0 — угловая скорость вращения, постоянная в обоих слоях, θ_0 — широта, R — радиус сферы, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ — волновой вектор, g — ускорение свободного падения, ρ_1 — плотность в нижнем слое, ρ_2 — плотность в верхнем слое.

Исследовано влияние стратификации на групповые и фазовые скорости волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле. В отсутствие магнитного поля получено дисперсионное уравнение, аналогичное дисперсионному уравнению слоя нейтральной жидкости в приближении мелкой воды с решением в виде гидродинамической волны Россби. Найдена поправка к гидродинамической волне Россби, связанная со стратификацией.

В подразделе 1.3.2 полученная система уравнений линейризована на фоне стационара с горизонтальным магнитным полем. Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линейризованной системы получено полное дисперсионное соотношение. При равенстве магнитных полей в слоях найдены решения в виде суммы волны (магнито - Пуанкаре, магнито - Россби, аналогичные волнам в однослойной модели) и малой поправки, описывающей влияние стратификации:

$$\begin{aligned} \omega_{MP_h} + \delta_{MP_h} &= \sqrt{2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02}} + \frac{1}{2} (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_{02}k^2) \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \left((2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + f_0^2 + gh_{02}k^2)^2 - \frac{\varphi_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h} \right)}{(\omega_{MP_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MP_h}^2 - \omega_4^2)} \right)^{(1/2)}, \\ \omega_{MR_h} + \delta_{MR_h} &= \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + gk^2 h_{02})}{\beta k_x g h_{02}} - \frac{\varphi_4 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h} \right)}{(\omega_{MR_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_h}^2 - \omega_4^2) g h_{02} \beta k_x}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h} \right) &= \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) g^2 k^2 h_{01} \Delta h_0 [k^2 \omega_{MP_h}^4 - 2\beta k_x \omega_{MP_h}^3 + \\ &+ 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \omega_{MP_h}^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \beta k_x \omega_{MP_h} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h} \right) &= \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) g^2 k^2 h_{01} \Delta h_0 [k^2 \omega_{MR_h}^4 - 2\beta k_x \omega_{MR_h}^3 + \\ &+ 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \omega_{MR_h}^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \beta k_x \omega_{MR_h} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^4], \end{aligned}$$

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{f_0^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \pm f_0 \sqrt{\frac{f_0^2}{4} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}.$$

$(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})$ — скалярное произведение волнового вектора и вектора магнитного поля, $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y})$ — горизонтальное магнитное поле в состоянии покоя.

Исследовано влияние стратификации на групповые и фазовые скорости волн магнито - Пуанкаре и волн магнито - Россби.

В разделе 1.4 развита слабонелинейная теория волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби

в приближении двуслойной мелкой воды на β -плоскости. В подразделе 1.4.1 качественно исследованы полученные дисперсионные уравнения на выявление трехволновых взаимодействий, удовлетворяющий условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Качественный анализ дисперсионных кривых заключается в построении двух кривых, смещенных относительно друг друга на \mathbf{k}_c . Пересечение двух кривых означает выполнение условия синхронизма, а точка пересечения соответствует $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2))$. Выявлены следующие трехволновые взаимодействия в двуслойной мелкой воде на β -плоскости как в вертикальном, так и в горизонтальном магнитном поле: две волны магнито-Россби и волна магнито-Пуанкаре; две волны магнито-Пуанкаре и волна магнито-Россби; три волны магнито-Россби. В подразделе 1.4.2 методом многомасштабных разложений выведена система амплитуд трех взаимодействующих волн и получены коэффициенты взаимодействия как во внешнем вертикальном, так, и в горизонтальном магнитном поле. Слагаемые в коэффициентах взаимодействия образуют три группы: связанные с нижним слоем плазмы, связанные с верхним слоем плазмы и связанные с отношением плотностей слоев. В частном случае коэффициенты взаимодействия в двуслойной мелкой воде переходят в коэффициенты взаимодействия в однослойной мелкой воде. Система амплитудных уравнений имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше двух других, имеет место распад волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много меньше двух других, имеет место усиление волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. В подразделе 1.4.3 исследованы такие неустойчивости и найдены их инкременты для трехволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби в двуслойной мелкой воде во внешнем магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле. Найдены следующие неустойчивости: распад волны магнито-Россби на волну магнито-Пуанкаре и волну магнито-Россби; распад волны магнито-Пуанкаре на волну магнито-Россби и волну магнито-Пуанкаре; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Россби волной магнито-Пуанкаре и волной магнито-Россби; усиление волны магнито-Пуанкаре волной магнито-Россби и волной магнито-Пуанкаре; усиление волны магнито-Россби двумя волнами магнито-Россби.

Во второй главе диссертации развита теория волновых процессов во вращающихся течениях стратифицированной астрофизической плазмы в приближении Буссинеска. Учет силы Кориолиса произведен в четырех различных приближениях: приближение стандартной f -плоскости (вектор Кориолиса постоянен и направлен вдоль оси z); приближение нестандартной f -плоскости (вектор Кориолиса постоянен и имеет как вертикальную компоненту, так и компоненту вдоль оси y); приближение стандартной β -плоскости (вектор Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и имеет только вертикальную компоненту, которая раскладывается в ряд по широте до первого порядка малости); приближение нестандартной β -плоскости (вектор Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и имеет как вертикальную, так и горизонтальную компоненты, которые раскладываются в ряд по широте до первого порядка малости). Исследуются магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитоастрофизические волны и волны магнито-Россби.

В разделе 2.2 система магнитогидродинамических уравнений несжимаемой вращающейся

стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска линейаризована на фоне стационарного состояния (покоящийся слой плазмы с линейным профилем плотности и постоянным магнитным полем). В подразделе 2.2.1 получено дисперсионное соотношение на стандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн, восстанавливающими силами которых являются сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести: трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\omega_{mig3D} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4}}$$

и трехмерные магнитострофические волны

$$\omega_{mig3D} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4}},$$

где $f_V \equiv f_0$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_h^2 + k_z^2$ — волновой вектор, $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$ — магнитное поле в состоянии покоя, N^2 — частота Брента-Вяйсяля для несжимаемых течений.

В случае отсутствия магнитного поля решением являются трехмерные инерционно-гравитационные волны, для которых характерно свойство перпендикулярности групповой скорости волновому вектору. Показано, что наличие магнитного поля нарушает это свойство — групповая скорость магнитных инерционно-гравитационных волн не перпендикулярна волновому вектору. В частном случае только вертикальных возмущений решениями являются магнитные инерционные волны

$$\omega_{z_1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}},$$

$$\omega_{z_2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}.$$

В частном случае горизонтальных возмущений найдены волны Альфвена и магнитогравитационные волны.

В подразделе 2.2.2 получено дисперсионное соотношение на нестандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн, восстанавливающими силами которых являются сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести: трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Их дисперсионные соотношения схожи с дисперсионными соотношениями для аналогичных волн на стандартной f -плоскости с точностью до слагаемых с вектором Кориолиса. Слагаемые с вертикальной компонентой $f_V k_z$ переходят в слагаемые с учетом горизонтальной компоненты $f_H k_y + f_V k_z$. В частном случае вертикальных возмущений решениями также являются магнитные инерционные волны ω_{z_1} , ω_{z_2} . В частном случае горизонтальных возмущений в следствие учета горизонтальной составляющей вектора Кориолиса решениями дисперсионного уравнения на нестандартной f -плоскости являются двумерные магнитные инерционно-гравитационные и двумерные магнитострофические волны.

В подразделе 2.2.3 записана система уравнений несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы на стандартной β -плоскости. Система линейаризована на фоне стационара с посто-

янным магнитным полем и линейным профилем плотности. Получено дисперсионное соотношение на стандартной β -плоскости и найдены решения в виде стандартных волн магнито-Россби, а также низкочастотных трехмерных волн магнито-Россби, динамика которых определяется не только силой Кориолиса и Лоренца, но и силой плавучести:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2]}{\beta k_x [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \beta]}.$$

В частном случае нейтральных течений найдены низкочастотные трехмерные гидродинамические волны Россби, динамика которых определяется как силой Кориолиса, так и силой плавучести:

$$\omega_{R_{3D}} = \frac{N^2 \beta k_x}{f_V^2 k_z^2 - N^2 k_h^2}.$$

В случае горизонтальных течений данный тип волн переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби.

В подразделе 2.2.4 записана линеаризованная система уравнений несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы на нестандартной β -плоскости. Система линеаризована на фоне стационара с постоянным магнитным полем и линейным профилем плотности. Получено дисперсионное соотношение на стандартной β -плоскости и найдены решения в виде волн, динамика которых определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести: одномерные магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны, низкочастотные трехмерные волны магнито-Россби:

$$\omega_{MR'_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2]}{k_x [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2]},$$

где $\gamma = -\frac{2\Omega_0 \sin \theta_0}{R}$.

В частном случае нейтральных течений найдены низкочастотные трехмерные гидродинамические волны Россби, динамика которых определяется как силой Кориолиса, так и силой плавучести:

$$\omega_{R'_{3D}} = \frac{N^2 \beta k_x}{(f_H k_y + f_V k_z)^2 - N^2 k_h^2}.$$

В случае горизонтальных течений данный тип волн переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби.

В разделе 2.3 развита слабонелинейная теория волн во вращающихся течениях плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска. В подразделе 2.3.1 качественно исследованы полученные дисперсионные уравнения на выявление трехволновых взаимодействий, удовлетворяющий условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. На стандартной f -плоскости выявлены следующие трехволновых взаимодействия: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена; две магнитные инерционные волны с частотами ω_{z_1} и магнитная инерционная волна с частотой ω_{z_2} ; три магнитные инерционные волны с частотами ω_{z_2} . На нестандартной f -плоскости при малой горизонтальной составляющей вектора Кориолиса реализуется взаимодействие двух магнитострофических волн и магнитной инерционно-гравитационной волны. Однако, при достаточно большой горизонтальной составляющей вид дисперсионных кривых сильно меняется, что

допускает возникновение еще одного типа трехволновых взаимодействий: две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнито-Россби волна. На стандартной β -плоскости выявлены следующие трехволновые взаимодействия: три волны магнито-Россби; две магнито-Россби и магнито-Россби волна; две волны магнито-Россби и магнито-Россби волна; три низкочастотные волны магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости реализуются взаимодействия магнито-Россби волн, аналогичные взаимодействиям на нестандартной f -плоскости, а также взаимодействие трех низкочастотных волн магнито-Россби.

В подразделе 2.3.2 получены коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях трех взаимодействующих волн для каждого из четырех приближений силы Кориолиса. Система амплитудных уравнений имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше двух других, имеет место распад волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много меньше двух других, имеет место усиление волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. В подразделе 2.3.3 исследованы такие неустойчивости и найдены их инкременты. На стандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад магнито-Россби волны на волну Альфвена и магнито-Россби волну; распад магнитной инерционной волны ω_{z_1} на магнитную инерционную волну ω_{z_2} и магнитную инерционную волну ω_{z_1} ; распад магнитной инерционной волны ω_{z_2} на две магнитные инерционные волны ω_{z_2} ; усиление магнито-Россби волны волной Альфвена и магнито-Россби волной; усиление магнитной инерционной волны ω_{z_1} магнитной инерционной волной ω_{z_2} и магнитной инерционной волной ω_{z_1} ; усиление магнитной инерционной волны ω_{z_2} двумя магнитными инерционными волнами ω_{z_2} . На нестандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнито-Россби волны; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную волну и магнито-Россби волну; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны двумя магнито-Россби волнами; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны магнитной инерционно-гравитационной волной и магнито-Россби волной.

На стандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад волны Альфвена на две магнито-Россби волны; распад волны магнито-Россби на две магнито-Россби волны; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби; распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби; усиление волны Альфвена двумя магнито-Россби волнами; усиление волны магнито-Россби двумя магнито-Россби волнами; усиление волны магнито-Россби двумя волнами магнито-Россби; усиление низкочастотной волны магнито-Россби двумя низкочастотными волнами магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны на две магнито-Россби волны; распад магнитной инерционно-гравитационной волны на магнитную инерционно-гравитационную и магнито-Россби волны; распад низкочастотной волны магнито-Россби на две низкочастотные волны магнито-Россби; усиление магнит-

ной инерционно-гравитационной волны двумя магнито-Россби волнами; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны магнитной инерционно-гравитационной и магнито-Россби волнами; усиление низкочастотной волны магнито-Россби двумя низкочастотными волнами магнито-Россби.

В третьей главе диссертации развита теория волновых процессов в сжимаемых вращающихся течениях стратифицированной астрофизической плазмы в неупругом приближении. Учет силы Кориолиса произведен в четырех различных приближениях: приближение стандартной f -плоскости (вектор Кориолиса постоянен и направлен вдоль оси z); приближение нестандартной f -плоскости (вектор Кориолиса постоянен и имеет как вертикальную компоненту, так и компоненту вдоль оси y); приближение стандартной β -плоскости (вектор Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и имеет только вертикальную компоненту, которая раскладывается в ряд по широте до первого порядка малости); приближение нестандартной β -плоскости (вектор Кориолиса слабо меняется при малых изменениях широты и имеет как вертикальную, так и горизонтальную компоненты, которые раскладываются в ряд по широте до первого порядка малости). Исследуются сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны, магнито-Россби волны и волны магнито-Россби.

В разделе 3.2 получена система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении. Полученная система линеаризована на фоне стационарного состояния (покоящийся слой плазмы с линейным профилем энтропии и постоянным магнитным полем).

В разделе 3.3 развита линейная теория волновых процессов в сжимаемом стратифицированной вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии. В подразделе 3.3.1 получено дисперсионное соотношение на стандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн, восстанавливаемыми механизмами которых являются вращение, магнитное поле и сжимаемость: трехмерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные сжимаемые магнито-Россби волны. Их дисперсионные соотношения имеют вид, схожий с дисперсионными соотношениями аналогичных волн в приближении Буссинеска с точностью до слагаемых с частотой Брента-Вяйсяля. Именно эти слагаемые отражают влияние сжимаемости на динамику волн. В приближении Буссинеска частота Брента-Вяйсяля (для несжимаемых течений) зависит только от профиля плотности, тогда как в неупругом приближении частота Брента-Вяйсяля (для сжимаемых течений) зависит как от профиля плотности, так и от профиля давления. В частном случае двумерных горизонтальных возмущений найдены волны Альфвена и сжимаемые магнито-Россби волны. В частном случае вертикальных возмущений решением дисперсионного уравнения являются магнитные инерционные волны, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

В подразделе 3.3.2 получено дисперсионное соотношение на нестандартной f -плоскости и найдены решения в виде волн с принципиально новыми дисперсионными соотношениями, восстанавливаемыми механизмами которых являются вращение, магнитное поле и сжимаемость:

сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\omega_{mig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2},$$

$$\omega_{mig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}.$$

А также схожие (с точностью до слагаемых с частотой Брента-Вяйсяля) с волнами в приближении Буссинеска одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны.

В подразделе 3.3.3 получено дисперсионное соотношение на стандартной β -плоскости и найдены решения в виде сжимаемых магнитогравитационных волн, аналогичных волнам на стандартной f -плоскости, волн магнито-Россби, аналогичных волнам в приближении Буссинеска, волн Альфвена, а также волн с принципиально новым дисперсионным соотношением, восстанавливающими механизмами которых являются вращение, магнитное поле и сжимаемость: трехмерные сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - K_h^2 N_\theta^2]}{k_x \beta ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2) + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)}.$$

В подразделе 3.3.4 получено дисперсионное соотношение на нестандартной β -плоскости и найдены решения в виде сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, аналогичных волнам на нестандартной f -плоскости, волн магнито-Россби, аналогичных волнам в приближении Буссинеска, а также волн с принципиально новым дисперсионным соотношением, восстанавливающими механизмами которых являются вращение, магнитное поле и сжимаемость: сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн

$$\omega_{mig_\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 + \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{0y}^2}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

сжимаемых магнитострофических волн

$$\omega_{mstr_\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 - \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{0y}^2}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

и трехмерных сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби

$$\omega_{MR'_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]}{k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta k_x N_\theta^2 - \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) [f_H (B_{0x} k_h^2 + B_{0z} k_x k_z) + f_V k_z (B_{0x} k_y - B_{0y} k_x)] \right)}.$$

В разделе 3.4 развита слабонелинейная теория волн во вращающихся сжимаемых течениях плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении. В подразделе 3.4.1 качественно исследованы полученные дисперсионные уравнения на выявление трехволновых взаимодей-

ствий, удовлетворяющий условию синхронизма $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. На стандартной f -плоскости выявлены следующие трехволновые взаимодействия: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена; две магнитострофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна; магнитострофическая волна и две магнитные инерционно-гравитационные волны; магнитная инерционно-гравитационная волна и две магнитострофические волны; три магнитострофические волны. На нестандартной f -плоскости выявлены следующие трехволновые взаимодействия: две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена; три магнитные инерционно-гравитационные волны. На стандартной β -плоскости выявлены следующие трехволновые взаимодействия: две магнитогравитационные волны и волна Альфвена; три волны магнито-Россби; две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна; три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости выявлены следующие трехволновые взаимодействия: две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна; волна магнито-Россби и две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны; две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны $\omega_{mig\beta}$ и сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mstr\beta}$; три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби.

В подразделе 3.4.2 получены коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях трех взаимодействующих волн для всех четырех приближений силы Кориолиса. Система амплитудных уравнений имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше двух других имеет место распад волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. Когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много меньше двух других имеет место усиление волны с частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами с частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$. В подразделе 3.4.3 исследованы такие неустойчивости и найдены их инкременты. На стандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны Альфвена при участии двух сжимаемых магнитогравитационных волн; распад или усиление магнитной инерционной волны при участии двух магнитных инерционных волн; распад или усиление сжимаемой магнитострофической волны при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо сжимаемой магнитострофической и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн, либо двух сжимаемых магнитострофических волн; распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при участии либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной и сжимаемой магнитострофической волн, либо двух сжимаемых магнитострофических волн. На нестандартной f -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны и волны Альфвена; распад или усиление волны Альфвена при участии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн; распад или усиление одномерной сжимаемой магнитострофической волны при участии либо одномерной сжимаемой магнитострофической и одномерной сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн, либо двух одномерных жи-

маемых инерционно-гравитационных волн.

На стандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны магнито-Россби при участии либо двух волн магнито-Россби, либо двух сжимаемых магнито-гравитационных волн; распад или усиление сжимаемой магнито-гравитационной волны при участии двух волн магнито-Россби; распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости возможны следующие неустойчивости: распад или усиление волны магнито-Россби при участии либо двух волн магнито-Россби, либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо волны магнито-Россби и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны; распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной и магнито-Россби волн, либо двух волн магнито-Россби; распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig\beta}$ при участии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig\beta}$ и сжимаемой магнитострофической волны $\omega_{mstr\beta}$; распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби.

В заключении приведены результаты работы.

Глава 1. Магнитогидродинамическая теория мелкой воды для течений стратифицированной вращающейся астрофизической плазмы

1.1 Введение

Глава посвящена развитию теории течений тонкого слоя стратифицированной плазмы в поле силы тяжести со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле при наличии вращения [25, 26, 113, 114, 115, 116, 117, 118]. Уравнения, полученные в [28, 29, 31], обобщаются на случай тонкого вращающегося слоя плазмы разделенного на два слоя с постоянными, но различными плотностями. Получены две системы уравнений: уравнения с полным учетом силы Кориолиса и уравнения на бета-плоскости. Полученные магнитогидродинамические уравнения мелкой воды представляют собой единственную возможность самосогласованного учета внешнего магнитного поля и стратификации. Двуслойные магнитогидродинамические уравнения мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической стратифицированной плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной стратифицированной жидкости [37, 41, 42]. В главе получено полное дисперсионное уравнение на β -плоскости в магнитогидродинамической модели двуслойной мелкой воды и найдены дисперсионные соотношения волн магнито-Россби и магнито-Пуанкаре как во внешнем вертикальном магнитном поле, так и в горизонтальном магнитном поле, с учетом плотностной стратификации. Найдено, что поправки к волнам магнито-Россби и магнито-Пуанкаре, связанные со стратифи-

кацией, изменяют фазовые и групповые скорости волн. В случае наличия внешнего магнитного поля, как и в случае его отсутствия, проведен подробный качественный анализ условий синхронизма [74] и обнаружены новые типы трехволновых взаимодействий волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби. Методом многомасштабных разложений [75] изучены трехволновые взаимодействия найденных волн: две волны магнито-Пуанкаре и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и волна магнито-Пуанкаре; три волны магнито-Россби. Показана возможность наличия следующих неустойчивостей для найденных волн: распад волны магнито-Пуанкаре на волну магнито-Россби и волну магнито-Пуанкаре; распад волны магнито-Россби на волну магнито-Пуанкаре и волну магнито-Россби; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Пуанкаре в поле волны магнито-Россби и волны магнито-Пуанкаре; усиление волны магнито-Россби в поле волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Россби в поле двух волн магнито-Россби.

1.2 Магнитогидродинамические уравнения стратифицированной вращающейся плазмы во внешнем магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды

Получим магнитогидродинамические уравнения, описывающие стратифицированную плазму в приближении двуслойной мелкой воды. В качестве исходной рассмотрим трехмерную систему магнитогидродинамических уравнений для вращающейся несжимаемой плазмы в поле тяжести:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p - \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} - \rho(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

где \mathbf{u} - вектор скорости, \mathbf{B} - вектор напряженности магнитного поля, ρ - плотность, $f = 2\Omega \sin \theta$ - параметр Кориолиса, θ - широта, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ - ускорение свободного падения. Первое уравнение системы — уравнение изменения импульса, второе — уравнение переноса магнитного поля, третье — условие бездивергентности поля скоростей, четвертое — условие бездивергентности магнитного поля.

Будем изучать течение тонкого стратифицированного слоя плазмы со свободной границей в однородном поле силы тяжести, во вращающейся системе координат, при наличии внешнего вертикального магнитного поля B_0 (Рис. 2).

Разделим тонкий слой плазмы высотой h_2 на два слоя: нижний слой высоты h_1 с постоянной плотностью ρ_1 и верхний слой высоты $\Delta h = h_2 - h_1$ с постоянной плотностью ρ_2 . Для вывода двуслойных уравнений мелкой воды запишем исходную систему (1.1-1.4) для каждого из слоев и проинтегрируем по вертикальной координате в пределах от 0 до h_1 для нижнего слоя и от h_1 до h_2 для верхнего слоя. Считаем высоты каждого слоя много меньше характерных линейных

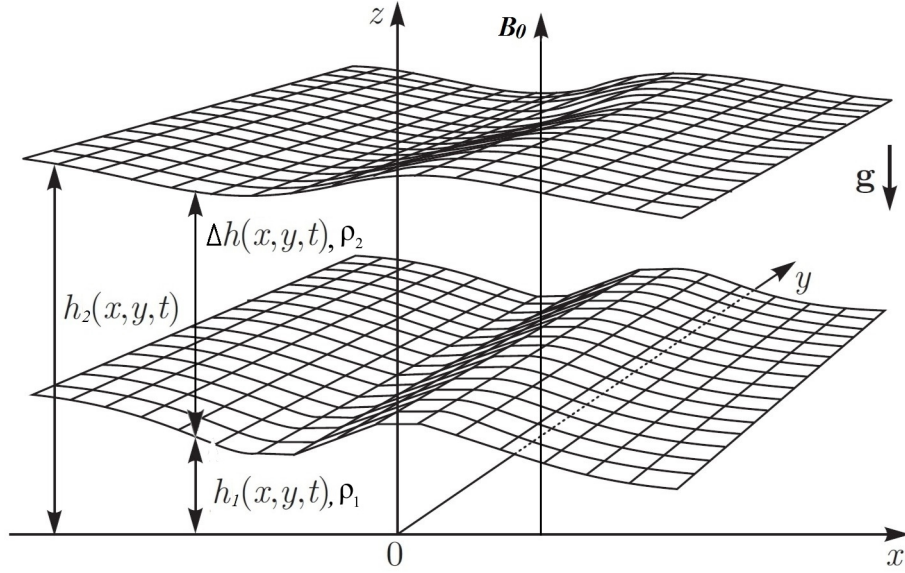


Рис. 2: Геометрия задачи

горизонтальных масштабов задачи. В этом случае полное давление (сумма гидродинамического и магнитного) считаем гидростатическим, пренебрегая вертикальными ускорениями. В результате получим магнитогидродинамические уравнения для двух слоев плазмы различной плотности в приближении мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле.

Запишем уравнения (1.1) и (1.2) для каждого слоя плазмы в матричном виде. Для нижнего слоя плазмы высотой h_1 и плотностью ρ_1 уравнения (1.1), (1.2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \begin{pmatrix} \rho_1 u_{11} \\ \rho_1 u_{21} \\ \rho_1 u_{31} \\ \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{21} \\ \tilde{B}_{31} \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho_1 u_{11}^2 - \tilde{B}_{11}^2 + \tilde{p}_1 \\ \rho_1 u_{11} u_{21} - \tilde{B}_{11} \tilde{B}_{21} \\ \rho_1 u_{11} u_{31} - \tilde{B}_{11} \tilde{B}_{31} \\ 0 \\ u_{11} \tilde{B}_{21} - u_{21} \tilde{B}_{11} \\ u_{11} \tilde{B}_{31} - u_{31} \tilde{B}_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_1 u_{11} u_{21} - \tilde{B}_{11} \tilde{B}_{21} \\ \rho_1 u_{21}^2 - \tilde{B}_{21}^2 + \tilde{p}_1 \\ \rho_1 u_{21} u_{31} - \tilde{B}_{21} \tilde{B}_{31} \\ u_{21} \tilde{B}_{11} - u_{11} \tilde{B}_{21} \\ 0 \\ u_{21} \tilde{B}_{31} - u_{31} \tilde{B}_{21} \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} \rho_1 u_{11} u_{31} - \tilde{B}_{11} \tilde{B}_{31} \\ \rho_1 u_{21} u_{31} - \tilde{B}_{21} \tilde{B}_{31} \\ \rho_1 u_{31}^2 - \tilde{B}_{31}^2 + \tilde{p}_1 \\ u_{31} \tilde{B}_{11} - u_{11} \tilde{B}_{31} \\ u_{31} \tilde{B}_{21} - u_{21} \tilde{B}_{31} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 f u_{21} \\ -\rho_1 f u_{11} \\ -\rho_1 g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

где ρ_1 - плотность нижнего слоя, $\tilde{p}_1 = p_1 + \frac{B_1^2}{8\pi}$ - магнитогидростатическое давление в нижнем слое, $\tilde{B}_{11}, \tilde{B}_{21}, \tilde{B}_{31}$ - компоненты напряженности магнитного поля в нижнем слое ($B^2 = 4\pi \tilde{B}^2$), u_{11}, u_{21}, u_{31} - компоненты скорости в нижнем слое.

Для верхнего слоя высотой $h_2 - h_1$ и плотностью ρ_2 уравнения (1.1), (1.2) имеют следующий

вид:

$$\begin{aligned}
\partial_t \begin{pmatrix} \rho_2 u_{1_2} \\ \rho_2 u_{2_2} \\ \rho_2 u_{3_2} \\ \tilde{B}_{1_2} \\ \tilde{B}_{2_2} \\ \tilde{B}_{3_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 u_{1_2}^2 - \tilde{B}_{1_2}^2 + \tilde{p}_2 \\ \rho_2 u_{1_2} u_{2_2} - \tilde{B}_{1_2} \tilde{B}_{2_2} \\ \rho_2 u_{1_2} u_{3_2} - \tilde{B}_{1_2} \tilde{B}_{3_2} \\ 0 \\ u_{1_2} \tilde{B}_{2_2} - u_{2_2} \tilde{B}_{1_2} \\ u_{1_2} \tilde{B}_{3_2} - u_{3_2} \tilde{B}_{1_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 u_{1_2} u_{2_2} - \tilde{B}_{1_2} \tilde{B}_{2_2} \\ \rho_2 u_{2_2}^2 - \tilde{B}_{2_2}^2 + \tilde{p}_2 \\ \rho_2 u_{2_2} u_{3_2} - \tilde{B}_{2_2} \tilde{B}_{3_2} \\ u_{2_2} \tilde{B}_{1_2} - u_{1_2} \tilde{B}_{2_2} \\ 0 \\ u_{2_2} \tilde{B}_{3_2} - u_{3_2} \tilde{B}_{2_2} \end{pmatrix} + \\
+ \begin{pmatrix} \rho_2 u_{1_2} u_{3_2} - \tilde{B}_{1_2} \tilde{B}_{3_2} \\ \rho_2 u_{2_2} u_{3_2} - \tilde{B}_{2_2} \tilde{B}_{3_2} \\ \rho_2 u_{3_2}^2 - \tilde{B}_{3_2}^2 + \tilde{p}_2 \\ u_{3_2} \tilde{B}_{1_2} - u_{1_2} \tilde{B}_{3_2} \\ u_{3_2} \tilde{B}_{2_2} - u_{2_2} \tilde{B}_{3_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_2 f u_{2_2} \\ -\rho_2 f u_{1_2} \\ -\rho_2 g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)
\end{aligned}$$

где ρ_2 - плотность верхнего слоя, $\tilde{p}_2 = p_2 + \frac{B_2^2}{8\pi}$ - магнитогидростатическое давление в верхнем слое, $\tilde{B}_{1_2}, \tilde{B}_{2_2}, \tilde{B}_{3_2}$ - компоненты напряженности магнитного поля в верхнем слое ($B^2 = 4\pi \tilde{B}^2$), $u_{1_2}, u_{2_2}, u_{3_2}$ - компоненты скорости в верхнем слое.

Запишем граничные условия для каждого слоя плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле:

$$u_3|_{z=0} = 0 \quad (1.7)$$

$$u_3|_{z=h_1} = \partial_t h_1 + u_1|_{z=h_1} \partial_x h_1 + u_2|_{z=h_1} \partial_y h_1 \quad (1.8)$$

$$u_3|_{z=h_2} = \partial_t h_2 + u_1|_{z=h_2} \partial_x h_2 + u_2|_{z=h_2} \partial_y h_2 \quad (1.9)$$

В качестве граничного условия для поля скоростей на дне используем условие непротекания (1.7). Граничное условие на границе между слоями описывает условие равенства вертикальной компоненты скорости нижнего слоя и скорости перемещения границы между слоями (1.8). Граничное условие на свободной границе соответствует условию равенства вертикальной компоненты скорости верхнего слоя и скорости перемещения свободной границы (1.9).

Граничные условия для магнитного поля имеют следующий вид:

$$B_3|_{z=0} = B_0 \quad (1.10)$$

$$B_3|_{z=h_1} = B_1|_{z=h_1} \partial_x h_1 + B_2|_{z=h_1} \partial_y h_1 + B_0 \quad (1.11)$$

$$B_3|_{z=h_2} = B_1|_{z=h_2} \partial_x h_2 + B_2|_{z=h_2} \partial_y h_2 + B_0 \quad (1.12)$$

В случае когда внешнее поле отсутствует ($B_0 = 0$ в уравнениях (1.10-1.12)), граничные условия для вертикальной составляющей магнитного поля B_3 на поверхностях $z = h_1$ и $z = h_2$ задаются условием параллельности вектора поля соответственно границе между слоями $h_1(x,y)$ и верхней границе $h_2(x,y)$ и представляют собой сумму горизонтальных компонент B_1, B_2 , домноженных на соответствующие тангенсы углов $\partial h_{1,2}/\partial x$ и $\partial h_{1,2}/\partial y$. Таким образом, на дне при $z = 0$ верти-

кальная компонента магнитного поля $B_3 = 0$ (1.10). При наложении внешнего вертикального магнитного поля в граничные условия на вертикальную компоненту поля B_3 на поверхностях $z = 0$ (1.10), $z = h_1$ (1.11), $z = h_2$ (1.12) необходимо добавить слагаемое B_0 .

Используя замену $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} \frac{1}{\sqrt{\rho}}$, преобразуем уравнения для вертикальных компонент скоростей u_{3-1} и u_{32} в системах 1.5 и (1.6) к следующему виду:

$$\partial_t u_{3i} + (\mathbf{u}_i \nabla) u_{3i} - (\mathbf{B}_i \nabla) B_{3i} + \rho_i^{-1} \partial_z \left(p_i + \frac{\rho_i}{2} |B_i|^2 \right) = -g \quad (1.13)$$

где индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою плазмы, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою плазмы.

Запишем условие гидростатики для полного давления в каждом слое в следующем виде:

$$\partial_z \left(p_i + \frac{\rho_i}{2} B_i^2 \right) = -\rho_i g, \quad (1.14)$$

где индекс $i = 1$ соответствует нижнему слою плазмы, а индекс $i = 2$ соответствует верхнему слою плазмы.

Используем данное уравнение, заменив им уравнение (1.13), для получения выражений для давлений на дне тонкого слоя плазмы высотой h_2 и на границе между слоями плазмы различной плотности, а также распределения давления в слоях h_1 плотности ρ_1 и $\Delta h = h_2 - h_1$ плотности ρ_2 . Для этого проинтегрируем уравнение (1.14) по координате z для нижнего слоя в пределах от 0 до h_1 , а для верхнего слоя в пределах от h_1 до h_2 :

$$\int_0^{h_1} \partial_z \tilde{p}_1 dz = - \int_0^{h_1} \rho_1 g dz \quad (1.15)$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \partial_z \tilde{p}_2 dz = - \int_{h_1}^{h_2} \rho_2 g dz \quad (1.16)$$

Считая давление на свободной границе постоянным $p|_{z=h_2} = p_0$, из уравнения (1.16) находим давление на границе между слоями $\tilde{p}|_{h_1}$:

$$\tilde{p}|_{h_1} = p_0 + \rho_2 g (h_2 - h_1) \quad (1.17)$$

Давление $\tilde{p}_2(z)$ в верхнем слое плазмы плотности ρ_2 находим из уравнения (1.16), заменив верхний предел интегрирования h_2 на z :

$$\tilde{p}_2(z) = p_0 + \rho_2 g (h_2 - z) \quad (1.18)$$

Аналогично из уравнения (1.15) находим давление на дне $\tilde{p}|_0$ и давление $\tilde{p}_1(z)$ в нижнем слое плазмы плотности ρ_1 :

$$\int_0^{h_1} \partial_z \tilde{p} dz = -\rho_1 g h_1 \rightarrow \tilde{p}|_{h_1} - \tilde{p}|_0 = -\rho_1 g h_1 \rightarrow \tilde{p}|_0 = p_0 + \rho_2 g (h_2 - h_1) + \rho_1 g h_1 \quad (1.19)$$

$$\int_0^z \partial_z \tilde{p} dz = -\rho_1 g z \rightarrow \tilde{p}_1(z) - \tilde{p}|_0 = -\rho_1 g z \rightarrow \tilde{p}_1(z) = p_0 + \rho_2 g (h_2 - h_1) + \rho_1 g (h_1 - z) \quad (1.20)$$

Проинтегрируем остальные уравнения в системе (1.5) по z от 0 до h_1 , а в системе (1.6) по z от h_1 до h_2 . При интегрировании уравнений (1.5), (1.6) используем правило дифференцирования Лейбница и выражения для давлений, полученные выше (1.17-1.20). Проинтегрируем уравнение непрерывности в пределах от 0 до h_1 для нижнего слоя:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} u_{11} dz - u_{11}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} u_{21} dz - u_{21}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + u_{31}|_{z=h_1} - u_{31}|_{z=0} = 0.$$

С учетом граничных условий (1.7-1.9), получим следующее выражение для уравнения непрерывности в нижнем слое плазмы:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} u_{11} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} u_{21} dz = 0 \quad (1.21)$$

Аналогично проинтегрируем и преобразуем с помощью граничных условий (1.7-1.9) уравнение непрерывности в верхнем слое плазмы:

$$\frac{\partial (h_2 - h_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u_{12} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} u_{22} dz = 0 \quad (1.22)$$

Интегрируя аналогичным образом условия бездивергентности магнитного поля в нижнем и верхнем слоях плазмы во внешнем магнитном поле и используя граничные условия (1.10-1.12), получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} B_{11} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} B_{21} dz = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} B_{12} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} B_{22} dz = 0$$

Проинтегрируем также уравнения для магнитного поля для каждого слоя плазмы. Начнем с уравнения x -компоненты магнитного поля в нижнем слое:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} \tilde{B}_{11} dz - \tilde{B}_{11}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} (u_{21} \tilde{B}_{11} - u_{11} \tilde{B}_{21}) dz - u_{21}|_{z=h_1} \tilde{B}_{11}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \\ & + u_{11}|_{z=h_1} \tilde{B}_{21}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + u_{31}|_{z=h_1} \tilde{B}_{11}|_{z=h_1} - u_{11}|_{z=h_1} \tilde{B}_{31}|_{z=h_1} - u_{31}|_{z=0} B_{11}|_{z=0} + \\ & + u_{11}|_{z=0} B_{31}|_{z=0} = 0. \end{aligned}$$

После подстановки граничных условий (1.7-1.9), (1.10-1.12) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} B_{1_1} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} (u_{2_1} B_{1_1} - u_{1_1} B_{2_1}) dz - B_0(u_{1_1}|_{h_1} - u_{1_1}|_0) = 0. \quad (1.23)$$

Аналогичным образом получаем оставшиеся уравнения для магнитного поля в обоих слоях плазмы: уравнение x -компоненты магнитного поля в верхнем слое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} B_{1_2} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} (u_{2_2} B_{1_2} - u_{1_2} B_{2_2}) dz - B_0(u_{1_2}|_{h_2} - u_{1_2}|_{h_1}) = 0, \quad (1.24)$$

уравнение y -компоненты магнитного поля в нижнем слое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} B_{2_1} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} (u_{1_1} B_{2_1} - u_{2_1} B_{1_1}) dz - B_0(u_{2_1}|_{h_1} - u_{2_1}|_0) = 0, \quad (1.25)$$

уравнение y -компоненты магнитного поля в верхнем слое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} B_{2_2} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (u_{1_2} B_{2_2} - u_{2_2} B_{1_2}) dz - B_0(u_{2_2}|_{h_2} - u_{2_2}|_{h_1}) = 0, \quad (1.26)$$

уравнение z -компоненты магнитного поля в нижнем слое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} B_{3_1} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} u_{1_1} B_{3_1} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} u_{2_1} B_{3_1} dz - B_0 u_{3_1}|_{h_1} = 0, \quad (1.27)$$

уравнение z -компоненты магнитного поля в верхнем слое принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} B_{3_2} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u_{1_2} B_{3_2} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} u_{2_2} B_{3_2} dz - B_0(u_{3_2}|_{h_2} - u_{3_2}|_{h_1}) = 0. \quad (1.28)$$

Поступим аналогично для уравнений горизонтальных скоростей в системе (1.5) в нижнем слое и в системе (1.6) в верхнем слое. Начнем с уравнения изменения x -компоненты импульса в нижнем слое:

$$\begin{aligned} & \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} u_{1_1} dz - \rho_1 u_{1_1}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} (u_{1_1}^2 - B_{1_1}^2) dz - \rho_1 u_{1_1}^2|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \\ & + \rho_1 B_{1_1}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} \tilde{p}_1 dz - \tilde{p}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} (u_{1_1} u_{2_1} - B_{1_1} B_{2_1}) dz - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_1 u_{11}|_{z=h_1} u_{21}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \rho_1 B_{11}|_{z=h_1} B_{21}|_{z=h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \rho_1 u_{11}|_{z=h_1} u_{31}|_{z=h_1} - \\
& -\rho_1 u_{11}|_{z=0} u_{31}|_{z=0} - \rho_1 B_{11}|_{z=h_1} B_{31}|_{z=h_1} + \rho_1 B_{11}|_{z=0} B_{31}|_{z=0} = \rho_1 f \int_0^{h_1} u_{21} dz.
\end{aligned}$$

После подстановки граничных условий (1.7-1.9), (1.10)-(1.12) и учета уравнений для давления в нижнем слое плазмы (1.20) и давления (1.17) на границе между слоями различной плотности получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} u_{11} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} (u_{11}^2 - B_{11}^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} (u_{11} u_{21} - B_{11} B_{21}) dz + \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_2 - h_1) + g \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_1^2}{2} - \\
& - B_0 (B_{11}|_{h_1} - B_{11}|_0) = f \int_0^{h_1} u_{21} dz. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Считаем, что горизонтальные составляющие магнитного поля малы по сравнению с внешним вертикальным полем B_0 , а изменение горизонтальной составляющей вдоль оси z обусловлено прежде всего сдвигом в слое. Выражение для производной горизонтальной составляющей магнитного поля запишем как

$$\frac{\partial B_{11,21}}{\partial z} = -\frac{B_{11,21}}{h_1} \rightarrow B_{11,21}|_{z=h_1} - B_{11,21}|_{z=0} = -B_{11,21}$$

Тогда последнее слагаемое в уравнении (1.29) примет вид $B_0 B_{11}$.

Аналогично преобразуем оставшиеся уравнения изменения импульса: уравнение изменения x -компоненты импульса в верхнем слое принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} u_{12} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (u_{12}^2 - B_{12}^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} (u_{12} u_{22} - B_{12} B_{22}) dz + g \Delta h \frac{\partial}{\partial x} h_1 + \\
& + g \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Delta h^2}{2} + B_0 B_{12} = f \int_{h_1}^{h_2} u_{22} dz, \tag{1.30}
\end{aligned}$$

уравнение изменения y -компоненты импульса в нижнем слое принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h_1} u_{21} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} (u_{11} u_{21} - B_{11} B_{21}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{h_1} (u_{21}^2 - B_{21}^2) dz + \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \frac{\partial}{\partial y} \Delta h + \\
& + g \frac{\partial}{\partial y} \frac{h_1^2}{2} + B_0 B_{21} = -f \int_0^{h_1} u_{11} dz, \tag{1.31}
\end{aligned}$$

уравнение изменения y -компоненты импульса в верхнем слое принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} u_{2z} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (u_{1z} u_{2z} - B_{1z} B_{2z}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} (u_{2z}^2 - B_{2z}^2) dz + g \Delta h \frac{\partial}{\partial y} h_1 + \\ + g \frac{\partial}{\partial y} \frac{\Delta h^2}{2} + B_0 B_{2z} = -f \int_{h_1}^{h_2} u_{1z} dz. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Для окончательного вывода уравнений мелкой воды введем усредненные по высоте слоев скорости и магнитные поля и представим скорости и магнитные поля в каждом из слоев как сумму усредненных величин и флуктуаций. Тогда скорости и магнитные поля в нижнем слое плазмы имеют следующий вид:

$$u_{1x} = u_{x1} + u'_{1x} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} u_{1x} dz + u'_{1x} \quad (1.33)$$

$$u_{1y} = u_{y1} + u'_{1y} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} u_{1y} dz + u'_{1y} \quad (1.34)$$

$$B_{1x} = B_{x1} + B'_{1x} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} B_{1x} dz + B'_{1x} \quad (1.35)$$

$$B_{1y} = B_{y1} + B'_{1y} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} B_{1y} dz + B'_{1y}, \quad (1.36)$$

а скорости и магнитные поля в верхнем слое плазмы имеют следующий вид:

$$u_{2x} = u_{x2} + u'_{2x} = \frac{1}{(h_2 - h_1)} \int_{h_1}^{h_2} u_{2x} dz + u'_{2x} \quad (1.37)$$

$$u_{2y} = u_{y2} + u'_{2y} = \frac{1}{(h_2 - h_1)} \int_{h_1}^{h_2} u_{2y} dz + u'_{2y} \quad (1.38)$$

$$B_{2x} = B_{x2} + B'_{2x} = \frac{1}{(h_2 - h_1)} \int_{h_1}^{h_2} B_{2x} dz + B'_{2x} \quad (1.39)$$

$$B_{2y} = B_{y2} + B'_{2y} = \frac{1}{(h_2 - h_1)} \int_{h_1}^{h_2} B_{2y} dz + B'_{2y}. \quad (1.40)$$

Подставим выражения (1.33-1.36) в уравнения (1.21), (1.29), (1.31), (1.23), (1.25), а выражения (1.37-1.40) в уравнения (1.22), (1.30), (1.32), (1.24), (1.26), пренебрегая слагаемыми, включающими флуктуации [18]. В результате получим магнитогидродинамические уравнения стратифицирован-

ной плазмы в поле силы тяжести в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле.

Уравнения для нижнего слоя плазмы высоты h_1 и плотности ρ_1 имеют вид:

$$\partial_t h_1 + \partial_x(h_1 u_{x_1}) + \partial_y(h_1 u_{y_1}) = 0, \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(h_1 u_{x_1}) + \partial_x(h_1 u_{x_1}^2 - h_1 B_{x_1}^2 + \frac{gh_1^2}{2}) + \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \partial_x \Delta h + \partial_y(h_1 u_{x_1} u_{y_1} - h_1 B_{x_1} B_{y_1}) + \\ + B_0 B_{x_1} = h_1 f u_{y_1}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(h_1 u_{y_1}) + \partial_x(h_1 u_{x_1} u_{y_1} - h_1 B_{x_1} B_{y_1}) + \partial_y(h_1 u_{y_1}^2 - h_1 B_{y_1}^2 + \frac{gh_1^2}{2}) + \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \partial_y \Delta h + \\ + B_0 B_{y_1} = -h_1 f u_{x_1}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\partial_t(h_1 B_{x_1}) + \partial_y(h_1(B_{x_1} u_{y_1} - B_{y_1} u_{x_1})) - B_0 u_{x_1} = 0, \quad (1.44)$$

$$\partial_t(h_1 B_{y_1}) + \partial_x(h_1(B_{y_1} u_{x_1} - B_{x_1} u_{y_1})) - B_0 u_{y_1} = 0, \quad (1.45)$$

$$\partial_t B_{z_1} + B_0(\partial_x u_{x_1} + \partial_y u_{y_1}) = 0, \quad (1.46)$$

$$\partial_x B_{x_1} + \partial_y B_{y_1} = 0. \quad (1.47)$$

Уравнения для верхнего слоя плазмы высоты Δh и плотности ρ_2 имеют вид :

$$\partial_t(\Delta h) + \partial_x(\Delta h u_{x_2}) + \partial_y(\Delta h u_{y_2}) = 0, \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\Delta h u_{x_2}) + \partial_x(\Delta h(u_{x_2}^2 - B_{x_2}^2) + \frac{g(\Delta h)^2}{2}) + g \Delta h \partial_x h_1 + \partial_y \Delta h(u_{x_2} u_{y_2} - B_{x_2} B_{y_2}) + \\ + B_0 B_{x_2} = \Delta h f u_{y_2}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\Delta h u_{y_2}) + \partial_x(\Delta h(u_{x_2} u_{y_2} - B_{x_2} B_{y_2})) + \partial_y(\Delta h(u_{y_2}^2 - B_{y_2}^2) + \frac{g(\Delta h)^2}{2}) + g \Delta h \partial_y h_1 + \\ + B_0 B_{y_2} = -\Delta h f u_{x_2}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\partial_t(\Delta h B_{x_2}) + \partial_y(\Delta h(B_{x_2} u_{y_2} - B_{y_2} u_{x_2})) - B_0 u_{x_2} = 0, \quad (1.51)$$

$$\partial_t(\Delta h B_{y_2}) + \partial_x(\Delta h(B_{y_2} u_{x_2} - B_{x_2} u_{y_2})) - B_0 u_{y_2} = 0, \quad (1.52)$$

$$\partial_t B_{z_2} + B_0(\partial_x u_{x_2} + \partial_y u_{y_2}) = 0, \quad (1.53)$$

$$\partial_x B_{x_2} + \partial_y B_{y_2} = 0. \quad (1.54)$$

Отметим, что наличие внешнего вертикального магнитного поля B_0 приводит к существенным изменениям горизонтальной динамики магнитного поля в приближении мелкой воды [31]. Уравнения (1.46), (1.47) и (1.53), (1.54) отделяются от остальных уравнений, поэтому мы их опускаем. Они обеспечивают условие бездивергентности магнитного поля, которое используется для задания корректных начальных условий. Тем не менее эти уравнения описывают принципиальную трехмерность и осесимметричность магнитных полей в приближении мелкой воды. В отсутствие внешнего магнитного поля $B_0 = 0$ уравнения (1.41-1.47), (1.48-1.54) переходят в магнитогидро-

динамические уравнения стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды [19]. При равенстве высот и плотностей слоев уравнения (1.41-1.47) переходят в магнитогидро-динамические уравнения в приближении однослойной мелкой воды во внешнем магнитном поле [30, 31], и при $B_0 = 0$ сводятся к хорошо известным магнитогиродинамическим уравнениям мелкой воды без внешнего магнитного поля [3, 18].

1.3 Приближение β -плоскости. Волны магнито-Пуанкаре и магнито-Россби

Ниже будем исследовать сферические течения тонкого слоя несжимаемой вращающейся плазмы в приближении двуслойной мелкой воды в рамках полученных уравнений (1.41-1.54). Эффекты сферичности учитываем в приближении β -плоскости по аналогии с уравнениями нейтральной жидкости [31]. Считаем, что параметр Кориолиса f слабо меняется при малых изменениях широты. Представим f в следующем виде:

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (1.55)$$

где Ω - угловая скорость вращения, равная для обоих слоев, $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \partial f / \partial y$.

Дифференцируем уравнения для горизонтальных компонент скоростей u_{x_1} (1.42) и u_{x_2} (1.49) по y с учетом зависимости параметра Кориолиса от широты (1.55). Считая $\beta y \ll f_0$, получим уравнения для стратифицированной вращающейся плазмы на бета-плоскости при наличии внешнего магнитного поля.

Уравнения для нижнего слоя плазмы высоты h_1 и плотности ρ_1 принимают вид:

$$\partial_t h_1 + \partial_x (h_1 u_{x_1}) + \partial_y (h_1 u_{y_1}) = 0, \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_t (h_1 u_{x_1}) + \partial_y \partial_x (h_1 u_{x_1}^2 - h_1 B_{x_1}^2 + \frac{gh_1^2}{2}) + \frac{\rho_2}{\rho_1} g \partial_y h_1 \partial_x \Delta h + \partial_y^2 (h_1 u_{x_1} u_{y_1} - h_1 B_{x_1} B_{y_1}) + \\ + B_0 \partial_y B_{x_1} = f_0 \partial_y h_1 u_{y_1} + \beta h_1 u_{y_1}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (h_1 u_{y_1}) + \partial_x (h_1 u_{x_1} u_{y_1} - h_1 B_{x_1} B_{y_1}) + \partial_y (h_1 u_{y_1}^2 - h_1 B_{y_1}^2 + \frac{gh_1^2}{2}) + \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \partial_y \Delta h + \\ + B_0 B_{y_1} = -h_1 f_0 u_{x_1}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\partial_t (h_1 B_{x_1}) + \partial_y (h_1 (B_{x_1} u_{y_1} - B_{y_1} u_{x_1})) - B_0 u_{x_1} = 0, \quad (1.59)$$

$$\partial_t (h_1 B_{y_1}) + \partial_x (h_1 (B_{y_1} u_{x_1} - B_{x_1} u_{y_1})) - B_0 u_{y_1} = 0. \quad (1.60)$$

Уравнения для верхнего слоя плазмы высоты Δh и плотности ρ_2 принимают вид:

$$\partial_t (\Delta h) + \partial_x (\Delta h u_{x_2}) + \partial_y (\Delta h u_{y_2}) = 0, \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_t (\Delta h u_{x_2}) + \partial_y \partial_x (\Delta h (u_{x_2}^2 - B_{x_2}^2) + \frac{g\Delta h^2}{2}) + g \partial_y \Delta h \partial_x h_1 + \partial_y^2 \Delta h (u_{x_2} u_{y_2} - B_{x_2} B_{y_2}) + \\ + B_0 \partial_y B_{x_2} = f_0 \partial_y \Delta h f u_{y_2} + \beta \Delta h u_{y_2}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\Delta h u_{y_2}) + \partial_x(\Delta h(u_{x_2} u_{y_2} - B_{x_2} B_{y_2})) + \partial_y(\Delta h(u_{y_2}^2 - B_{y_2}^2) + \frac{g(\Delta h)^2}{2}) + g\Delta h \partial_y h_1 + \\ + B_0 B_{y_2} = -\Delta h f_0 u_{x_2}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\partial_t(\Delta h B_{x_2}) + \partial_y(\Delta h(B_{x_2} u_{y_2} - B_{y_2} u_{x_2})) - B_0 u_{x_2} = 0, \quad (1.64)$$

$$\partial_t(\Delta h B_{y_2}) + \partial_x(\Delta h(B_{y_2} u_{x_2} - B_{x_2} u_{y_2})) - B_0 u_{y_2} = 0, \quad (1.65)$$

Используем далее уравнения (1.56-1.65) для изучения волн в стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости на фоне стационарного внешнего вертикального магнитного поля. При отсутствии вертикального магнитного поля уравнения (1.56-1.65) переходят в систему магнитогидродинамических уравнений в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости, записанную ниже, и имеют стационарное решение в виде горизонтально-го (тороидального и полоидального) магнитного поля и будут также использованы для изучения волн.

$$\partial_t h_1 + \partial_x(h_1 u_{x_1}) + \partial_y(h_1 u_{y_1}) = 0, \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_t(h_1 u_{x_1}) + \partial_y \partial_x(h_1 u_{x_1}^2 - h_1 B_{x_1}^2 + \frac{g h_1^2}{2}) + \frac{\rho_2}{\rho_1} g \partial_y h_1 \partial_x \Delta h + \partial_y^2(h_1 u_{x_1} u_{y_1} - h_1 B_{x_1} B_{y_1}) = \\ = f_0 \partial_y h_1 u_{y_1} + \beta h_1 u_{y_1}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\partial_t(h_1 u_{y_1}) + \partial_x(h_1 u_{x_1} u_{y_1} - h_1 B_{x_1} B_{y_1}) + \partial_y(h_1 u_{y_1}^2 - h_1 B_{y_1}^2 + \frac{g h_1^2}{2}) + \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \partial_y \Delta h = -h_1 f_0 u_{x_1}, \quad (1.68)$$

$$\partial_t(h_1 B_{x_1}) + \partial_y(h_1(B_{x_1} u_{y_1} - B_{y_1} u_{x_1})) = 0, \quad (1.69)$$

$$\partial_t(h_1 B_{y_1}) + \partial_x(h_1(B_{y_1} u_{x_1} - B_{x_1} u_{y_1})) = 0, \quad (1.70)$$

$$\partial_t(\Delta h) + \partial_x(\Delta h u_{x_2}) + \partial_y(\Delta h u_{y_2}) = 0, \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_t(\Delta h u_{x_2}) + \partial_y \partial_x(\Delta h(u_{x_2}^2 - B_{x_2}^2) + \frac{g \Delta h^2}{2}) + g \partial_y \Delta h \partial_x h_1 + \partial_y^2 \Delta h(u_{x_2} u_{y_2} - B_{x_2} B_{y_2}) = \\ = f_0 \partial_y \Delta h f u_{y_2} + \beta \Delta h u_{y_2}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\partial_t(\Delta h u_{y_2}) + \partial_x(\Delta h(u_{x_2} u_{y_2} - B_{x_2} B_{y_2})) + \partial_y(\Delta h(u_{y_2}^2 - B_{y_2}^2) + \frac{g(\Delta h)^2}{2}) + g \Delta h \partial_y h_1 = -\Delta h f_0 u_{x_2}, \quad (1.73)$$

$$\partial_t(\Delta h B_{x_2}) + \partial_y(\Delta h(B_{x_2} u_{y_2} - B_{y_2} u_{x_2})) = 0, \quad (1.74)$$

$$\partial_t(\Delta h B_{y_2}) + \partial_x(\Delta h(B_{y_2} u_{x_2} - B_{x_2} u_{y_2})) = 0, \quad (1.75)$$

1.3.1 Линейные волны во внешнем вертикальном магнитном поле

Рассмотрим течение тонкого стратифицированного слоя плазмы в приближении мелкой воды на бета-плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле.

Линеаризуем уравнения (1.56-1.65) на фоне стационарного состояния:

$$h_{1,2} = h_{01,02} = \text{const}; u_{x_1,x_2} = u_{y_1,y_2} = B_{x_1,x_2} = B_{y_1,y_2} = 0; B_0 = \text{const} \quad (1.76)$$

Представляем неизвестные величины в виде суммы стационарного состояния и плоской волны с

малой амплитудой:

$$h_1 = h_{01} + h'_1 e^{i\varphi}, \quad h_2 = h_{02} + h'_2 e^{i\varphi}, \quad u_{x1} = u'_{x1} e^{i\varphi}, \quad u_{y1} = u'_{y1} e^{i\varphi}, \quad u_{x2} = u'_{x2} e^{i\varphi}, \quad u_{y2} = u'_{y2} e^{i\varphi},$$

$$B_{x1} = B'_{x1} e^{i\varphi}, \quad B_{y1} = B'_{y1} e^{i\varphi}, \quad B_{x2} = B'_{x2} e^{i\varphi}, \quad B_{y2} = B'_{y2} e^{i\varphi},$$

где $\varphi = \omega t - k_x x - k_y y$, $h_{02} - h_{01} \equiv \Delta h_0$.

Подставляя эти выражения в систему (1.56-1.65) и оставляя слагаемые первого порядка малости, получаем линеаризованные магнитогидродинамические уравнения стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле:

$$\omega h'_1 - k_x h_{01} u'_{x1} - k_y h_{01} u'_{y1} = 0, \quad (1.77)$$

$$\omega k_y u'_{x1} - k_x k_y \left[g h'_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} g (h'_2 - h'_1) \right] - i k_y \frac{B_0}{h_{01}} B'_{x1} - (\beta - i f_0 k_y) u'_{y1} = 0, \quad (1.78)$$

$$\omega u'_{y1} - k_y \left[g h'_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} g (h'_2 - h'_1) \right] - i \frac{B_0}{h_{01}} B'_{y1} - i f_0 u'_{x1} = 0, \quad (1.79)$$

$$\omega B'_{x1} + i u'_{x1} \frac{B_0}{h_{01}} = 0, \quad (1.80)$$

$$\omega B'_{y1} + i u'_{y1} \frac{B_0}{h_{01}} = 0, \quad (1.81)$$

$$\omega (h'_2 - h'_1) - k_x (h_{02} - h_{01}) u'_{x2} - k_y (h_{02} - h_{01}) u'_{y2} = 0, \quad (1.82)$$

$$\omega k_y u'_{x2} - k_x k_y g h'_2 - i k_y \frac{B_0}{\Delta h_0} B'_{x2} - (\beta - i f_0 k_y) u'_{y2} = 0, \quad (1.83)$$

$$\omega u'_{y2} - k_y g h'_2 - i \frac{B_0}{\Delta h_0} B'_{y2} - i f_0 u'_{x2} = 0, \quad (1.84)$$

$$\omega B'_{x2} + i u'_{x2} \frac{B_0}{\Delta h_0} = 0, \quad (1.85)$$

$$\omega B'_{y2} + i u'_{y2} \frac{B_0}{\Delta h_0} = 0. \quad (1.86)$$

Систему (1.77-1.86) можно записать в матричном виде:

$$A \mathbf{q} = 0,$$

где коэффициенты в матрице $A = a_{ij}$ имеют следующий вид (i - номер строки, j - номер столбца):

$$a_{11} = \omega, \quad a_{13} = -h_{01} k_x, \quad a_{14} = -h_{01} k_y,$$

$$a_{21} = k_x k_y g \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right), \quad a_{22} = -k_x k_y \frac{\rho_2}{\rho_1} g, \quad a_{23} = \omega k_y, \quad a_{24} = i f_0 k_y - \beta, \quad a_{25} = i k_y \frac{B_0}{h_{01}},$$

$$a_{31} = k_y g \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right), \quad a_{32} = -k_y \frac{\rho_2}{\rho_1} g, \quad a_{33} = -i f_0, \quad a_{34} = \omega, \quad a_{36} = i \frac{B_0}{h_{01}},$$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= i\frac{B_0}{h_{01}}, & a_{45} &= \omega, & a_{54} &= i\frac{B_0}{h_{01}}, & a_{56} &= \omega, \\
a_{61} &= -\omega, & a_{62} &= \omega, & a_{67} &= -k_x\Delta h_0, & a_{68} &= -k_y\Delta h_0, \\
a_{72} &= -k_xk_yg, & a_{77} &= \omega k_y, & a_{78} &= if_0k_y - \beta, & a_{79} &= ik_y\frac{B_0}{\Delta h_0}, \\
a_{82} &= -k_yg, & a_{87} &= -if_0, & a_{88} &= \omega, & a_{810} &= i\frac{B_0}{\Delta h_0}, \\
a_{97} &= i\frac{B_0}{\Delta h_0}, & a_{99} &= \omega, & a_{108} &= i\frac{B_0}{\Delta h_0}, & a_{1010} &= \omega,
\end{aligned}$$

а столбец неизвестных \mathbf{q} имеет следующий вид:

$$\mathbf{q} = (h'_1, h'_2, u'_{x_1}, u'_{y_1}, B'_{x_1}, B'_{y_1}, u'_{x_2}, u'_{y_2}, B'_{x_2}, B'_{y_2})^T.$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (1.77-1.86) получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости:

$$(\omega^4 - b_1\omega^2 - c_1\omega + d_1)(\omega^4 - b_2\omega^2 - c_2\omega + d_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1}g^2k^4h_{01}\Delta h_0(\omega^2 + f\omega + q_1)(\omega^2 + f\omega + q_2), \quad (1.87)$$

где

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + f_0^2 + gk^2h_{01}, & c_1 &= \beta gk_xh_{01}, & d_1 &= \frac{B_0^4}{h_{01}^4} + \frac{B_0^2gk^2}{h_{01}}, \\
b_2 &= \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2\Delta h_0, & c_2 &= \beta gk_x\Delta h_0, & d_2 &= \frac{B_0^4}{\Delta h_0^4} + \frac{B_0^2gk^2}{\Delta h_0}, \\
f &= \frac{\beta k_x}{k^2}, & q_1 &= \frac{B_0^2}{h_{01}^2}, & q_j &= \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2},
\end{aligned}$$

Правая часть дисперсионного соотношения (1.87) описывает эффекты стратификации в двуслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе - верхнему.

Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (1.87) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением. В первом приближении выделим волны магнито-Пуанкаре и магнито-Россби в отсутствие стратификации [25]. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (1.87) в высокочастотном пределе в виде суммы волны магнито-Пуанкаре в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы. В низкочастотном пределе решение дисперсионного уравнения (1.87) представим в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

Найдем решение дисперсионного уравнения (1.87) в высокочастотном пределе. В отсутствии

стратификации ($\rho_2 = \rho_1$) уравнение (1.87) принимает вид:

$$[\omega^4 - \omega^2(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2 \Delta h_0^2}][\omega^4 - \omega^2(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02}) - \omega g h_{02} \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} (\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0})] = 0, \quad (1.88)$$

где ω – частота возмущения, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ – волновой вектор возмущения. Би-квадратное уравнение в первой скобке дает следующие значения для частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(f_0^2 + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} - \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)^2 + f_0^2 \left(f_0^2 + \frac{2B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{2B_0^2}{\Delta h_0^2} \right)} \right).$$

Мы предполагаем, что $\omega \neq \omega_{1,2}$, и ищем решение следующего дисперсионного уравнения:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 H \right) - \omega g H \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right) = 0.$$

В высокочастотном пределе решением уравнения является следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega_{MP_v} = \pm \sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02}}, \quad (1.89)$$

которое описывает волны магнито-Пуанкаре на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (1.89) имеет вид, схожий с дисперсионным соотношением для волн магнито-Пуанкаре во внешнем вертикальном магнитном поле в однослойном приближении [30]:

$$\omega_{MP_{v_1}} = \pm \sqrt{2 \frac{B_0^2}{h_{02}^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02}}.$$

Отличие состоит в слагаемых, связанных с влиянием магнитного поля на динамику волны. В двухслойной модели они представлены в виде двух слагаемых, каждое из которых соответствует одному из слоев плазмы. Отметим здесь существенное различие с волнами магнито-Пуанкаре на f -плоскости. Дисперсионное соотношение (1.89) имеет более простой вид, в нем отсутствует дополнительный внутренний радикал, что меняет динамику волны. Кроме того, дисперсионное уравнение (1.88) не имеет решения в виде магнито-Россби волн.

В низкочастотном пределе в отсутствие стратификации уравнение (1.88) имеет решение в следующем виде:

$$\omega_{MR_v} = \frac{\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + \frac{gk^2 (h_{01}^3 + \Delta h_0^3)}{h_{01} \Delta h_0} \right)}{\beta k_x g h_{02}}, \quad (1.90)$$

которое описывает волны магнито-Россби на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (1.90) имеет вид, схожий с дисперсионным соотношением для волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в однослойном приближении

[30]:

$$\omega_{MR_{v_1}} = \frac{\frac{B_0^2}{h_{02}^2} \left(\frac{B_0^2}{h_{02}^2} + ghk^2 \right)}{\beta k_x gh_{02}}.$$

Отличие состоит в слагаемых, связанных с влиянием магнитного поля на динамику волны. В двухслойной модели они включают в себя в явном виде высоты обоих слоев, связывая их между собой.

Найдем поправку к частотам, связанную со стратификацией ($\rho_1 \neq \rho_2$). Перепишем уравнение (1.87) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 \right) + \frac{B_0^4}{h_{01}^2 \Delta h_0^2}] [\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right) - \\ & - \omega gh_{02} \beta k_x + \frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} \left(\frac{B_0^2}{h_{01} \Delta h_0} + gk^2 \frac{h_{01}^3 + \Delta h_0^3}{h_{01} \Delta h_0} \right)] = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \cdot \\ & \cdot \left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega + \frac{B_0^2}{h_{01}^2} \right) \left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k^2} \omega + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} \right) \end{aligned} \quad (1.91)$$

Считаем искомую поправку к частоте $\delta_{MP_v} = \omega - \omega_{MP_v}$ малой по сравнению с самой частотой:

$$\omega_{MP_v}^\alpha \cdot \delta_{MP_v} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Пуанкаре описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta_{MP_v} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk^2 h_{02} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right)}{(\omega_{MP_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MP_v}^2 - \omega_2^2)} \right)^{(1/2)}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Здесь φ_1 — правая часть дисперсионного уравнения (1.91) при $\omega = \omega_{MP_v}$.

Рассмотрим влияние стратификации на волну магнито-Россби в двухслойной модели мелкой воды во внешнем магнитном поле. Считаем искомую поправку к частоте $\delta_{MR_v} = \omega - \omega_{MR_v}$ малой по сравнению с самой частотой:

$$\omega_{MR_v}^\alpha \cdot \delta_{MR_v} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Россби описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MR_v} = - \frac{\varphi_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right)}{(\omega_{MR_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_v}^2 - \omega_2^2) gh_{02} \beta k_x}. \quad (1.93)$$

Здесь φ_2 — правая часть дисперсионного уравнения (1.91) при $\omega = \omega_{MR_v}$.

На рис. 3 изображены дисперсионные кривые для волны магнито-Россби (а) и для волны

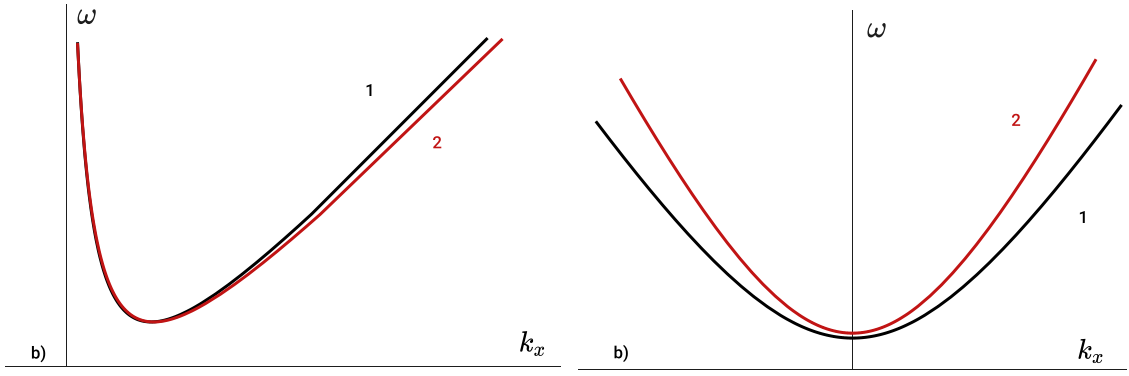


Рис. 3: Дисперсионные кривые для волн магнито-Россби ω_{MR_v} без учета стратификации (а, 1) и с учетом малой поправки δ_{MR_v} (а, 2) и для волн магнито-Пуанкаре ω_{MP_v} без учета стратификации (б, 1) и с учетом малой поправки δ_{MP_v} (б, 2)

магнито-Пуанкаре (б) без учета стратификации (1) и с учетом найденных поправок к частотам (2).

Запишем фазовую $v_{ph_{MP_v}}$ и групповую $v_{gr_{MP_v}}$ скорости в направлении k_x для волны магнито-Пуанкаре во внешнем вертикальном магнитном поле в модели двух слоев разной плотности:

$$v_{ph_{MP_v}} = \frac{\omega_{MP_v} + \delta_{MP_v}}{k_x} = \frac{1}{k_x} \sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk_x^2 h_{02}} + \frac{1}{2k_x} \left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2 + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}} + f_0^2 + gk_x^2 h_{02} \right) + \frac{1}{2k_x} \sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2 + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}} + f_0^2 + gk_x^2 h_{02} \right)^2 - \frac{\varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right)}{(\omega_{MP_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MP_v}^2 - \omega_2^2)}}, \quad (1.94)$$

$$v_{gr_{MP_v}} = \frac{\partial(\omega_{MP_v} + \delta_{MP_v})}{\partial k_x} = \frac{gk_x h_{02}}{\sqrt{\frac{B_0^2}{h_{01}^2} + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2} + f_0^2 + gk_x^2 h_{02}}} + gk_x h_{02} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\sqrt{\left(\frac{B_0^2}{h_{01}^2 + \frac{B_0^2}{\Delta h_0^2}} + f_0^2 + gk_x^2 h_{02} \right)^2 - \frac{\varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_v} \right)}{(\omega_{MP_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MP_v}^2 - \omega_2^2)}} \right). \quad (1.95)$$

Анализ выражений показал, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе увеличивает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле при малых k_x ($k_x < 1$). При больших k_x наблюдается существенное уменьшение фазовой и групповой скорости волны магнито-Пуанкаре.

Запишем фазовую $v_{ph_{MR_v}}$ и групповую $v_{gr_{MR_v}}$ скорости в направлении k_x для волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле в модели двух слоев разной плотности:

$$v_{ph_{MR_v}} = \frac{\omega_{MR_v} + \delta_{MR_v}}{k_x} = \frac{B_0^2(B_0^2 + gk^2(h_{01}^3 + \Delta h_0^3))}{h_{01}^2 \Delta h_0^2 h_{02} \beta g k_x^2} + \frac{-\varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right)}{(\omega_{MR_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_v}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x^2}, \quad (1.96)$$

$$v_{gr_{MR_v}} = \frac{\partial(\omega_{MR_v} + \delta_{MR_v})}{\partial k_x} = -\frac{B_0^2(B_0^2 + g(h_{01}^3 + \Delta h_0^3)(k_y^2 - k_x^2))}{h_{01}^2 \Delta h_0^2 h_{02} \beta g k_x^2} + \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\frac{-\varphi_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_v} \right)}{(\omega_{MR_v}^2 - \omega_1^2)(\omega_{MR_v}^2 - \omega_2^2) g h_{02} \beta k_x} \right). \quad (1.97)$$

Анализ выражений показал, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x в вертикальном магнитном поле и уменьшает ее групповую скорость в данном направлении.

Отметим, что дисперсионное уравнение (1.88) в отсутствие внешнего магнитного поля сводится к дисперсионному уравнению слоя нейтральной жидкости высоты h_{02} в приближении мелкой воды [30]:

$$(\omega^2 - f_0^2)(\omega^3 - \omega(f_0^2 + gk^2 h_{02}) - gk_x \beta h_{02}) = 0, \quad (1.98)$$

и его решением является гидродинамическая волна Россби:

$$\omega_R = -\frac{gk_x \beta h_{02}}{f_0^2 + gk^2 h_{02}}. \quad (1.99)$$

Аналогично найдем поправку, связанную со стратификацией, для гидродинамической волны Россби (1.99). Дисперсионное уравнение (1.88) в отсутствие внешнего магнитного поля при малом различии в плотностях имеет вид:

$$(\omega^2 - f_0^2)(\omega^3 - \omega(f_0^2 + gk^2 h_{02}) - gk_x \beta h_{02}) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 \left(\omega + \frac{2\beta k_x}{k^2} \right). \quad (1.100)$$

Обозначая правую часть как $\xi \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_R \right)$, искомую поправку, как $\delta_N = \omega - \omega_R$, с учетом $\omega_R^2 \neq f_0^2$, имеем:

$$\delta_N = \frac{\xi \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_R \right)}{(f_0^2 + gk^2 h_{02})(\omega_R^2 - f_0^2)}. \quad (1.101)$$

Таким образом, показано, что в линейном приближении система уравнений двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле (1.77-1.86) имеет решение в виде волн магнито-Пуанкаре (1.89) и волн магнито-Россби (1.90) с поправками (1.92), (1.93), описывающими влияние стратификации на динамику волн. Получено, что поправка к частоте, связанная со стратификацией, во внешнем вертикальном магнитном поле увеличивает фазовую скорость волн магнито-Пуанкаре, увеличивает групповую скорость при малых k_x и уменьшает при больших k_x , уменьшает групповую скорость волн магнито-Россби и увеличивает фазовую скорость волн магнито-Россби. Заметим, что параметр β , описывающий эффекты сферичности, присутствует как в выражении для частоты волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле без учета стратификации ω_{MR_v} (1.90), так и в выражении для поправки δ_{MR_v} (1.93), связанной со стратификацией. Однако для гидродинамической волны Россби (1.99) параметр β отсутствует в поправке δ_N (1.101), связанной со стратификацией.

1.3.2 Линейные волны в горизонтальном магнитном поле

Перейдем к изучению течений тонкого стратифицированного слоя плазмы в приближении мелкой воды на бета-плоскости в отсутствие внешнего вертикального магнитного поля. Как было указано выше, в этом случае уравнения (1.66-1.75) имеют стационарное решение в виде горизонтального магнитного поля:

$$u_{x_1, x_2} = u_{y_1, y_2} = 0, \quad h_{1,2} = h_{01,02} = \text{const}, \quad B_{x_1, x_2} = B_{x_{01}, x_{02}} = \text{const}, \quad B_{y_1, y_2} = B_{y_{01}, y_{02}} = \text{const}. \quad (1.102)$$

Представляем, как и ранее, неизвестные величины в виде суммы стационарного состояния и плоской волны с малой амплитудой:

$$h_1 = h_{01} + h'_1 e^{i\varphi}, \quad h_2 = h_{02} + h'_2 e^{i\varphi}, \quad u_{x_1} = u'_{x_1} e^{i\varphi}, \quad u_{y_1} = u'_{y_1} e^{i\varphi}, \quad u_{x_2} = u'_{x_2} e^{i\varphi}, \quad u_{y_2} = u'_{y_2} e^{i\varphi},$$

$$B_{x_1} = B_{x_{01}} + B'_{x_1} e^{i\varphi}, \quad B_{y_1} = B_{y_{01}} + B'_{y_1} e^{i\varphi}, \quad B_{x_2} = B_{x_{02}} + B'_{x_2} e^{i\varphi}, \quad B_{y_2} = B_{y_{02}} + B'_{y_2} e^{i\varphi},$$

где $\varphi = \omega t - k_x x - k_y y$, $h_{02} - h_{01} \equiv \Delta h_0$.

Подставляя эти выражения в систему (1.66-1.75) и оставляя слагаемые первого порядка малости, получаем линеаризованные магнитогидродинамические уравнения стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды:

$$\omega h'_1 - k_x h_{01} u'_{x_1} - k_y h_{01} u'_{y_1} = 0, \quad (1.103)$$

$$\omega k_y u'_{x_1} - k_x k_y \left[g h'_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} g (h'_2 - h'_1) - B_{x_{01}} B'_{x_1} \right] + k_y^2 B_{y_{01}} B'_{x_1} - (\beta - i f_0 k_y) u'_{y_1} = 0, \quad (1.104)$$

$$\omega u'_{y_1} + k_x B_{x_{01}} B'_{y_1} - k_y \left[g h'_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} g (h'_2 - h'_1) - B_{y_{01}} B'_{y_1} \right] - i f u'_{x_1} = 0, \quad (1.105)$$

$$\omega (h_{01} B'_{x_1} + B_{x_{01}} h'_1) - k_y h_{01} (B_{x_{01}} u'_{y_1} - B_{y_{01}} u'_{x_1}) = 0, \quad (1.106)$$

$$\omega (h_{01} B'_{y_1} + B_{y_{01}} h'_1) - k_x h_{01} (B_{y_{01}} u'_{x_1} - B_{x_{01}} u'_{y_1}) = 0, \quad (1.107)$$

$$\omega (h'_2 - h'_1) - k_x \Delta h_0 u'_{x_2} - k_y \Delta h_0 u'_{y_2} = 0, \quad (1.108)$$

$$\omega k_y u'_{x_2} - k_x k_y [g (h'_2 - h'_1) - B_{x_{02}} B'_{x_2}] + k_y^2 B_{y_{02}} B'_{x_2} - (\beta - i f_0 k_y) u'_{y_2} = 0, \quad (1.109)$$

$$\omega u'_{y_2} + k_x B_{x_{02}} B'_{y_2} - k_y [g h'_2 - B_{y_{02}} B'_{y_2}] - i f u'_{x_2} = 0, \quad (1.110)$$

$$\omega (\Delta h_0 B'_{x_2} + B_{x_{02}} (h'_2 - h'_1)) - k_y \Delta h_0 (B_{x_{02}} u'_{y_2} - B_{y_{02}} u'_{x_2}) = 0, \quad (1.111)$$

$$\omega (\Delta h_0 B'_{y_2} + B_{y_{02}} (h'_2 - h'_1)) - k_x \Delta h_0 (B_{y_{02}} u'_{x_2} - B_{x_{02}} u'_{y_2}) = 0. \quad (1.112)$$

Систему (1.103-1.112) можно записать в матричном виде:

$$A' \mathbf{q} = 0$$

где коэффициенты в матрице $A' = a'_{ij}$ имеют следующий вид (i - номер строки, j - номер столбца):

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= \omega, & a'_{13} &= -h_{01}k_x, & a'_{14} &= -h_{01}k_y, \\
a'_{21} &= k_x k_y g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}, & a'_{22} &= -k_x k_y g \frac{\rho_2}{\rho_1}, & a'_{23} &= \omega k_y, & a'_{24} &= i f_0 k_y - \beta, & a'_{25} &= k_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1^2, \\
a'_{31} &= k_y g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}, & a'_{32} &= -k_y g \frac{\rho_2}{\rho_1}, & a'_{33} &= -i f_0, & a'_{34} &= \omega, & a'_{36} &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1^2, \\
a'_{41} &= \omega B_{x_{01}}, & a'_{43} &= k_y h_{01} B_{y_{01}}, & a'_{44} &= -k_y h_{01} B_{x_{01}}, & a'_{45} &= \omega h_{01}, \\
a'_{51} &= \omega B_{y_{01}}, & a'_{53} &= -k_x h_{01} B_{y_{01}}, & a'_{54} &= k_x h_{01} B_{x_{01}}, & a'_{56} &= \omega h_{01}, \\
a'_{61} &= -\omega, & a'_{62} &= \omega, & a'_{67} &= -k_x \Delta h_0, & a'_{68} &= -k_y \Delta h_0, \\
a'_{72} &= -k_x k_y g, & a'_{77} &= \omega k_y, & a'_{78} &= i f_0 k_y - \beta, & a'_{79} &= k_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2^2, \\
a'_{82} &= -k_y g, & a'_{87} &= -i f_0, & a'_{88} &= \omega, & a'_{810} &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2^2, \\
a'_{91} &= -\omega B_{x_{02}}, & a'_{92} &= \omega B_{x_{02}}, & a'_{97} &= k_y \Delta h_0 B_{y_{02}}, & a'_{98} &= -k_y \Delta h_0 B_{x_{02}}, & a'_{99} &= \omega \Delta h_0, \\
a'_{101} &= -\omega B_{y_{02}}, & a'_{102} &= \omega B_{y_{02}}, & a'_{107} &= -k_x \Delta h_0 B_{y_{02}}, & a'_{108} &= k_x \Delta h_0 B_{x_{02}}, & a'_{1010} &= \omega \Delta h_0,
\end{aligned}$$

где $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_i = (k_x B_{x_{0i}} + k_y B_{y_{0i}})$, а столбец неизвестных \mathbf{q} имеет следующий вид:

$$\mathbf{q} = (h'_1, h'_2, u'_{x_1}, u'_{y_1}, B'_{x_1}, B'_{y_1}, u'_{x_2}, u'_{y_2}, B'_{x_2}, B'_{y_2})^T$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (1.103-1.112) получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме в приближении двуслойной мелкой воды на бета-плоскости:

$$(\omega^4 - b_1 \omega^2 - c_1 \omega + d_1)(\omega^4 - b_2 \omega^2 - c_2 \omega + d_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} g^2 k^4 h_{01} \Delta h_0 (\omega^2 + a \omega - q_1)(\omega^2 + a \omega - q_2), \quad (1.113)$$

где

$$\begin{aligned}
b_1 &= f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1^2 + g k^2 h_{01}, & c_1 &= g h_{01} \beta k_x, & d_1 &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1^2 ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1^2 + g k^2 h_{01}), \\
b_2 &= f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2^2 + g k^2 \Delta h_0, & c_2 &= g \Delta h_0 \beta k_x, & d_2 &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2^2 ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2^2 + g k^2 \Delta h_0), \\
a &= \frac{\beta k_x}{k^2}, & q_1 &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1^2, & q_2 &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2^2.
\end{aligned}$$

Правая часть дисперсионного соотношения (1.113) описывает эффекты стратификации в двуслойной модели, левая часть является произведением двух выражений, первое из которых соответствует нижнему слою, а второе - верхнему.

Строгий теоретический анализ полученного дисперсионного уравнения (1.113) не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным рассмотрением при равных горизонтальных магнитных полях в слоях $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_1 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})_2 \equiv (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})$. В первом приближении выделим волны магнито-Пуанкаре и магнито-Росби в отсутствие стратификации [25]. В случае малого различия в плотностях слоев плазмы представим решение дисперсионного уравнения (1.113) в высокочастот-

ном пределе в виде суммы волны магнито-Пуанкаре в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы. В низкочастотном пределе решение дисперсионного уравнения (1.113) представим в виде суммы волны магнито-Россби в отсутствие стратификации и малой поправки, связанной со стратификацией плазмы.

Найдем решение дисперсионного уравнения (1.113) в высокочастотном пределе. В отсутствие стратификации ($\rho_2 = \rho_1$) уравнение (1.113) принимает вид:

$$(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^4)(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gh_{02}k^2) - \omega gh_{02}\beta k_x + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gh_{02}k^2)) = 0. \quad (1.114)$$

Би-квадратное уравнение в первой скобке дает следующие значения для частоты:

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{f_0^2}{2} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \pm f_0 \sqrt{\frac{f_0^2}{4} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2}.$$

Мы предполагаем, что $\omega \neq \omega_{3,4}$, и ищем решение следующего дисперсионного уравнения:

$$\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gh_{02}k^2) - \omega gh_{02}\beta k_x + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gh_{02}k^2) = 0,$$

которое имеет вид дисперсионного уравнения для одного слоя плазмы высоты h_{02} в приближении мелкой воды на бета-плоскости [30], что существенно отличает течение плазмы в горизонтальном магнитном поле от течения плазмы при наличии внешнего вертикального поля. В высокочастотном пределе решением уравнения являются волны магнито-Пуанкаре на β -плоскости в горизонтальном магнитном поле, аналогичные волнам в однослойной модели мелкой воды:

$$\omega_{MP_h} = \pm \sqrt{2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02}}. \quad (1.115)$$

Отметим здесь существенное различие с волнами магнито-Пуанкаре на f -плоскости. Дисперсионное соотношение (1.115) имеет более простой вид, в нем отсутствует дополнительный внутренний радикал, что меняет динамику волны. Кроме того, дисперсионное уравнение (1.114) не имеет решения в виде магнитострофических волн.

В низкочастотном пределе в отсутствие стратификации уравнение (1.114) имеет решение в следующем виде:

$$\omega_{MR_h} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gk^2 h_{02})}{\beta k_x gh_{02}}, \quad (1.116)$$

которое описывает волны магнито-Россби на β -плоскости в горизонтальном магнитном поле. Дисперсионное соотношение (1.116) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле в однослойном приближении [30].

Найдем поправку к частотам, связанную со стратификацией ($\rho_1 \neq \rho_2$). Перепишем уравнение

(1.113) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& (\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^4)(\omega^4 - \omega^2(f_0^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gh_{02}k^2) - \\
& - \omega gh_{02}\beta k_x + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + gh_{02}k^2)) = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) g^2 k^2 h_{01} \Delta h_0 \cdot \\
& \cdot [k^2 \omega^4 - 2\beta k_x \omega^3 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 k^2 \omega^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \beta k_x \omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^4] \quad (1.117)
\end{aligned}$$

Считаем искомую поправку к частоте волны магнито-Пуанкаре $\delta_{MP_h} = \omega - \omega_{MP_h}$ малой по сравнению с самой частотой:

$$\omega_{MP_h}^\alpha \cdot \delta_{MP_h} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Пуанкаре описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\delta_{MP_h} = \frac{1}{2} (2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + f_0^2 + gh_{02}k^2) \pm \frac{1}{2} \left((2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 + f_0^2 + gh_{02}k^2)^2 - \right. \\
\left. - \frac{\varphi_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h} \right)}{(\omega_{MP_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MP_h}^2 - \omega_4^2)} \right)^{(1/2)}. \quad (1.118)
\end{aligned}$$

Здесь φ_3 — правая часть дисперсионного уравнения (1.117) при $\omega = \omega_{MP_h}$.

Рассмотрим влияние стратификации на волну магнито-Россби в двухслойной модели мелкой воды в горизонтальном магнитном поле. Считаем искомую поправку к частоте $\delta_{MR_h} = \omega - \omega_{MR_h}$ малой по сравнению с самой частотой:

$$\omega_{MR_h}^\alpha \cdot \delta_{MR_h} \gg 1 \quad \forall \alpha > 0.$$

Тогда влияние стратификации на высокочастотную волну магнито-Россби описывается поправкой к частоте в следующем виде:

$$\delta_{MR_h} = - \frac{\varphi_4 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h} \right)}{(\omega_{MR_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_h}^2 - \omega_4^2) gh_{02} \beta k_x} \quad (1.119)$$

Здесь φ_4 — правая часть дисперсионного уравнения (1.117) при $\omega = \omega_{MR_h}$.

На рис. 4 изображены дисперсионные кривые для волны магнито-Россби (а) и для волны магнито-Пуанкаре (б) без учета стратификации (1) и с учетом найденных поправок к частотам (2).

Запишем фазовую $v_{ph_{MP_h}}$ и групповую $v_{gr_{MP_h}}$ скорости в направлении k_x для волны магнито-Пуанкаре в горизонтальном магнитном поле в модели двух слоев разной плотности:

$$v_{ph_{MP_h}} = \frac{\omega_{MP_h} + \delta_{MP_h}}{k_x} = \frac{1}{k_x} \sqrt{2k_x^2 B_{x_0}^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02}} + \frac{1}{2k_x} (2k_x^2 B_{x_0}^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02}) + \quad (1.120)$$

$$+ \frac{1}{2k_x} \sqrt{(2k_x^2 B_{x_0}^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02})^2 - \frac{\varphi_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h} \right)}{(\omega_{MP_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MP_h}^2 - \omega_4^2)}}, \quad (1.121)$$

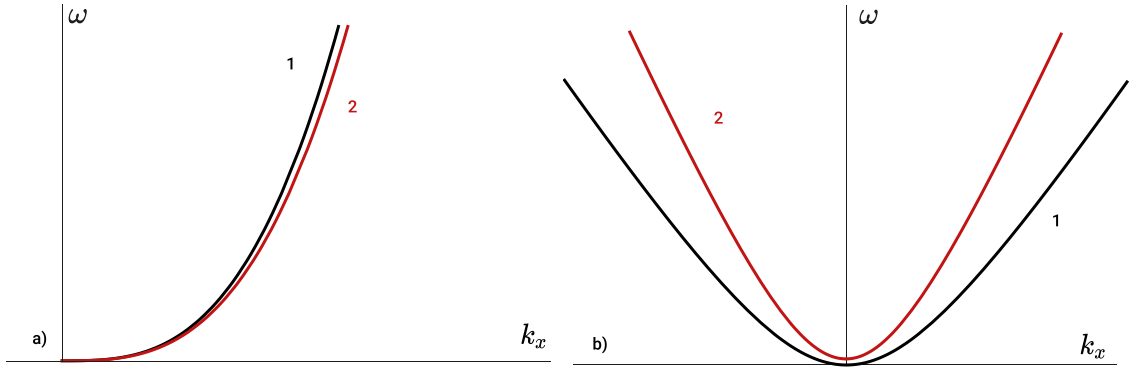


Рис. 4: Дисперсионные кривые для волн магнито-Россби ω_{MR_h} без учета стратификации (а, 1) и с учетом малой поправки δ_{MR_h} (а, 2) и для волн магнито-Пуанкаре ω_{MP_h} без учета стратификации (б, 1) и с учетом малой поправки δ_{MP_h} (б, 2)

$$v_{gr_{MP_h}} = \frac{\partial(\omega_{MP_h} + \delta_{MP_h})}{\partial k_x} = \frac{gk_x h_{02}}{\sqrt{2k_x^2 B_{x_0}^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02}}} + gk_x h_{02} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\sqrt{(2k_x^2 B_{x_0}^2 + f_0^2 + gk^2 h_{02})^2 - \frac{\varphi_2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MP_h}\right)}{(\omega_{MP_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MP_h}^2 - \omega_4^2)}} \right). \quad (1.122)$$

Анализ выражений показал, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе значительно увеличивает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре вдоль направления k_x в горизонтальном магнитном поле.

Запишем фазовую $v_{ph_{MR_h}}$ и групповую $v_{gr_{MR_h}}$ скорости в направлении k_x для волны магнито-Россби в горизонтальном поле в модели двух слоев разной плотности:

$$v_{ph_{MR_h}} = \frac{\omega_{MR_h} + \delta_{MR_h}}{k_x} = \frac{k_x^2 B_{x_0}^2 (B_{x_0}^2 + gh_{02})}{h_{02} \beta g} + \frac{-\varphi_2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h}\right)}{(\omega_{MR_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_h}^2 - \omega_4^2) gh_{02} \beta k_x^2}, \quad (1.123)$$

$$v_{gr_{MR_h}} = \frac{\partial(\omega_{MR_h} + \delta_{MR_h})}{\partial k_x} = \frac{3k_x^2 B_{x_0}^2 (B_{x_0}^2 + gh_{02})}{\beta gh_{02}} + \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\frac{-\varphi_2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}, \omega_{MR_h}\right)}{(\omega_{MR_h}^2 - \omega_3^2)(\omega_{MR_h}^2 - \omega_4^2) gh_{02} \beta k_x} \right). \quad (1.124)$$

Анализ выражений показал, что наличие стратификации ($\rho_2 \neq \rho_1$) в системе увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x . Групповая скорость волны магнито-Россби вдоль направления k_x при очень малых k_x увеличивается. При больших $k_x > 1$ наличие стратификации в системе приводит к заметному уменьшению фазовой скорости волны вдоль k_x .

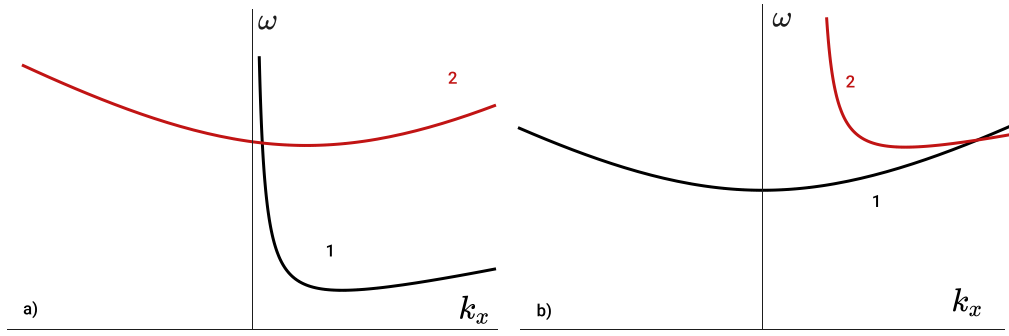


Рис. 5: Условие синхронизма для двух волн магнито-Россби и волны магнито-Пуанкаре во внешнем вертикальном магнитном поле с учетом эффектов стратификации: 1 — $\omega_{MR_v}(k_x) + \delta_{MR_v}(k_x)$, 2 — $\omega_{MP_v}(k_x - k_{x_c}) + \delta_{MP_v}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_v}(k_{x_c}) + \delta_{MR_v}(k_{x_c})$ (а); условие синхронизма для двух волн магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле: 1 — $\omega_{MP_v}(k_x) + \delta_{MP_v}(k_x)$, 2 — $\omega_{MR_v}(k_x - k_{x_c}) + \delta_{MR_v}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MP_v}(k_{x_c}) + \delta_{MP_v}(k_{x_c})$ (б)

1.4 Резонансные явления волн Пуанкаре и волн Россби в стратифицированной плазме

1.4.1 Условия синхронизма

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби в двуслойной модели мелкой воды. Для того, чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для найденных волн, проанализируем найденные дисперсионные соотношения. Условие синхронизма для трех взаимодействующих волн с волновыми векторами \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 и частотами $\omega(\mathbf{k}_1)$, $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ соответственно имеет вид [126]:

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2); \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (1.125)$$

Чтобы определить, существуют ли такие три волны, удовлетворяющие условию синхронизма (1.125), необходимо изобразить две дисперсионные кривые, смещенные друг относительно друга, для каждого случая. Первое слагаемое $\omega(\mathbf{k}_1)$ в условии синхронизма (1.125) задает точку $(k_1, \omega(k_1))$ на дисперсионной кривой. На смещенной дисперсионной кривой слагаемое $\omega(\mathbf{k}_2)$ задает точку $(k_2, \omega(k_2))$. Если при смещении относительно начала координат одной из дисперсионных кривых она пересечет другую в некоторой точке $(k_3, \omega(k_3))$, то это будет означать выполнение условия синхронизма [126].

На Рис. 5 изображены пересечения дисперсионных кривых, определяющие удовлетворение условию синхронизма для двух волн магнито-Россби и одной волны магнито-Пуанкаре (а); для двух волн магнито-Пуанкаре и одной волны магнито-Россби (б) в вертикальном магнитном поле. На Рис.6 изображены пересечения дисперсионных кривых, определяющие удовлетворение условию синхронизма для двух волн магнито-Россби и одной волны магнито-Пуанкаре (а); для двух волн магнито-Пуанкаре и одной волны магнито-Россби (б) в горизонтальном магнитном поле. Как видно из рисунка (Рис. 7), в случае наличия внешнего магнитного поля (а) и в случае горизонтального магнитного поля (б) условие синхронизма выполняется для трех волн магнито-Россби.

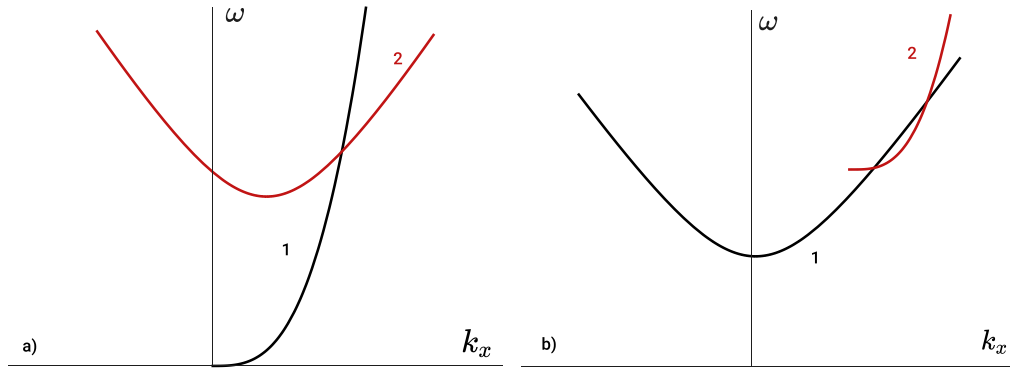


Рис. 6: Условие синхронизма для двух волн магнито-Россби и волны магнито-Пуанкаре в горизонтальном магнитном поле с учетом эффектов стратификации: 1 — $\omega_{MR_h}(k_x) + \delta_{MR_h}(k_x)$, 2 — $\omega_{MP_h}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MP_h}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_h}(k_{xc}) + \delta_{MR_h}(k_{xc})$ (a); условие синхронизма для двух волн магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле: 1 — $\omega_{MP_h}(k_x) + \delta_{MP_h}(k_x)$, 2 — $\omega_{MR_h}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_h}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MP_h}(k_{xc}) + \delta_{MP_h}(k_{xc})$ (b)

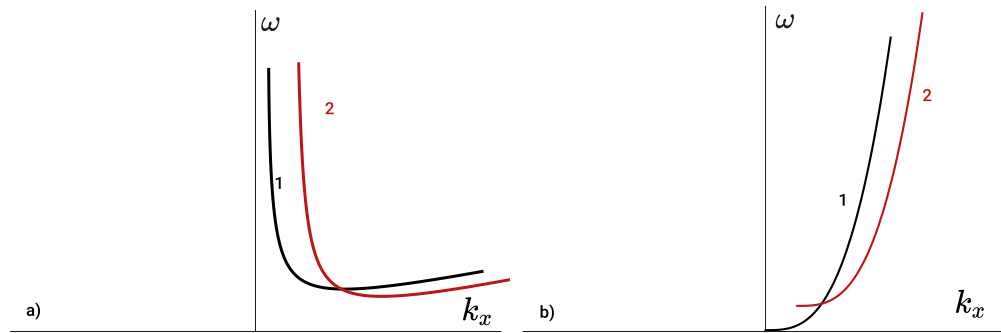


Рис. 7: Условие синхронизма для трех волн магнито-Россби во внешнем вертикальном магнитном поле: 1 — $\omega_{MR_v}(k_x) + \delta_{MR_v}(k_x)$, 2 — $\omega_{MR_v}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_v}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_v}(k_{xc}) + \delta_{MR_v}(k_{xc})$ (a); условие синхронизма для трех волн магнито-Россби в горизонтальном магнитном поле: 1 — $\omega_{MR_h}(k_x) + \delta_{MR_h}(k_x)$, 2 — $\omega_{MR_h}(k_x - k_{xc}) + \delta_{MR_h}(k_x - k_{xc}) + \omega_{MR_h}(k_{xc}) + \delta_{MR_h}(k_{xc})$ (b)

Таким образом качественный анализ дисперсионных кривых показал возможность трехволновых взаимодействий низкочастотных волн Россби и высокочастотных волн Пуанкаре в стратифицированной плазме во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле: две волны магнито-Россби взаимодействуют с волной магнито-Пуанкаре, две волны магнито-Пуанкаре взаимодействуют с волной магнито-Россби, три волны магнито-Россби взаимодействуют между собой.

1.4.2 Амплитудные уравнения взаимодействующих волн

Для изучения трехволновых взаимодействий используется асимптотический метод многомасштабных разложений [75]. Данный метод базируется на разложении решения в асимптотический ряд по малому параметру. Для обеспечения равномерной сходимости вводятся медленно меняющиеся в пространстве и времени амплитуды исходно плоской волны. Условие совместности в поправке второго порядка по малому параметру обеспечивает отсутствие резонансов и равно-

мерную сходимость асимптотического разложения. В результате получаем систему уравнений для трех взаимодействующих амплитуд. Поскольку уравнения трехволновых взаимодействий универсальны и отличаются лишь коэффициентами взаимодействия волн, в данной работе подробно изложен вывод только для течений в двуслойной модели мелкой воды во внешнем магнитном поле. Для течений в приближении двуслойной мелкой воды в горизонтальном магнитном поле, а также для течений в приближении Буссинеска и в неупругом приближении приведены коэффициенты взаимодействия и инкременты параметрических неустойчивостей.

Перепишем уравнения мелкой воды на β -плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле (1.56-1.65) в следующем виде:

$$\partial_t h_1 + \partial_x(h_1 u_{x_1}) + \partial_y(h_1 u_{y_1}) = 0, \quad (1.126)$$

$$h_1 \partial_t u_{x_1} + h_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)u_{x_1} - h_1(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)B_{x_1} + gh_1 \partial_x h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} gh_1 \partial_x \Delta h - B_0 B_{x_1} = h_1(f_0 + \beta y)u_{y_1}, \quad (1.127)$$

$$h_1 \partial_t u_{y_1} + h_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)u_{y_1} - h_1(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)B_{y_1} + gh_1 \partial_y h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} gh_1 \partial_y \Delta h - B_0 B_{y_1} = -h_1 f_0 u_{x_1}, \quad (1.128)$$

$$h_1 \partial_t B_{x_1} + h_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)B_{x_1} - h_1(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)u_{x_1} - B_0 u_{x_1} = 0, \quad (1.129)$$

$$h_1 \partial_t B_{y_1} + h_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)B_{y_1} - h_1(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla)u_{y_1} - B_0 u_{y_1} = 0, \quad (1.130)$$

$$\partial_t \Delta h + \partial_x(\Delta h u_{x_2}) + \partial_y(\Delta h u_{y_2}) = 0, \quad (1.131)$$

$$\Delta h \partial_t u_{x_2} + \Delta h(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)u_{x_2} - \Delta h(\mathbf{B}_2 \cdot \nabla)B_{x_2} + g\Delta h \partial_x h_1 - B_0 B_{x_2} = \Delta h(f_0 + \beta y)u_{y_2}, \quad (1.132)$$

$$\Delta h \partial_t u_{y_2} + \Delta h(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)u_{y_2} - \Delta h(\mathbf{B}_2 \cdot \nabla)B_{y_2} + g\Delta h \partial_y h_1 - B_0 B_{y_2} = -\Delta h f_0 u_{x_2}, \quad (1.133)$$

$$\Delta h \partial_t B_{x_2} + \Delta h(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)B_{x_2} - \Delta h(\mathbf{B}_2 \cdot \nabla)u_{x_2} - B_0 u_{x_2} = 0, \quad (1.134)$$

$$\Delta h \partial_t B_{y_2} + \Delta h(\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)B_{y_2} - \Delta h(\mathbf{B}_2 \cdot \nabla)u_{y_2} - B_0 u_{y_2} = 0. \quad (1.135)$$

Представим решение системы уравнений (1.126-1.135) в виде асимптотически сходящегося ряда по малому параметру ε :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \varepsilon \mathbf{q}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{q}_2 + \dots, \quad (1.136)$$

где \mathbf{q}_0 - стационарное решение (1.76), (1.102) полной системы, \mathbf{q}_1 - решение линеаризованной системы (1.77-1.86), (1.103-1.112), слагаемое \mathbf{q}_2 - поправка к решению, описывающая влияние квадратичной нелинейности.

Далее для удобства переименуем величины в нижнем и верхнем слоях плазмы следующим образом:

$$h_1 \equiv h, \quad u_{x_1} \equiv u_x, \quad u_{y_1} \equiv u_y, \quad B_{x_1} \equiv B_x, \quad B_{y_1} \equiv B_y,$$

$$h_2 \equiv H, \quad H - h = dh, \quad u_{x_2} \equiv v_x, \quad u_{y_2} \equiv v_y, \quad B_{x_2} \equiv B'_x, \quad B_{y_2} \equiv B'_y.$$

Уравнение для поправки \mathbf{q}_2 получается во втором порядке малости по параметру ε , в правой части которого содержатся резонансные слагаемые, приводящие к линейному росту решения по

времени и координатам. Покажем это на примере первого уравнения системы (1.126-1.135):

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 + \frac{\partial}{\partial x} h_0 u_{x_2} + \frac{\partial}{\partial y} h_0 u_{y_2} = -\frac{\partial}{\partial x} h_1 u_{x_1} - \frac{\partial}{\partial y} h_1 u_{y_1}.$$

Резонансные слагаемые приводят к решению с растущими слагаемыми вида $tq e^{(i\varphi)}$ и более высоких степеней t . Таким образом, условие сходимости ряда (1.136) $\varepsilon^2 q_2 \ll \varepsilon q_1$ на больших масштабах нарушается, поэтому, чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, вводим медленно меняющуюся амплитуду, зависящую от медленного времени (T_1) и больших пространственных масштабов (X_1, Y_1):

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1) \exp [i(\omega T_0 - k_x X_0 - k_y Y_0)]. \quad (1.137)$$

”Быстрые” переменные (T_0, X_0, Y_0) связаны с ”медленными” (T_1, X_1, Y_1) следующими соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}. \quad (1.138)$$

Подставим в систему (1.126-1.135) магнитогидродинамических уравнений стратифицированной плазмы во внешнем вертикальном магнитном поле в приближении мелкой воды решение (1.136), с учетом (1.137) и (1.138). Во втором порядке малости получим систему линейных неоднородных уравнений с резонансами в правой части:

$$\mathbf{L} = -\mathbf{M} - \mathbf{N} \quad (1.139)$$

где $\mathbf{L} = (l_j)^T$, $\mathbf{M} = (m_j)^T$, $\mathbf{N} = (n_j)^T$.

Запишем выражения, стоящие в левой и правой частях системы уравнений (1.139). Для выражений (l_j), определяющих левую часть \mathbf{L} имеем:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\partial h_2}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial u_{x_2}}{\partial X_0} + h_0 \frac{\partial u_{y_2}}{\partial Y_0}, \\ l_2 &= h_0 \frac{\partial^2 u_{x_2}}{\partial T_0 \partial Y_0} + g h_0 \frac{\partial^2 h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_0 \frac{\partial^2 d h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} - B_0 \frac{\partial B_{x_2}}{\partial Y_0} - f_0 h_0 \frac{\partial u_{y_2}}{\partial Y_0} - \beta h_0 u_{y_2}, \\ l_3 &= h_0 \frac{\partial u_{y_2}}{\partial T_0} + g h_0 \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_0 \frac{\partial d h_2}{\partial Y_0} - B_0 B_{y_2} + f_0 h_0 u_{x_2}, \\ l_4 &= h_0 \frac{\partial B_{x_2}}{\partial T_0} - B_0 u_{x_2}, \\ l_5 &= h_0 \frac{\partial B_{y_2}}{\partial T_0} - B_0 u_{y_2}, \\ l_6 &= \frac{\partial d h_2}{\partial T_0} + d h_0 \frac{\partial v_{x_2}}{\partial X_0} + d h_0 \frac{\partial v_{y_2}}{\partial Y_0}, \\ l_7 &= d h_0 \frac{\partial^2 v_{x_2}}{\partial T_0 \partial Y_0} + g d h_0 \frac{\partial^2 h_2}{\partial X_0 \partial Y_0} - B_0 \frac{\partial B'_{x_2}}{\partial Y_0} - f_0 d h_0 \frac{\partial v_{y_2}}{\partial Y_0} - \beta d h_0 v_{y_2}, \\ l_8 &= d h_0 \frac{\partial v_{y_2}}{\partial T_0} + g d h_0 \frac{\partial h_2}{\partial Y_0} - B_0 B'_{y_2} + f_0 d h_0 v_{x_2}, \end{aligned}$$

$$l_9 = dh_0 \frac{\partial B'_{x2}}{\partial T_0} - B_0 v_{x2},$$

$$l_{10} = dh_0 \frac{\partial B'_{y2}}{\partial T_0} - B_0 v_{y2}.$$

Запишем теперь правую часть системы (1.139). Для m_j имеем следующие выражения:

$$m_1 = \frac{\partial h_1}{\partial T_1} + h_0 \left[\frac{\partial u_{x1}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{y1}}{\partial Y_1} \right],$$

$$m_2 = h_0 \left[\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial T_1 \partial Y_0} + g \frac{\partial^2 h_1}{\partial Y_0 \partial X_1} + g \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0 \partial Y_1} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2 dh_1}{\partial Y_0 \partial X_1} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2 dh_1}{\partial X_0 \partial Y_1} - \frac{B_0}{h_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial Y_1} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial Y_1} \right],$$

$$m_3 = h_0 \left[\frac{\partial u_{y1}}{\partial T_1} + g \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial dh_1}{\partial Y_1} \right],$$

$$m_4 = h_0 \frac{\partial B_{x1}}{\partial T_1},$$

$$m_5 = h_0 \frac{\partial B_{y1}}{\partial T_1},$$

$$m_6 = \frac{\partial dh_1}{\partial T_1} + dh_0 \left[\frac{\partial v_{x1}}{\partial X_1} + \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \right],$$

$$m_7 = dh_0 \left[\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial T_1 \partial Y_0} + g \frac{\partial^2 h_1}{\partial Y_0 \partial X_1} + g \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0 \partial Y_1} - \frac{B_0}{dh_0} \frac{\partial B'_{x1}}{\partial Y_1} - f_0 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_1} \right],$$

$$m_8 = dh_0 \left[\frac{\partial v_{y1}}{\partial T_1} + g \frac{\partial h_1}{\partial Y_1} \right],$$

$$m_9 = dh_0 \frac{\partial B'_{x1}}{\partial T_1},$$

$$m_{10} = dh_0 \frac{\partial B'_{y1}}{\partial T_1}.$$

И наконец для n_j имеем следующие выражения:

$$n_1 = \frac{\partial h_1 u_{x1}}{\partial X_0} + \frac{\partial h_1 u_{y1}}{\partial Y_0},$$

$$n_2 = \frac{\partial^2 h_1 u_{x1}}{h_1 \partial T_0 \partial Y_0} + \frac{h_0 \partial^2 (u_{x1}^2 - B_{x1}^2)}{h_1 \partial X_0 \partial Y_0} + \frac{h_0 \partial^2 (u_{x1} u_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{h_1 \partial^2 Y_0} + \frac{g \partial h_1}{h_1 \partial X_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + \frac{g \partial^2 h_1}{\partial X_0 \partial Y_0} + \frac{\rho_2 g}{h_1 \rho_1} \left[\frac{\partial dh_1}{\partial X_0} \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + \frac{h_1 \partial^2 dh_1}{\partial X_0 \partial Y_0} \right] - \frac{f_0 \partial u_{y1}}{\partial Y_0} - \beta u_{y1},$$

$$n_3 = \frac{\partial h_1 u_{y1}}{\partial T_0} + h_0 \frac{\partial (u_{y1}^2 - B_{y1}^2)}{\partial Y_0} + h_0 \frac{\partial (u_{x1} u_{y1} - B_{x1} B_{y1})}{\partial X_0} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_1 \frac{\partial dh_1}{\partial Y_0} + f_0 h_1 u_{x1},$$

$$n_4 = \frac{\partial h_1 B_{x1}}{\partial T_0},$$

$$\begin{aligned}
n_5 &= \frac{\partial h_1 B_{y1}}{\partial T_0}, \\
n_6 &= \frac{\partial dh_1 v_{x1}}{\partial X_0} + \frac{\partial dh_1 v_{y1}}{\partial Y_0}, \\
n_7 &= \frac{\partial^2 dh_1 v_{x1}}{\partial T_0 \partial Y_0} + dh_0 \frac{\partial^2 (v_{x1}^2 - B_{x1}'^2)}{\partial X_0 \partial Y_0} + dh_0 \frac{\partial^2 (v_{x1} v_{y1} - B_{x1}' B_{y1}')}{\partial^2 Y_0} + g \frac{\partial h_1}{\partial X_0} \frac{\partial dh_1}{\partial Y_0} + g dh_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_0 \partial Y_0} - \\
&\quad - f_0 dh_1 \frac{\partial v_{y1}}{\partial Y_0} - \beta dh_1 v_{y1}, \\
n_8 &= \frac{\partial dh_1 v_{y1}}{\partial T_0} + dh_0 \frac{\partial (v_{x1}^2 - B_{x1}'^2)}{\partial X_0} + dh_0 \frac{\partial (v_{x1} v_{y1} - B_{x1}' B_{y1}')}{\partial^2 Y_0} + g dh_1 \frac{\partial h_1}{\partial Y_0} + f_0 dh_1 v_{x1}, \\
n_9 &= \frac{\partial dh_1 B_{x1}'}{\partial T_0}, \\
n_{10} &= \frac{\partial dh_1 B_{y1}'}{\partial T_0}.
\end{aligned}$$

Правая часть (\mathbf{M}, \mathbf{N}) системы (1.139) включает в себя резонансные решения линейной задачи, которые необходимо исключить. Для этого воспользуемся условием совместности, заключающемся в ортогональности правой части (\mathbf{M}, \mathbf{N}) ядру линейного оператора, стоящего в левой части (\mathbf{L}) системы уравнений (1.139). Представим решение в виде суммы трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма (1.125):

$$\mathbf{q}_1 = \phi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + c.c., \quad (1.140)$$

где ϕ, ψ, χ - амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_{xi}X_0 + k_{yi}Y_0$ - фазы волн, \mathbf{a} - комплексный вектор волны.

Подставим решение в виде (1.140) в правую часть системы (1.139), продифференцируем уравнения и выпишем слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta_1)$. Полученные выражения запишем в виде:

$$-\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2, \quad (1.141)$$

где $\mathbf{R}_i = (r_j^i)^T$. Выражения для r_j^1 , составляющих столбец \mathbf{R}_1 , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
r_1^1 &= a_1 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + h_0 a_3 \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + h_0 a_4 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1}, \\
r_2^1 &= h_0 \left\{ -i\omega(\mathbf{k}_1) a_3 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + ik_{y1} \left[a_3 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_1 \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} a_{2-1} \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \right] + ik_{x1} g \left[a_1 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\rho_2}{\rho_1} a_{2-1} \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \right] - \frac{B_0 a_5}{h_0} \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} - f_0 a_4 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \right\}, \\
r_3^1 &= h_0 \left\{ a_4 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + g \left[a_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} a_{2-1} \right] \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \right\}, \\
r_4^1 &= h_0 a_5 \frac{\partial \phi}{\partial T_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_5^1 &= h_0 a_6 \frac{\partial \phi}{\partial T_1}, \\
r_6^1 &= a_{2-1} \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + \Delta h_0 a_7 \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + \Delta h_0 a_8 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1}, \\
r_7^1 &= \Delta h_0 \left\{ -i\omega(\mathbf{k}_1) a_7 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + ik_{y1} \left[a_7 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + ga_1 \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \right] + ik_{x1} ga_2 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} - \frac{B_0 a_9}{\Delta h_0} \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} - f_0 a_8 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \right\}, \\
r_8^1 &= \Delta h_0 \left\{ a_8 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + ga_1 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \right\}, \\
r_9^1 &= \Delta h_0 a_9 \frac{\partial \phi}{\partial T_1}, \\
r_{10}^1 &= \Delta h_0 a_{10} \frac{\partial \phi}{\partial T_1},
\end{aligned}$$

где $a_i = a_i(\mathbf{k}_1)$.

Выражения для r_j^2 , составляющих столбец \mathbf{R}_2 , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= 2i\{k_{x1}a_1a_3 + k_{y1}a_1a_4\}\psi^*\chi, \\
r_2^2 &= \{2\omega k_{y1}a_1a_3 - 2k_{x1}k_{y1}[a_3^*a_3 - a_5^*a_5] - 2k_{y1}^2[a_3a_4 - a_5a_6] + gk_{y1}[k_{x2}a_1(a_1^* + \frac{\rho_2}{\rho_1}a_{2-1}^*) - \\
&\quad - k_{x3}a_1^*(a_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}a_{2-1})] - if_0[k_{y3}a_1^*a_4 - k_{y2}a_1a_4^*] - 2\beta a_1a_4\}\psi^*\chi, \\
r_3^2 &= \{2i\omega a_1a_4 + 2ik_{y1}[a_4^*a_4 - a_6^*a_6] + 2ik_{x1}[a_3a_4 - a_5a_6] + ik_{y1}ga_1a_1^* + ig\frac{\rho_2}{\rho_1}[k_{y3}a_1^*a_{2-1} - k_{y2}a_{2-1}^*a_1] + \\
&\quad + 2f_0a_1a_3\}\psi^*\chi, \\
r_4^2 &= 2i\{-\omega a_1a_5 + k_{y1}h_0(a_4a_5 - a_3a_6)\}\psi^*\chi, \\
r_5^2 &= 2i\{-\omega a_1a_6 + k_{x1}h_0(a_3a_6 - a_4a_5)\}\psi^*\chi, \\
r_6^2 &= 2i\{k_{x1}a_{2-1}a_7 + 2k_{y1}a_{2-1}a_8\}\psi^*\chi, \\
r_7^2 &= \{2\omega k_{y1}a_{2-1}a_7 - 2k_{x1}k_{y1}[a_7^*a_7 - a_9^*a_9] - 2k_{y1}^2[a_7a_8 - a_9a_{10}] + gk_{y1}[k_{x2}a_{2-1}a_1^* - k_{x3}a_{2-1}^*a_1] - \\
&\quad - if_0[k_{y3}a_{2-1}^*a_8 - k_{y2}a_{2-1}a_8^*] - 2\beta a_{2-1}a_8\}\psi^*\chi, \\
r_8^2 &= \{-2i\omega a_{2-1}a_8 + 2ik_{y1}[a_8^*a_8 - a_{10}^*a_{10}] + 2ik_{x1}[a_7a_8 - a_9a_{10}] + ig[k_{y3}a_1a_{2-1}^* - k_{y2}a_1^*a_{2-1}] + \\
&\quad + 2f_0a_{2-1}a_7\}\psi^*\chi, \\
r_9^2 &= 2i\{-\omega a_{2-1}a_9 + k_{y1}(a_8a_9 - a_7a_{10})\}\psi^*\chi, \\
r_{10}^2 &= 2i\{-\omega a_{2-1}a_{10} + k_{x1}(a_7a_{10} - a_8a_9)\}\psi^*\chi,
\end{aligned}$$

где $a_i^* = a_i^*(\mathbf{k}_2)$, $a_i = a_i(\mathbf{k}_3)$, $\omega = \omega(\mathbf{k}_1)$, $a_i a_j = [a_i^*(\mathbf{k}_2) a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3) a_j^*(\mathbf{k}_2)]/2$.

Таким образом, умножая правую часть (1.141) на собственный вектор \mathbf{z} линейного оператора, стоящего в левой части (1.139), получим уравнение для амплитуды ϕ одной из взаимодействующих

ВОЛН:

$$s_{1_v}\phi = f_{1_v}\psi^*\chi, \quad (1.142)$$

где s_{1_v} - дифференциальный оператор по "медленным" аргументам T_1, X_1, Y_1 . Он как и коэффициент f_{1_v} зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн:

$$s_{1_v} = t_{1_v}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{1_v}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{1_v}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (1.143)$$

где

$$\begin{aligned} t_{1_v} &= \{z_1a_1 + h_{01}(ik_{y1}z_2a_3 + z_3a_4 + z_4a_5 + z_5a_6)\} + \\ &+ \{z_6a_{2-1} + \Delta h_0(ik_{y1}z_7a_7 + z_8a_8 + z_9a_9 + z_{10}a_{10})\}, \\ p_{1_v} &= \{h_{01}z_1a_3 + z_2ik_{y1}gh_{01}a_1\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}z_2ik_{y1}gh_{01}a_{2-1} + \{\Delta h_0z_6a_7 + ik_{y1}g\Delta h_0z_7a_1\}, \\ q_{1_v} &= \left\{ h_{01}z_1a_4 + h_{01}z_2[-i\omega(\mathbf{k}_1)a_3 + ik_{x1}ga_1 - \frac{B_0a_5}{h_{01}} - f_0a_4] + h_{01}z_3ga_1 \right\} + \\ &+ \frac{\rho_2}{\rho_1}h_{01}ga_{2-1}(z_2ik_{x1} + z_3) + \\ &+ \left\{ \Delta h_0z_6a_8 + \Delta h_0z_7[-i\omega(\mathbf{k}_1)a_7 + ik_{x1}ga_1 - \frac{B_0a_9}{\Delta h_0} - f_0a_8] + \Delta h_0z_8a_1 \right\}. \end{aligned} \quad (1.144)$$

В данных выражениях $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$.

$$\begin{aligned} f_{1_v} &= \{2iz_1[k_{x1}a_1a_3 + k_{y1}a_1a_4] + z_2[k_{y1}\{2\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_3 - 2k_{x1}(a_3^*a_3 - a_5^*a_5) - 2k_{y1}(a_3a_4 - a_5a_6) + \\ &+ g(k_{x2}a_1a_1^* - k_{x3}a_1^*a_1)\} - if_0(k_{y3}a_1^*a_4 - k_{y2}a_1a_4^*) - 2\beta a_1a_4] + \\ &+ z_3[-2i\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_4 + 2ik_{y1}(a_4^*a_4 - a_6^*a_6) + 2ik_{x1}(a_3a_4 - a_5a_6) + ik_{y1}ga_1a_1^* + 2f_0a_1a_3] - \\ &- 2iz_4[\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_5 + k_{y1}h_0(a_3a_6 - a_4a_5)] - 2iz_5[\omega(\mathbf{k}_1)a_1a_6 + k_{x1}h_0(a_4a_5 + a_3a_6)]\} + \\ &+ \frac{\rho_2}{\rho_1}\{z_2k_{y1}g(k_{x2}a_1a_{2-1}^* - k_{x3}a_1^*a_{2-1}) + z_3ig(k_{y3}a_1^*a_{2-1} - k_{y2}a_{2-1}^*a_1)\} + \\ &+ \{iz_6[k_{x1}a_{2-1}a_7 + k_{y1}a_{2-1}a_8] + z_7[k_{y1}\{2\omega(\mathbf{k}_1)a_{2-1}a_7 - 2k_{x1}(a_7^*a_7 - a_9^*a_9) - \\ &- 2k_{y1}(a_7a_8 - a_9a_{10}) + g(k_{x2}a_{2-1}a_1^* - k_{x3}a_{2-1}^*a_1)\} - if_0(k_{y3}a_{2-1}^*a_8 - k_{y2}a_{2-1}a_8^*)] + \\ &+ z_8[-2i\omega(\mathbf{k}_1)a_{2-1}a_8 + 2ik_{y1}(a_8^*a_8 - a_{10}^*a_{10}) + 2ik_{x1}(a_7a_8 - a_9a_{10}) + \\ &+ ig(k_{y3}a_1a_{2-1}^* - k_{y2}a_1^*a_{2-1}) + 2f_0a_{2-1}a_7] - \\ &- 2iz_9[\omega(\mathbf{k}_1)a_{2-1}a_9 + k_{y1}\Delta h_0(a_7a_{10} - a_8a_9)] - 2iz_{10}[\omega(\mathbf{k}_1)a_{2-1}a_{10} + k_{x1}\Delta h_0(a_8a_9 - a_7a_{10})]\}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

В данном выражении $a_i^* = a_i^*(\mathbf{k}_2)$, $a_i = a_i(\mathbf{k}_3)$, $\omega = \omega(\mathbf{k}_1)$, а произведения вида $a_i a_j = [a_i^*(\mathbf{k}_2)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_2)]/2$.

Аналогично для слагаемых, пропорциональных $\exp(i\theta_2)$, получаем уравнение для амплиту-

ды ψ второй взаимодействующей волны:

$$s_{2v}\psi = f_2\phi^*\chi, \quad (1.146)$$

$$s_{2v} = t_{2v}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{2v}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{2v}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (1.147)$$

$$t_{2v} = \{z_1a_1 + h_{01}(ik_{y2}z_2a_3 + z_3a_4 + z_4a_5 + z_5a_6)\} + \{z_6a_{2-1} + \Delta h_0(ik_{y2}z_7a_7 + z_8a_8 + z_9a_9 + z_{10}a_{10})\}, \quad (1.148)$$

$$p_{2v} = \{h_{01}z_1a_3 + z_2ik_{y2}gh_{01}a_1\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}z_2ik_{y2}gh_{01}a_{2-1} + \{\Delta h_0z_6a_7 + ik_{y2}g\Delta h_0z_7a_1\},$$

$$q_{2v} = \left\{ h_{01}z_1a_4 + h_{01}z_2[-i\omega(\mathbf{k}_2)a_3 + ik_{x2}ga_1 - \frac{B_0a_5}{h_{01}} - f_0a_4] + h_{01}z_3ga_1 \right\} + \frac{\rho_2}{\rho_1}h_{01}ga_{2-1}(z_2ik_{x2} + z_3) + \left\{ \Delta h_0z_6a_8 + \Delta h_0z_7[-i\omega(\mathbf{k}_2)a_7 + ik_{x2}ga_1 - \frac{B_0a_9}{\Delta h_0} - f_0a_8] + \Delta h_0z_8a_1 \right\}.$$

В данных выражениях $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_2)$.

$$\begin{aligned} f_{2v} = & \{2iz_1[k_{x2}a_1a_3 + k_{y2}a_1a_4] + z_2[k_{y2}\{2\omega(\mathbf{k}_2)a_1a_3 - 2k_{x2}(a_3^*a_3 - a_5^*a_5) - 2k_{y2}(a_3a_4 - a_5a_6) + \\ & + g(k_{x2}a_1a_1^* - k_{x3}a_1^*a_1)\} - if_0(k_{y3}a_1^*a_4 - k_{y1}a_1a_4^*) - 2\beta a_1a_4]\} + \\ & + z_3[-2i\omega(\mathbf{k}_2)a_1a_4 + 2ik_{y2}(a_4^*a_4 - a_6^*a_6) + 2ik_{x2}(a_3a_4 - a_5a_6) + ik_{y2}ga_1a_1^* + 2f_0a_1a_3] - \\ & - 2iz_4[\omega(\mathbf{k}_2)a_1a_5 + k_{y2}h_0(a_3a_6 - a_4a_5)] - 2iz_5[\omega(\mathbf{k}_2)a_6 + k_{x1}h_0(a_4a_5 - a_3a_6)]] + \\ & + \frac{\rho_2}{\rho_1} \{z_2k_{y2}g(k_{x2}a_1a_{2-1}^* - k_{x3}a_1^*a_{2-1}) + z_3ig(k_{y3}a_1^*a_{2-1} - k_{y1}a_{2-1}^*a_1)\} + \\ & + \{iz_6[k_{x2}a_{2-1}a_7 + k_{y2}a_{2-1}a_8] + z_7[k_{y2}\{2\omega(\mathbf{k}_2)a_{2-1}a_7 - 2k_{x2}(a_7^*a_7 - a_9^*a_9) - \\ & - 2k_{y2}(a_7a_8 - a_9a_{10}) + g(k_{x1}a_{2-1}a_1^* - k_{x3}a_{2-1}^*a_1)\} - if_0(k_{y3}a_{2-1}^*a_8 - k_{y1}a_{2-1}a_8^*)]\} + \\ & + z_8[-2i\omega(\mathbf{k}_2)a_{2-1}a_8 + 2ik_{y2}(a_8^*a_8 - a_{10}^*a_{10}) + 2ik_{x2}(a_7a_8 - a_9a_{10}) + \\ & + ig(k_{y3}a_1a_{2-1}^* - k_{y1}a_1^*a_{2-1}) + 2f_0a_{2-1}a_7] - \\ & - 2iz_9[\omega(\mathbf{k}_2)a_{2-1}a_9 + k_{y2}\Delta h_0(a_7a_{10} - a_8a_9)] - 2iz_{10}[\omega(\mathbf{k}_2)a_{2-1}a_{10} + k_{x2}\Delta h_0(a_8a_9 - a_7a_{10})]] \}. \end{aligned} \quad (1.149)$$

В данном выражении произведения вида $a_i a_j = [a_i^*(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_3) + a_i(\mathbf{k}_3)a_j^*(\mathbf{k}_1)]/2$.

И, наконец, для слагаемых, пропорциональных $\exp(i\theta_3)$, получаем уравнение для амплитуды χ третьей взаимодействующей волны:

$$s_{3v}\chi = f_{3v}\phi\psi, \quad (1.150)$$

$$s_{3v} = t_{3v}\frac{\partial}{\partial T_1} + p_{3v}\frac{\partial}{\partial X_1} + q_{3v}\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (1.151)$$

$$\begin{aligned}
t_{3_v} &= \{z_1 a_1 + h_{01}(ik_{y3} z_2 a_3 + z_3 a_4 + z_4 a_5 + z_5 a_6)\} + \\
&+ \{z_6 a_{2-1} + \Delta h_0(ik_{y3} z_7 a_7 + z_8 a_8 + z_9 a_9 + z_{10} a_{10})\}, \\
p_{3_v} &= \{h_{01} z_1 a_3 + z_2 ik_{y3} g h_{01} a_1\} + z_2 ik_{y3} g h_{01} \frac{\rho_2}{\rho_1} a_{2-1} + \{\Delta h_0 z_6 a_7 + ik_{y3} g \Delta h_0 z_7 a_1\}, \\
q_{3_v} &= \left\{ h_{01} z_1 a_4 + h_{01} z_2 [-i\omega(\mathbf{k}_3) a_3 + ik_{x3} g a_1 - \frac{B_0 a_5}{h_{01}} - f_0 a_4] + h_{01} z_3 g a_1 \right\} + \\
&+ \frac{\rho_2}{\rho_1} h_{01} g a_{2-1} (z_2 ik_{x3} + z_3) + \\
&+ \left\{ \Delta h_0 z_6 a_8 + \Delta h_0 z_7 [-i\omega(\mathbf{k}_3) a_7 + ik_{x3} g a_1 - \frac{B_0 a_9}{\Delta h_0} - f_0 a_8] + \Delta h_0 z_8 a_1 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.152}$$

В данных выражениях $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_3)$.

$$\begin{aligned}
f_{3_v} &= \{2iz_1[k_{x3} a_1 a_3 + k_{y3} a_1 a_4] + z_2[k_{y3}\{2\omega(\mathbf{k}_3) a_1 a_2 - 2k_{x3}(a_3^* a_3 - a_5^* a_5) - 2k_{y3}(a_3 a_4 - a_5 a_6) - \\
&- g(k_{x1} a_1 a_1 + k_{x2} a_1 a_1)\} - if_0(k_{y2} a_1 a_4 + k_{y1} a_1 a_4) - 2\beta a_1 a_4] + \\
&+ z_3[-2i\omega(\mathbf{k}_2) a_1 a_4 + 2ik_{y3}(a_4^* a_4 - a_6^* a_6) + 2ik_{x3}(a_3 a_4 - a_5 a_6) + ik_{y3} g a_1 a_1 + 2f_0 a_1 a_3] - \\
&- 2iz_4[\omega(\mathbf{k}_3) a_1 a_5 + k_{y3} h_0(a_3 a_6 - a_4 a_5)] - 2iz_5[\omega(\mathbf{k}_3) a_6 + k_{x3} h_0(a_4 a_5 - a_3 a_6)] - \\
&- \frac{\rho_2}{\rho_1} \{z_2 k_{y3} g(k_{x1} a_1 a_{2-1} + k_{x2} a_1 a_{2-1}) - z_3 i g(k_{y2} a_1 a_{2-1} + k_{y1} a_{2-1} a_1)\} + \\
&+ \{iz_6[k_{x3} a_{2-1} a_7 + k_{y3} a_{2-1} a_8] + z_7[k_{y3}\{2\omega(\mathbf{k}_3) a_{2-1} a_7 - 2k_{x3}(a_7^* a_7 - a_9^* a_9) - \\
&- 2k_{y3}(a_7 a_8 - a_9 a_{10}) - g(k_{x2} a_{2-1} a_1 + k_{x1} a_{2-1} a_1)\} - if_0(k_{y2} a_{2-1} a_8 + k_{y1} a_{2-1} a_8)] + \\
&+ z_8[-2i\omega(\mathbf{k}_3) a_{2-1} a_8 + 2ik_{y3}(a_8^* a_8 - a_{10}^* a_{10}) + 2ik_{x3}(a_7 a_8 - a_9 a_{10}) + \\
&+ ig(k_{y2} a_1 a_{2-1} + k_{y1} a_1 a_{2-1}) + 2f_0 a_{2-1} a_7] - \\
&- 2iz_9[\omega(\mathbf{k}_3) a_{2-1} a_9 + k_{y3} \Delta h_0(a_7 a_{10} - a_8 a_9)] - 2iz_{10}[\omega(\mathbf{k}_3) a_{2-1} a_{10} + k_{x3} \Delta h_0(a_8 a_9 - a_7 a_{10})]\}.
\end{aligned} \tag{1.153}$$

В данном выражении произведения вида $a_i a_j = [a_i(\mathbf{k}_1) a_j(\mathbf{k}_2) + a_i(\mathbf{k}_2) a_j(\mathbf{k}_1)]/2$.

Рассмотрим подробнее коэффициенты при производных в дифференциальных операторах (??), (1.147), (1.151) и коэффициенты взаимодействия (1.145), (1.149), (1.153). Слагаемые в каждом коэффициенте разделяются на два выражения в фигурных скобках, имеющие схожий вид, и промежуточные слагаемые, включающие в себя отношение плотностей слоев плазмы. Слагаемые в первой фигурной скобке относятся к нижнему слою плазмы, слагаемые, стоящие во второй фигурной скобке, относятся к верхнему. Промежуточные слагаемые описывают эффекты стратификации. Каждое из выражений в фигурных скобках с учетом промежуточного слагаемого переходит в известные коэффициенты в системе на амплитуды трех взаимодействующих волн магнито-Росби во внешнем вертикальном магнитном поле в однослойной мелкой воде [30], при условии равенства плотностей и компонент $a_{2-1} = a_1$ комплексного волнового вектора волны \mathbf{a} .

Перейдем к анализу взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн в приближе-

нии двуслойной мелкой воды в горизонтальном магнитном поле. В этом случае $\mathbf{z} \equiv \mathbf{z}'$ — собственный вектор линейного оператора системы (1.103-1.112), полученный при линеаризации на фоне стационарного состояния с горизонтальным магнитным полем (1.102). Коэффициенты t_{n_h} и f_{m_h} отличаются от аналогичных коэффициентов во внешнем магнитном поле (1.148, 1.152), (1.145, 1.149, 1.153) только собственным вектором \mathbf{z}' . Коэффициенты p_{n_h} и q_{n_h} помимо отличия в собственном векторе, так же имеют отличия в определенных слагаемых, связанных с магнитным полем. Коэффициент p_{n_h} имеет следующий вид:

$$p_{n_h} = \{h_{01}(z'_1 a_3 + z'_2 i k_{y_n}(g a_1 - a_5 B_{x_{01}}) - B_{x_{01}}(z'_3 a_6 + z'_4 a_3 + z'_5 a_4))\} + \frac{\rho_2}{\rho_1} z'_2 i k_{y_n} g h_{01} a_{2-1} + \\ + \{\Delta h_0(z'_6 a_7 + i k_{y_n} z'_7(g a_1 - a_9 B_{x_{02}}) - B_{x_{02}}(z'_8 a_{10} + z'_9 a_7 + z'_{10} a_8))\} \quad (1.154)$$

где $n = 1, 2, 3$, а коэффициент q_{n_h} имеет вид:

$$q_{n_{2h}} = \{h_{01}(z'_1 a_4 + z'_2[-i\omega(\mathbf{k}_n)a_3 - ia_5(B_{x_{01}}k_{x_n} + 2B_{y_{01}}k_{y_n}) + ik_{x_n}ga_1 - f_0 a_4] + \\ + z'_3 g(a_1 - a_6 B_{y_{01}}) - z'_4 a_3 B_{y_{01}} - z'_5 a_4 B_{y_{01}})\} + \frac{\rho_2}{\rho_1} a_{2-1} h_{01} g(z_2 i k_{x_n} + z_3) + \\ + \{\Delta h_0(z'_6 a_8 + z_7[-i\omega a'_7 - ia_9(B_{x_{02}}k_{x_n} + 2B_{y_{02}}k_{y_n}) + ik_{x_n}ga_1 - f_0 a_8] + \\ + z'_8(a_1 - a_{10} B_{y_{02}}) - z'_9 a_7 B_{y_{02}} - z'_{10} a_8 B_{y_{02}})\} \quad (1.155)$$

Здесь, как и в случае с внешним вертикальным магнитным полем, слагаемые в первой фигурной скобке относятся к нижнему слою плазмы, слагаемые, стоящие во второй фигурной скобке, относятся к верхнему слою плазмы, а промежуточные слагаемые связаны со стратификацией. Поскольку остальные коэффициенты будут отличаться от аналогичных для внешнего вертикального магнитного поля только компонентами собственного вектора, то для них верны все предыдущие выводы, включая переход к аналогичным коэффициентам в однослойной мелкой воде [30].

1.4.3 Неустойчивости типа распад и усиление

Система уравнений (1.142, 1.146, 1.150) имеет общий вид и описывает неустойчивости типа распад и усиление [30]. В случае когда амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других ($\phi \gg \psi, \chi$, $\phi = \phi_0$) имеет место неустойчивость типа распад, когда волна с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ распадается на две волны с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ и с инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|f_2 f_3|/|t_2 t_3|} |\phi_0| > 0$. В случае когда амплитуда одной из волн много меньше амплитуд двух других ($\phi \ll \psi, \chi$, $\psi = \psi_0, \chi = \chi_0$) имеет место неустойчивость типа усиление, когда волна с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ усиливается двумя волнами с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ и с инкрементом неустойчивости $\Gamma = (|f_1|/|t_1|) |\psi_0 \chi_0| > 0$. Несмотря на общий вид инкрементов неустойчивости, они различны для каждого типа трехволновых взаимодействий. Различие в неявном виде представлено в коэффициентах f_n, t_n , которые содержат в неявном виде собственные вектора и частоты, характерные для определенного типа волны. Таким образом в приведенных ниже параметрических неустойчивостях все инкременты взаимодействия различны.

В приближении двуслойной мелкой воды во внешнем вертикальном магнитном поле получены следующие неустойчивости при трехволновом взаимодействии высокочастотных и низко-

частотных волн на β -плоскости с учетом эффектов стратификации: распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_1)$ на волну магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_v}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MP_v}(\mathbf{k}_2)$ и волну магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_3)$; распад волны магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_v}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MP_v}(\mathbf{k}_1)$ на волну магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_2)$ и волну магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_v}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MP_v}(\mathbf{k}_3)$; распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_1)$ на волну магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_2)$ и волну магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_1)$ волной магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_v}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MP_v}(\mathbf{k}_2)$ и волной магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_v}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MP_v}(\mathbf{k}_1)$ волной магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_2)$ и волной магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_v}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MP_v}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_1)$ волной магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_2)$ и волной магнито-Россби $\omega_{MR_v}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_v}(\mathbf{k}_3)$. В приближении двуслойной мелкой воды в горизонтальном магнитном поле найдены следующие неустойчивости при трехволновом взаимодействии высокочастотных и низкочастотных волн на β -плоскости с учетом эффектов стратификации: распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_1)$ на волну магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_h}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MP_h}(\mathbf{k}_3)$ и волну магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_3)$; распад волны магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_h}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MP_h}(\mathbf{k}_1)$ на волну магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_2)$ и волну магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_h}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MP_h}(\mathbf{k}_3)$; распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_1)$ на волну магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_2)$ и волну магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_1)$ волной магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_h}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MP_h}(\mathbf{k}_2)$ и волной магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_h}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MP_h}(\mathbf{k}_1)$ волной магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_2)$ и волной магнито-Пуанкаре $\omega_{MP_h}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MP_h}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_1) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_1)$ волной магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_2) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_2)$ и волной магнито-Россби $\omega_{MR_h}(\mathbf{k}_3) + \delta_{MR_h}(\mathbf{k}_3)$.

1.5 Выводы

В главе получены магнитогидродинамические уравнения вращающейся стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды во внешнем магнитном поле. Полученные уравнения обобщены на случай сферических течений в приближении бета-плоскости во внешнем вертикальном магнитном поле и в горизонтальном магнитном поле. Показано, что в линейном приближении полученная система допускает решение в виде волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби, характеристики которых модифицированы соотношением плотностей слоев плазмы. Показано, что волны магнито-Пуанкаре на β -плоскости определяются высокочастотными возмущениями, которыми ранее пренебрегали. Найдено, что поправка к частоте, связанная со стратификацией во внешнем вертикальном магнитном поле, увеличивает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре при малых k_x , уменьшает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре при больших k_x и для любых k_x уменьшает групповую скорость и увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби. Поправка к частоте, связанная со стратификацией в горизонтальном магнитном поле, увеличивает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре, уменьшает групповую скорость волны магнито-Россби, увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби при малых k_x и уменьшает фазовую скорость волны магнито-Россби при больших k_x . Подробный анализ условий синхронизма волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-

Россби продемонстрировал возможность трехволновых взаимодействий этих волн. Методом многомасштабных разложений выписаны уравнения трехволновых взаимодействий и коэффициенты взаимодействия этих волн. Показано, что реализуются следующие неустойчивости: распад волны магнито-Пуанкаре на волну магнито-Россби и волну магнито-Пуанкаре; распад волны магнито-Россби на волну магнито-Пуанкаре и волну магнито-Россби; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Пуанкаре в поле волны магнито-Россби и волны магнито-Пуанкаре; усиление волны магнито-Россби в поле волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Россби в поле двух волн магнито-Россби.

Глава 2. Магнитогидродинамическая теория волновых процессов в течениях вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска

2.1 Введение

В предыдущей главе получены магнитогидродинамические уравнения мелкой воды во внешнем магнитном поле, которые учитывают стратификацию в модели двух слоев плазмы различной, но постоянной плотности. Однако магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает не только вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля, но и учет вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, не являясь трехмерной, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы.

В данной главе сделан существенный шаг вперед в изучении трехмерных волновых процессов в магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы, являющийся принципиальным для реальных течений с непрерывной стратификацией [76, 113, 119, 120, 121, 122, 123]. В главе используется трехмерная магнитогидродинамическая система в приближении Буссинеска с учетом силы Кориолиса в четырех различных приближениях: на f -плоскости, на нестандартной f -плоскости (с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса), на β -плоскости и на нестандартной β -плоскости. В геофизической гидродинамике восстанавливающими силами инерционно-гравитационных волн, возникающих в стратифицированных вращающихся потоках [?, ?] являются силы Кориолиса и силы плавучести. В плазменных потоках возникают новые типы волн из-за наличия магнитного поля как дополнительного восстанавливающего механизма. Получены законы дисперсии различных типов магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитоастрофизических волн, и волн магнито-Россби, динамика которых определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. Дисперсионные кривые всех найденных типов волн качественно проанализированы для выявления выполнения условия синхронизма [74], обеспечивающего наличие трехволновых взаимодействий. Для всех найденных типов трехволновых взаимодействий получены амплитудные уравнения, описаны возможные неустойчивости типа распад и

усиление и найдены их инкременты [74].

2.2 Линейная теория волновых процессов в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска

Исследуем течения несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в рамках трехмерных магнитогидродинамических уравнений в приближении Буссинеска в геометрии устойчиво стратифицированного слоя с линейным профилем плотности:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \nabla p + \frac{\rho \mathbf{g}}{\tilde{\rho}_0} - \frac{1}{4\pi \tilde{\rho}_0} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_h \rho = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} u_z, \quad (2.3)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (2.4)$$

где \mathbf{u} – вектор скорости плазмы, \mathbf{b} – вектор напряженности магнитного поля в плазме, \mathbf{f} – вектор Кориолиса, ρ – плотность плазмы, $\tilde{\rho}_0$ – плотность при равновесной температуре, $\bar{\rho}(z) = N^2 z \frac{\tilde{\rho}_0}{g}$ – начальный линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию (N^2 – частота Брента-Вяйсяля), p – давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Первое уравнение системы – уравнение изменения импульса, второе – уравнение переноса магнитного поля, третье – уравнение изменения плотности, четвертое – условие бездивергентности поля скоростей. Введем следующие переобозначения: $\rho' = \frac{\rho g}{\tilde{\rho}_0}$, $P = \frac{p}{\tilde{\rho}_0}$, $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{4\pi \tilde{\rho}_0}}$.

Запишем стационарное решение, удовлетворяющее системе (2.1-2.4), в виде:

$$\mathbf{q}_0 = (u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}, B_{x0}, B_{y0}, B_{z0}, P_0, \bar{\rho})^T, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = \text{const}$, $\frac{\partial P_0}{\partial z} = -\bar{\rho}(z)$, а верхний индекс T означает транспонирование вектора. Линеаризованная система (2.1-2.4) на фоне стационара (2.5) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{f} \times \mathbf{u}_1 + \nabla P_1 + \rho'_1 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0, \quad (2.8)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) = 0, \quad (2.9)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ – единичный вектор вдоль оси z .

2.2.1 Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости

Исследуем плоские течения несжимающейся вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на f -плоскости. В данном приближении вектор Кориолиса имеет вид $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$.

Ищем решение системы (2.6-2.9) в следующем виде

$$\mathbf{q}_1 e^{i\varphi} = (u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, B_{x1}, B_{y1}, B_{z1}, P_1, \rho_1')^T e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (2.10)$$

где ω – частота возмущения, а $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор. Условие равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (2.6-2.9) обеспечивает наличие нетривиальных решений. Дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска на f -плоскости имеет вид:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Решениями уравнения (2.11) являются дисперсионные соотношения, описывающие два типа волн, восстанавливаемыми силами которых являются сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести: трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Рассмотрим подробнее первый тип волн. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$\omega_{mig3D} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4}}, \quad (2.12)$$

в котором знак “+” соответствует волне, распространяющейся по направлению волнового вектора \mathbf{k} , а знак “-” – волне, распространяющейся в направлении, противоположном \mathbf{k} . В отсутствие магнитного поля в системе ($\mathbf{B}_0 = 0$) полученный тип волн описывает трехмерные инерционно-гравитационные волны [125], являющиеся точным решением дисперсионного соотношения (2.11) при $\mathbf{B}_0 = 0$:

$$\omega_{ig3D} = \pm \sqrt{f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2}} \quad (2.13)$$

Отметим, что для инерционно-гравитационных волн в отсутствие магнитного поля (2.13) выполняется условие перпендикулярности групповой скорости волновому вектору $\mathbf{v}_{grig3D} \cdot \mathbf{k} = 0$ [125], в то время как присутствие магнитного поля (2.12) это условие нарушает.

Рассмотрим второй тип волн, удовлетворяющих дисперсионному уравнению (2.11) — трехмерные магнитострофические волны. Данный тип волн не имеет аналога в динамике нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн имеет сле-

дующий вид:

$$\omega_{mstr_{3D}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(f_V^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 f_V^2 k_z^2 k^2 - 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4}}, \quad (2.14)$$

в котором знак ”+” соответствует волне, распространяющейся в направлении \mathbf{k} , а знак ”-” – волне, распространяющейся в направлении, противоположном \mathbf{k} . Данный тип волн исчезает в отсутствие магнитного поля.

В частном случае вертикальных возмущений в системе ($\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$) дисперсионное уравнение (2.11) принимает вид:

$$\omega^4 - \omega^2 (f_V^2 - 2B_{z_0}^2 k_z^2) + B_{z_0}^4 k_z^4 = 0 \quad (2.15)$$

и имеет решение в виде двух магнитных инерционных волн, динамика которых определяется силой Лоренца и силой Кориолиса:

$$\omega_{z1} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 + f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}, \quad (2.16)$$

$$\omega_{z2} = \pm \sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 - f_V \sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \quad (2.17)$$

Знак ”+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении k_z , а знак ”-” – волнам, распространяющимся в направлении, противоположном k_z . Данный тип волн является резонансными волнами в модели мелкой воды в горизонтальном магнитном поле (). Волны с частотой ω_{z1} (2.16) представляют частный тип магнитных инерционно-гравитационных волн, распространяющихся только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение (2.16) принимает вид $\omega = \pm f_0$. Волны с частотой ω_{z2} (2.17) представляют частный тип магнитоциклотронных волн, распространяющихся только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение обращается в нуль.

В частном случае горизонтальных возмущений в системе ($\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$) дисперсионное уравнение (2.11) принимает вид:

$$\omega^4 - \omega^2 (2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) = 0 \quad (2.18)$$

и имеет решение в виде волн Альфвена, динамика которых определяется силой Лоренца

$$\omega_A = \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h, \quad (2.19)$$

и магнитоциклотронных волн, динамика которых определяется силой плавучести и силой Лоренца

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2}. \quad (2.20)$$

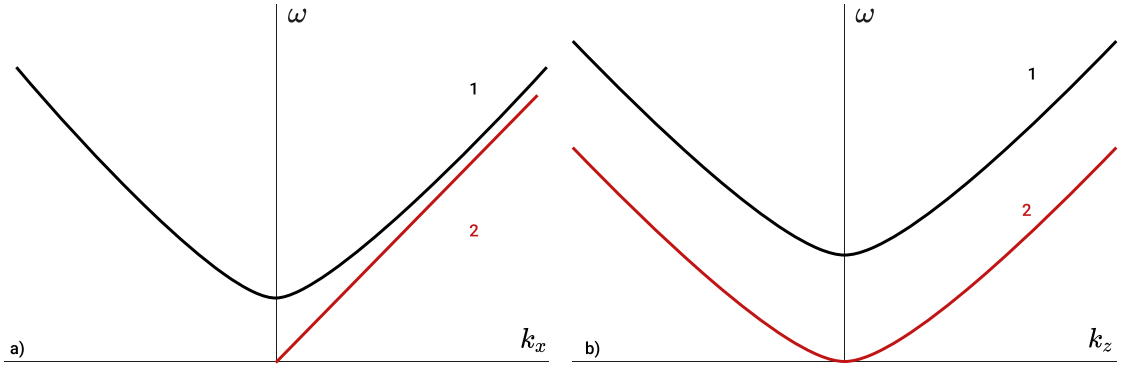


Рис. 8: Дисперсионные кривые волн на стандартной f -плоскости в приближении Буссинеска: а) 1 — магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 — волна Альфвена $\omega_A(k_x)$; б) 1 — магнитная инерционная волна $\omega_{z1}(k_z)$, 2 — магнитная инерционная волна $\omega_{z2}(k_z)$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся в направлении \mathbf{k}_h , а знак “−” — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном \mathbf{k}_h . Волны Альфвена (2.19) представляют частный тип магнитных инерционно-гравитационных волн, распространяющихся в горизонтальной плоскости. Магнитогравитационные волны (2.20) представляют частный тип магнито-строфических волн, распространяющихся горизонтальной плоскости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) их дисперсионное соотношение описывает гравитационные волны с частотой Брента-Вейсяля $\omega_{gr} = \pm\sqrt{-N^2}$.

Общий вид дисперсионных кривых для волн на f -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на 8а, при $\omega > 0$, $k = k_z$ — на 8б.

2.2.2 Магнитные инерционно-гравитационные и магнито-строфические волны в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости

Исследуем плоские течения в рамках линеаризованных уравнений (2.6-2.9) в приближении нестандартной f -плоскости. В изучении вращающихся течений на f -плоскости горизонтальной компонентой вектора силы Кориолиса обычно пренебрегают, однако рост интереса к ее роли в динамике волн на f -плоскости возрос в последнее время, в силу того, что она играет ключевую роль в экваториальных течениях, поскольку вертикальная компонента силы Кориолиса на экваторе исчезает. Если в приближении f -плоскости предполагается, что вектор \mathbf{f} направлен строго по вертикали ($\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$), то в приближении нестандартной f -плоскости будем полагать небольшое отклонение вектора \mathbf{f} от вертикали. Таким образом в параметре Кориолиса появляется горизонтальная составляющая: $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta$, а $f_H = 2\Omega \cos \theta$. Стационар (2.5) удовлетворяет системе (2.1-2.4) в приближении нестандартной f -плоскости. Решением линеаризованной системы (2.6-2.9) на нестандартной f -плоскости будет дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) = 0. \quad (2.21)$$

Решениями уравнения (2.21) являются дисперсионные соотношения, аналогичные полученным в приближении f -плоскости (2.12), (2.14), описывающие два типа волн: трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mig'_{3D}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) + \frac{1}{2k^2} \sqrt{(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (f_H k_y + f_V k_z)^2 k^2 - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4}}. \quad (2.22)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн на нестандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr'_{3D}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \right) - \frac{1}{2k^2} \sqrt{(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (f_H k_y + f_V k_z)^2 k^2 - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4}}. \quad (2.23)$$

В частном случае вертикальных возмущений в системе ($\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$) дисперсионное уравнение (2.21) принимает вид аналогичный дисперсионному уравнению на f -плоскости (2.15) и имеет решение в виде двух магнитных инерционных волн, динамика которых определяется силой Лоренца и силой Кориолиса (2.16, 2.17).

В частном случае горизонтальных возмущений в системе ($\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$) дисперсионное уравнение (2.21) принимает вид:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2 \right) + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2) = 0 \quad (2.24)$$

и имеет решение в виде двумерных магнитных инерционно-гравитационных волн

$$\omega_{mig'_{2D}} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4}}}, \quad (2.25)$$

и двумерных магнитострофических волн

$$\omega_{mstr'_{2D}} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) + \frac{N^4}{4}}}. \quad (2.26)$$

Знак "+" соответствует волнам, распространяющимся в направлении \mathbf{k}_h , а знак "-" – волнам, распространяющимся в направлении, противоположном \mathbf{k}_h . Динамика волн определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. В отличие от стандартной f -плоскости, в силу наличия горизонтальной составляющей вектора Кориолиса f_H в частном случае горизонтальных течений дина-

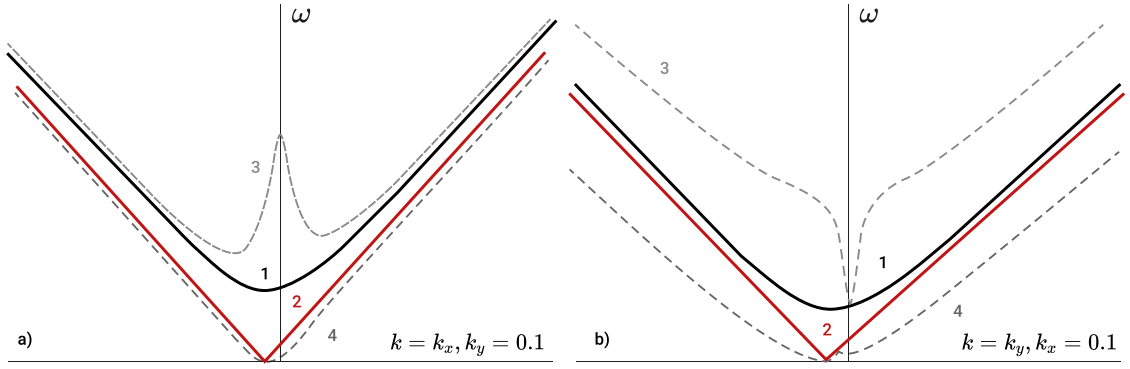


Рис. 9: Дисперсионные кривые двумерных магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн на нестандартной стандартной f -плоскости в приближении Буссинеска: а) 1 — магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig'_{2D}}(k_x, 0.1)$, 2 — магнитострофическая волна $\omega_{mstr'_{2D}}(k_x, 0.1)$, 3 — магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig'_{2D}}(k_x, 0.1)$ при $f_H \gg 1$, 4 — магнитострофическая волна $\omega_{mstr'_{2D}}(k_x, 0.1)$ при $f_H \gg 1$; б) 1 — магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig'_{2D}}(0.1, k_y)$, 2 — магнитострофическая волна $\omega_{mstr'_{2D}}(0.1, k_y)$, 3 — магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig'_{2D}}(0.1, k_y)$ при $f_H \gg 1$, 4 — магнитострофическая волна $\omega_{mstr'_{2D}}(0.1, k_y)$ при $f_H \gg 1$

мика волн остается прежней. Трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (2.12) и трехмерные магнитострофические волны (2.14) переходят в свои двумерные аналоги. В отсутствие магнитного поля дисперсионное соотношение (2.25) переходит в $\omega = \pm \sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2}$, описывающее двумерные инерционно-гравитационные волны. Двумерные магнитострофические волны не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости.

Отметим, что порядок величины горизонтальной составляющей силы Кориолиса f_H влияет на динамику волн. Найденные отличия в дисперсионных кривых, связанные с горизонтальной компонентой f_H в нестандартном приближении f -плоскости, существенно влияют на трехволновые взаимодействия. Общий вид дисперсионных кривых при $\omega(k_x) > 0$, $k_y = \text{const}$ представлен на 9а, при $\omega(k_y) > 0$, $k_x = \text{const}$ — на 9б.

2.2.3 Волны в сферических течениях стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на стандартной β -плоскости

Исследуем магнитогидродинамические течения стратифицированной вращающейся плазмы с учетом эффектов сферичности в приближении бета-плоскости. Считая, что параметр Кориолиса f слабо меняется при малых изменениях широты, разложим его в ряд:

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (2.27)$$

где Ω - угловая скорость вращения, $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$ ($f_0 \equiv f_V$), $\beta = \partial f / \partial y$. Приближение β -плоскости, в отличие от приближения f -плоскости, сохраняет первый порядок малости в разложении параметра Кориолиса.

Система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы с линейным профи-

лем плотности в приближении Буссинеска на β -плоскости имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial t} + \frac{\partial[(\mathbf{u} \cdot \nabla)u_x]}{\partial y} - f_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta u_y + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) + B_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \right) = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_y + f_0 u_x + \frac{\partial P}{\partial y} + B_z \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + B_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_z \frac{\partial P}{\partial z} + \rho' + B_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + B_y \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_x = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_y = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_z = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)_h \rho' + N^2 u_z = 0, \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.35)$$

Стационарное решение, удовлетворяющее системе (2.28-2.35), имеет вид (2.5):

$$\mathbf{q}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{B}_0, P_0, \bar{\rho})^T.$$

Система (2.28-2.35), линеаризованная на фоне стационара (2.5) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y \partial t} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \beta u_{y1} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial u_{y1}}{\partial t} + f_0 u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial y} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial u_{z1}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + \rho'_1 + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial x} + B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)u_{x1} = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)u_{y1} = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)u_{z1} = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0, \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (2.43)$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (2.36-2.43) получаем следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме

ме на бета-плоскости в приближении Буссинеска:

$$k^2\omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 [f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2] - \beta k_x \omega [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2] = 0. \quad (2.44)$$

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$(\omega^2 - N^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2) \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0 \quad (2.45)$$

и описывает три типа волн. Первый тип волн – магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на f -плоскости (2.20).

Второй тип волн – волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MR_1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}, \quad (2.46)$$

которое, в случае отсутствия магнитного поля, переходит в дисперсионное соотношение для стандартной гидродинамической волны Россби:

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_h^2}. \quad (2.47)$$

Третий тип волн – волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{MR_2} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(b_0 \cdot k)^2}, \quad (2.48)$$

которое обращается в ноль в отсутствии магнитного поля в системе.

Динамика волн магнито-Россби определяется силой Кориолиса и силой Лоренца. Оба типа волн магнито-Россби (2.46), (2.48) при распространении строго по k_y вырождаются в альфвеновские волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_0 k_y, \quad (2.49)$$

аналогичные волнам Альфвена на f -плоскости при $k = k_y$ (2.19).

Отметим, что в низкочастотном пределе уравнение (2.44) имеет решение в виде волны магнито-Россби, динамику которой определяют не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести:

$$\omega_{MR_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2)}{\beta k_x ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2)}. \quad (2.50)$$

Дисперсионное соотношение (2.50) переходит в дисперсионное соотношение для волны магнито-Россби в двумерных магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы на β -плоскости

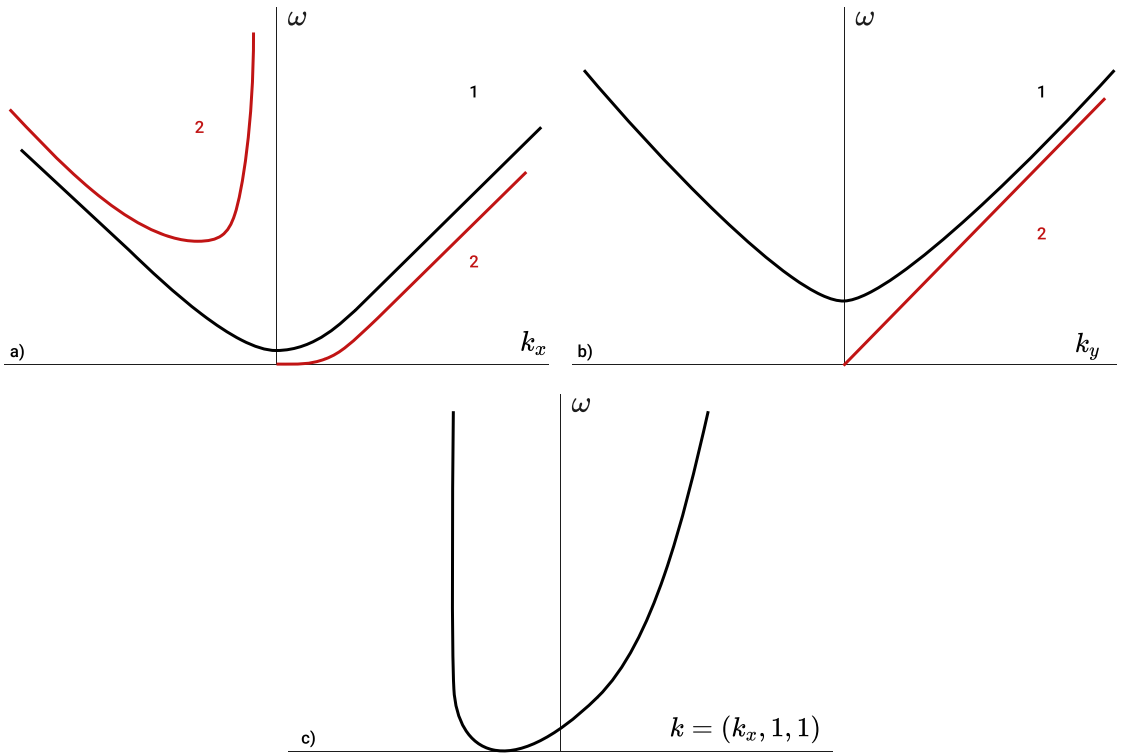


Рис. 10: Дисперсионные кривые волн на стандартной β -плоскости в приближении Буссинеска: а) 1 — магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 — волна магнито-Россби $\omega_{MR_1}(k_x)$; б) 1 — магнитогравитационная волна $\omega_{mgr}(k_y)$, 2 — волна Альфвена $\omega_{A_y}(k_y)$, 3 — низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(k_x, 1, 1)$.

при $k_z \ll k$:

$$\omega = \frac{k_h^2 (B_0 \cdot k)_h^2}{\beta k_x} \quad (2.51)$$

Общий вид дисперсионных кривых для случая $\omega > 0$ для $k = k_x$ представлен на 10а, для $k = k_y$ — на 10б. Дисперсионная кривая низкочастотной волны магнито-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ представлена на 10с.

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (2.44) к случаю гидродинамики нейтральной вращающейся жидкости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) уравнение (2.44) принимает вид:

$$\omega^3 + \beta \frac{k_x}{k^2} \omega^2 - \omega \left(f_0^2 \frac{k_z^2}{k^2} - N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \right) + N^2 \beta \frac{k_x}{k^2} = 0. \quad (2.52)$$

Заметим, что для решения в низкочастотном пределе можно получить выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска:

$$\omega_{R_{3D}} = \frac{N^2 \beta k_x}{f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2}, \quad (2.53)$$

которое переходит, при условии $k_z \ll k$, в стандартную гидродинамическую волну Россби (2.47). Динамика трехмерной волны-Россби (2.53) определяется не только силой Кориолиса, но и силой плавучести.

2.2.4 Волны в сферических течениях стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости

Исследуем сферические течения в нестандартном приближении β -плоскости. По аналогии с нестандартным приближением f -плоскости, предполагается наличие горизонтальной компоненты, которая, как и вертикальная компонента, раскладывается в ряд. Таким образом в приближении нестандартной β -плоскости параметр Кориолиса выглядит следующим образом:

$$\mathbf{f} = (0, f_H + \gamma y, f_V + \beta y), \quad (2.54)$$

где $f_V = 2\Omega \sin \theta$, $\beta = \frac{2\Omega \cos \theta}{R}$, $f_H = 2\Omega \cos \theta$, $\gamma = -\frac{2\Omega \sin \theta}{R}$.

Разложение горизонтальной составляющей компоненты силы Кориолиса добавляет слагаемые $f_H \partial_y u_z + \gamma u_z$ в уравнение x -компоненты импульса (2.28) и слагаемое $-f_H u_x$ в уравнение z -компоненты импульса (2.30) в системе магнитогидродинамических уравнений на β -плоскости. Стационар (2.5) удовлетворяет полученной системе. Линеаризованная система на нестандартной β -плоскости имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y \partial t} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \beta u_{y1} + f_H \frac{\partial u_{z1}}{\partial y} + \gamma u_{z1} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z}) = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial u_{y1}}{\partial t} + f_0 u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial y} + B_{z0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial u_{z1}}{\partial t} - f_H u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial z} + \rho'_1 + B_{x0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial x} + B_{y0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0} \frac{\partial B_{z1}}{\partial y} = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{x1} = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{y1} = 0, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{z1} = 0, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0, \quad (2.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (2.62)$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (2.55-2.62) получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме на нестандартной бета-плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} & k^2 \omega^4 + k_x \omega^3 \left[\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right] - \omega^2 [(f_V k_z + f_H k_y)^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2] - \\ & - k_x \omega \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta N^2 \right] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2] = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид:

$$\omega^4 + \omega^3 \frac{\beta k_x}{k_h^2} - \omega^2 \left[\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right] - \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2] +$$

$$+ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2] = 0. \quad (2.64)$$

При $k = k_y$ уравнение (2.64) описывает два типа волн, аналогичных волнам на нестандартной f -плоскости: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\omega_{mig_y} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2} + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2}\right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2} \quad (2.65)$$

и одномерные магнитострофические волны

$$\omega_{mstr_y} = \pm \sqrt{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2} - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2}\right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2}. \quad (2.66)$$

Важное отличие, связанное с нестандартным приближением β -плоскости, которые мы можем получить аналитически – низкочастотный предел в уравнении (2.63), который дает новое выражение для волны магнито-Россби:

$$\omega_{MR'_{3D}} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2]}{k_x [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y}\right) - \beta N^2]}. \quad (2.67)$$

Выражение (2.67), так же как и выражение (2.50) описывает волны магнито-Россби, динамика которых определяется не только силами Кориолиса и Лоренца, но и силой плавучести.

Общий вид дисперсионной кривой низкочастотной волны магнито-Россби (2.67) при $\omega > 0$, $\gamma < \beta$ изображен на 11 для $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (а), $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (б), $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (с).

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (2.63) к случаю вращающейся нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля ($\mathbf{B}_0 = 0$) уравнение (2.63) принимает вид:

$$k^2 \omega^3 + k_x \omega^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y}\right) - \omega [(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2] + N^2 \beta k_x = 0. \quad (2.68)$$

В низкочастотном пределе получаем выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости:

$$\omega = \frac{N^2 \beta k_x}{(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2}, \quad (2.69)$$

которое переходит, при условии $k_z \ll k$, в стандартную гидродинамическую волну Россби (2.47).

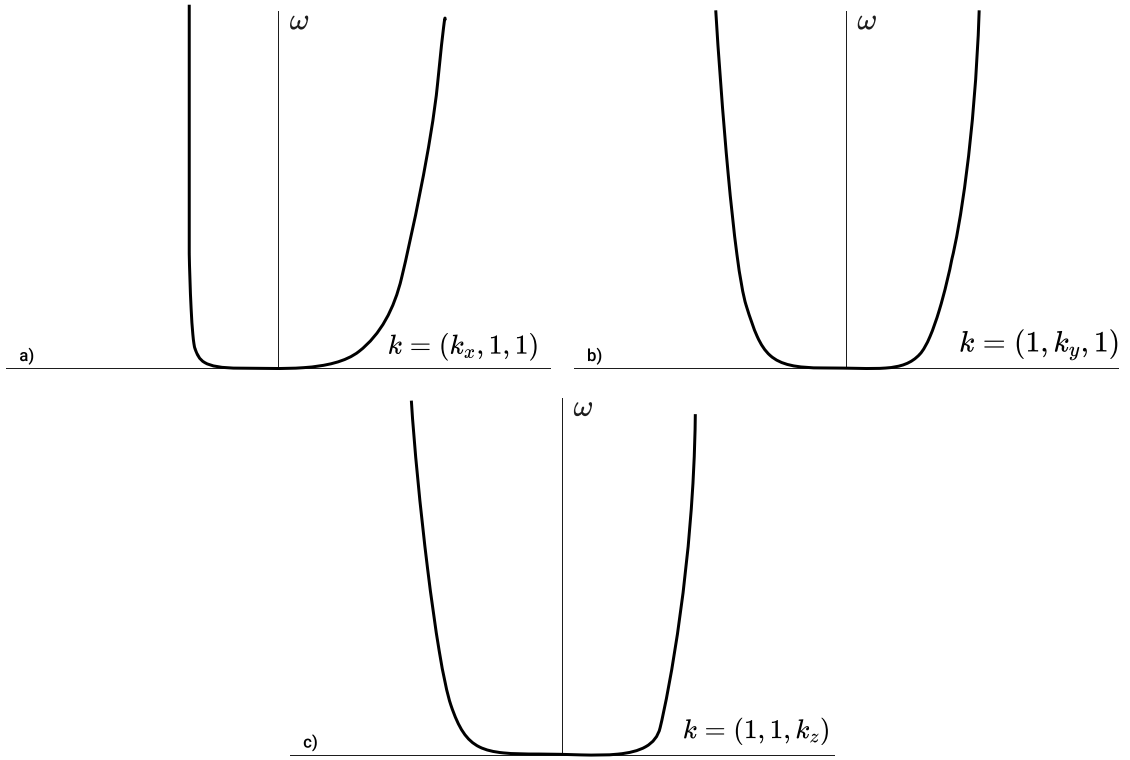


Рис. 11: Дисперсионные кривые низкочастотной волны магнито-Россби на нестандартной β -плоскости в приближении Буссинеска: а) волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}(k_x, 1, 1)$, б) волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}(1, k_y, 1)$; в) волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}(1, 1, k_z)$.

2.3 Резонансные явления волн во вращающихся течениях плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска

2.3.1 Условия синхронизма

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в приближении Буссинеска для каждого случая представления силы Кориолиса. Для того, чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для найденных волн, проанализируем найденные дисперсионные соотношения. Чтобы определить, существуют ли такие три волны, удовлетворяющие условию синхронизма (1.125), необходимо изобразить две дисперсионные кривые, смещенные друг относительно друга, для каждого случая. Если при смещении относительно начала координат одной из дисперсионных кривых она пересечет другую в некоторой точке, то это будет означать выполнение условия синхронизма [126].

Ниже будем исследовать трехволновые взаимодействия волн на f -плоскости. Проверим, существует ли трехволновое взаимодействие между двумя магнитогравитационными волнами (2.20) и волной Альфвена (2.19). Для этого изобразим дисперсионную кривую для магнитогравитационной волны (2.20) и смещенную относительно начала координат дисперсионную кривую для волны Альфвена (2.19). Если две дисперсионные кривые пересекаются в некоторой точке $(\omega(k_3), k_3)$, то это означает выполнение условия синхронизма (1.125). На 12а показано пересечение дисперсионных кривых двух магнитогравитационных волн (2.20) и одной волны Альфвена (2.19). На 12б

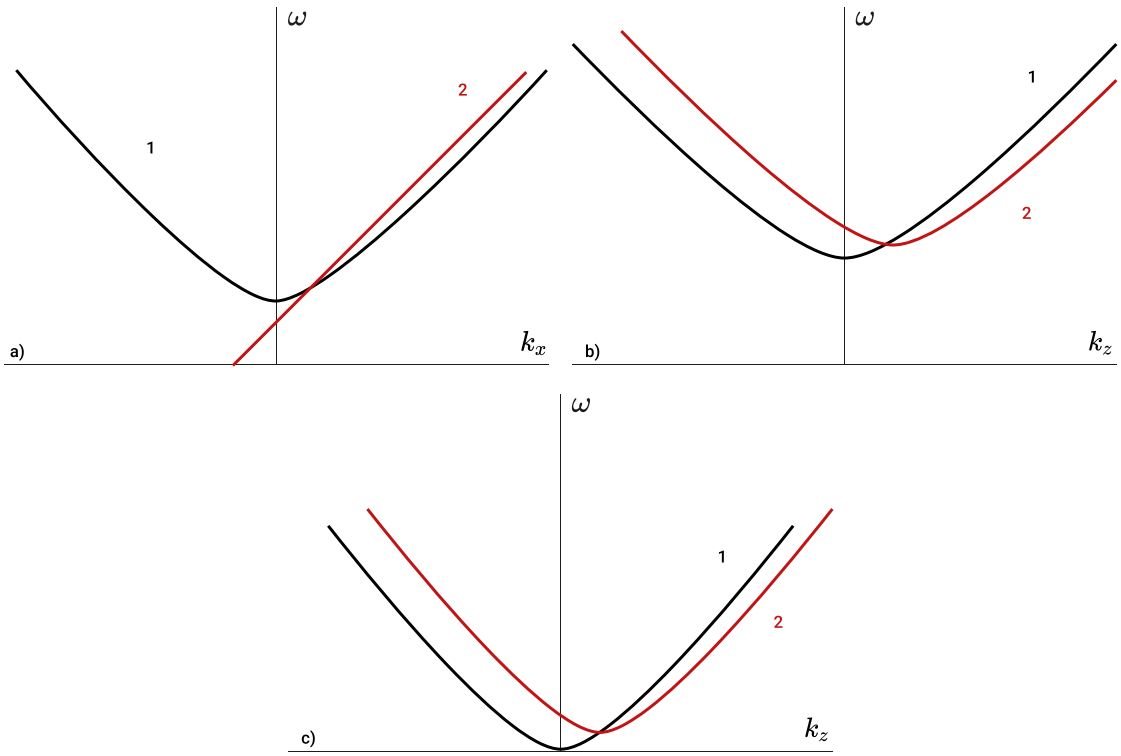


Рис. 12: Условие синхронизма для трех волн на стандартной f -плоскости: а) две магнитогравитационные волны и волна Альфвена: 1 — $\omega_{mgr}(k_x)$, 2 — $\omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$; б) три магнитные инерционные волны: 1 — $\omega_{z1}(k_z)$, 2 — $\omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z1}(k_{zc})$; в) три магнитные инерционные волны: 1 — $\omega = \omega_{z2}(k_z)$, 2 — $\omega = \omega_{z2}(k_z - k_{zc}) + \omega_{z2}(k_{zc})$.

показано пересечение дисперсионных кривых двух магнитных инерционных волн с частотами ω_{z1} (2.16) и одной магнитной инерционной волны с частотой ω_{z2} , а на 12с — трех волн с частотами ω_{z2} (2.17). Таким образом качественный анализ дисперсионных кривых волн на стандартной f -плоскости показывает возможность существования следующих трехволновых взаимодействий: две магнитогравитационные волны взаимодействуют с волной Альфвена; две магнитные инерционные волны с частотой ω_{z1} (2.16) взаимодействуют с магнитной инерционной волной с частотой ω_{z2} (2.17); три магнитные инерционные волны с частотой ω_{z2} (2.17) взаимодействуют между собой.

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости. Поскольку для нестандартной f -плоскости в частном случае только вертикальных возмущений получены решения, аналогичные решениям на стандартной f -плоскости, то для них будут существовать аналогичные трехволновые взаимодействия, а именно: взаимодействие двух магнитных инерционных волн с частотой ω_{z1} (2.16) и магнитной инерционной волны с частотой ω_{z2} (2.17), взаимодействие трех магнитных инерционных волн с частотой ω_{z2} (2.17). Перейдем далее к анализу дисперсионных кривых для волн в плоскости (k_x, k_y) . При малой горизонтальной составляющей силы Кориолиса f_H существует один тип трехволновых взаимодействий — возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны (2.25) при взаимодействии двух магнито-строфических волн с частотой (2.26). Существование данного типа трехволновых взаимодействий отображено на 13а при $k = k_x$

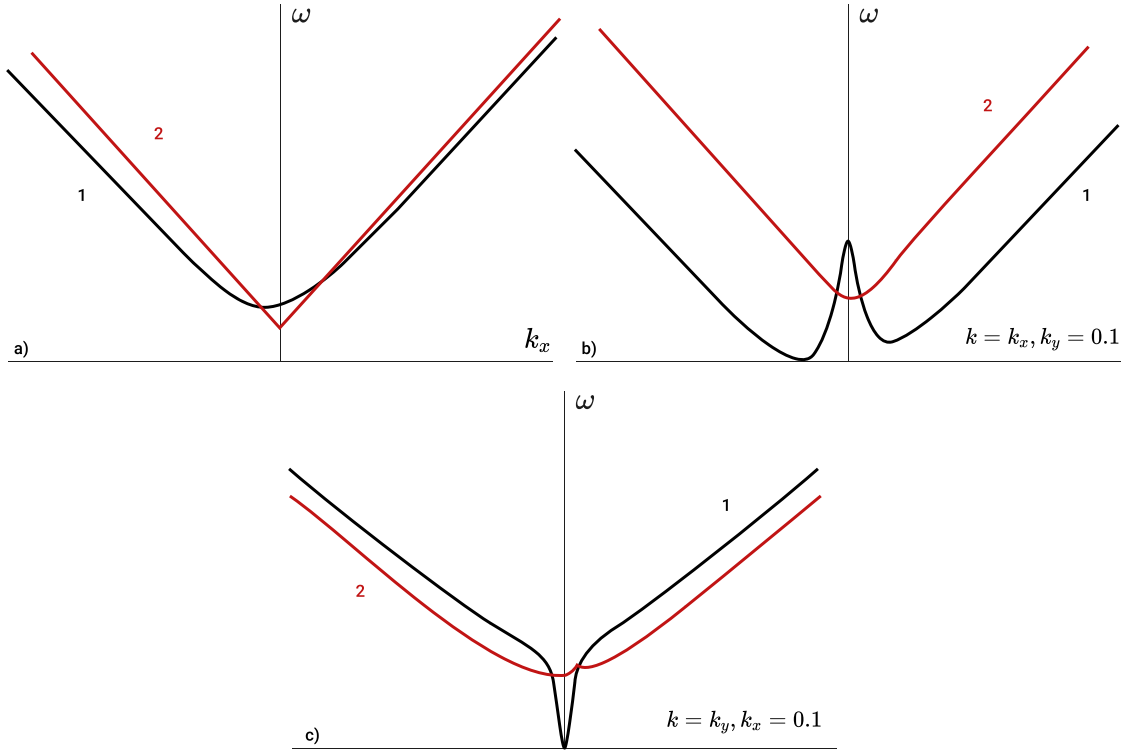


Рис. 13: Условие синхронизма для трех волн на нестандартной f -плоскости: а) две магнито-строфические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна: $1 - \omega = \omega_{mig'_{2D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr'_{2D}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr'_{2D}}(k_{xc})$; б) две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнито-строфическая волна при $f_H \gg 1$: $1 - \omega = \omega_{mig'_{2D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr'_{2D}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig'_{2D}}(k_{xc})$; в) две магнитные инерционно-гравитационные волны и магнито-строфическая волна при $f_H \gg 1$: $1 - \omega = \omega_{mig'_{2D}}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{mstr'_{2D}}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mig'_{2D}}(k_{yc})$.

(аналогичный вид будет иметь условие синхронизма при $k = k_y$). Однако, при достаточно большом f_H вид дисперсионных кривых сильно изменяется, что допускает возникновение еще одного типа трехволновых взаимодействий, помимо найденного выше – возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны (2.25) при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны (2.25) и магнито-строфической волны (2.26). Выполнение условия синхронизма для этих трех взаимодействующих волн показано на 13b для $k = k_x, k_y = \text{const}$ и на 13c для $k = k_y, k_x = \text{const}$.

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на β -плоскости. Качественный анализ дисперсионных соотношений для волн в частном случае горизонтальных течений показывает наличие следующих трехволновых взаимодействий: три волны магнито-Россби (2.46) взаимодействуют между собой (14a), две магнито-гравитационные волны (2.20) взаимодействуют с волной магнито-Россби (2.46) (14b); две волны магнито-Россби (2.46) взаимодействуют с магнито-гравитационной волной (2.20) (14c). В низкочастотном пределе реализуется взаимодействие трех волн магнито-Россби с частотами (2.50) при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (14d). Для волн вдоль k_y аналогично волнам на f -плоскости, реализуется взаимодействие двух магнито-гравитационных волн с частотами (2.20) и одной волны Альфвена (2.49).

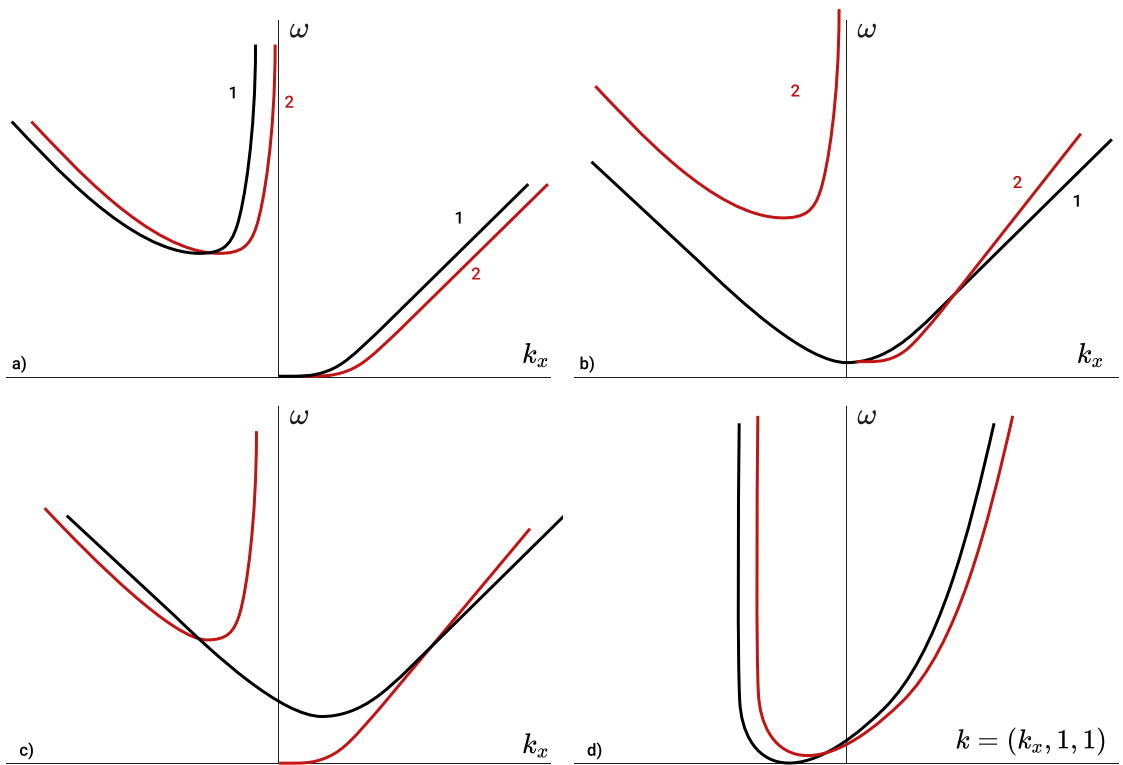


Рис. 14: Условие синхронизма для трех волн на стандартной β -плоскости: а) три волны магнито-Россби: $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; б) две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби: $1 - \omega = \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mgr}(k_{x_c})$; в) две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна: $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mgr}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; д) три низкочастотные волны магнито-Россби: $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_{3D}}(k_{x_c})$.

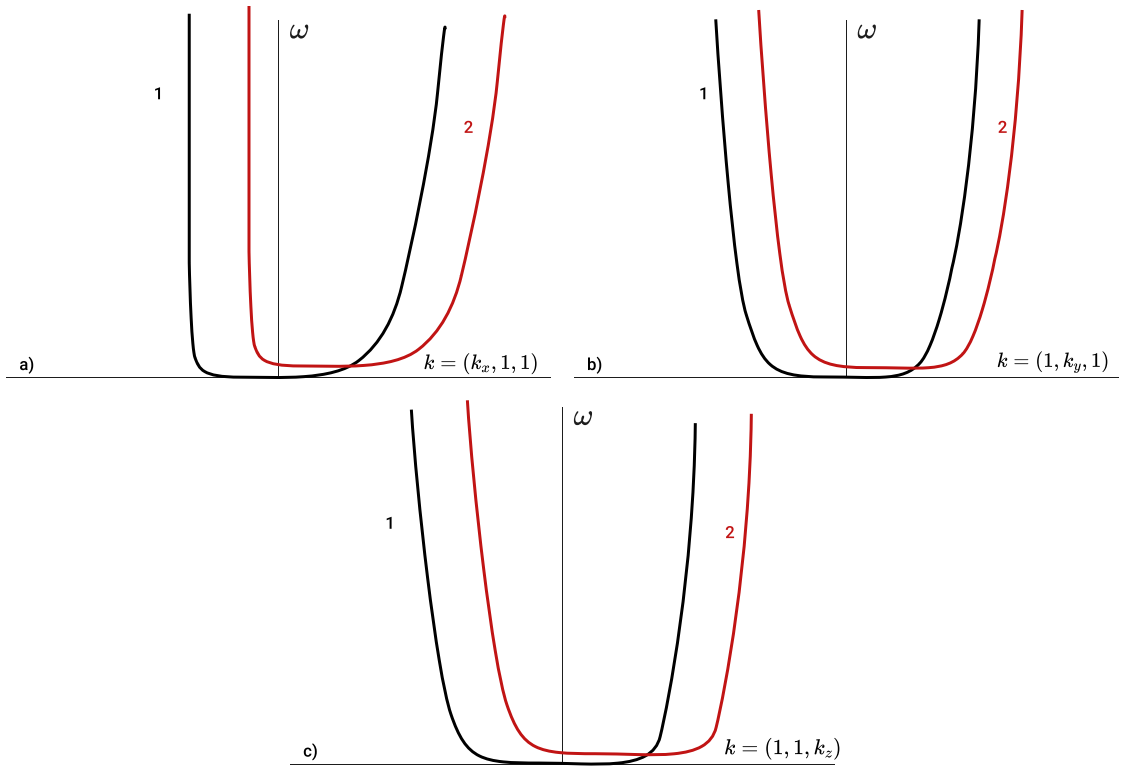


Рис. 15: Условие синхронизма для трех низкочастотных волн магнито-Росби на нестандартной β -плоскости: а) $1 - \omega = \omega_{MR'_{3D}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR'_{3D}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR'_{3D}}(k_{x_c})$; б) $1 - \omega = \omega_{MR'_{3D}}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{MR'_{3D}}(k_y - k_{y_c}) + \omega_{MR'_{3D}}(k_{y_c})$; в) $1 - \omega = \omega_{MR'_{3D}}(k_z)$, $2 - \omega = \omega_{MR'_{3D}}(k_z - k_{z_c}) + \omega_{MR'_{3D}}(k_{z_c})$.

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости. Для волн, распространяющихся вдоль k_y реализуются взаимодействие двух магнито-Росби волн (2.66) и одной магнитной инерционно-гравитационной волны (2.65) при малом f_H и взаимодействие двух магнитных инерционно-гравитационных волн (2.65) и одной магнито-Росби волны (2.66) при большом f_H . В низкочастотном пределе реализуется взаимодействие трех волн магнито-Росби с частотами (2.67), что показано на 15а при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$, на 15б при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ и на 15в при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$.

2.3.2 Коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях

Для анализа слабонелинейных взаимодействий используем, как и в модели мелкой воды, асимптотический метод многомасштабных разложений для системы трехмерных магнитогидродинамических уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска (2.1-2.4). Как было сказано ранее, данный метод широко используется для исследования слабонелинейных взаимодействий, система амплитудных уравнений имеет общий вид (1.142, 1.146, 1.150):

$$\begin{aligned} s_1 \phi &= f_1 \psi^* \chi, \\ s_2 \psi &= f_2 \phi^* \chi, \\ s_3 \chi &= f_3 \phi \psi, \end{aligned}$$

а существенные отличия между полученными амплитудными уравнениями для взаимодействующих волн содержатся в дифференциальных операторах и коэффициентах, зависящих от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Приведем их ниже для каждого приближения силы Кориолиса.

Выпишем полученные в работе выражения для дифференциальных операторов и коэффициентов взаимодействия волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на f -плоскости. Коэффициент t_j при производной по "медленному" времени имеет вид:

$$t_j = \sum_{i=1}^3 z_i a_i + z_4 a_8 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-1}. \quad (2.70)$$

Коэффициент p_j при производной по "медленной" координате X_1 имеет вид:

$$p_j = z_1(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) - B_{x0} \left(\sum_{i=2}^3 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_1. \quad (2.71)$$

Коэффициент q_j при производной по "медленной" координате Y_1 имеет вид:

$$q_j = z_2(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) - B_{y0} \left(\sum_{i=1}^2 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_2. \quad (2.72)$$

Коэффициент w_j при производной по "медленной" координате Z_1 имеет вид:

$$w_j = z_3(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{y0}a_5) + \rho_0 z_4 a_3 - B_{z0} \left(\sum_{i=1}^2 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_3. \quad (2.73)$$

Коэффициенты f_j , зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн, представим в виде:

$$f_j = \sum_{s=1}^7 z_s \varkappa_{sj}. \quad (2.74)$$

Выражение (2.74) содержит семь слагаемых вместо восьми, поскольку $\varkappa_8 = 0$. Слагаемые в сумме (2.74) для волн на f -плоскости имеют вид:

$$\begin{aligned} \varkappa_{1j} = & \left[-ik_{xn}(a_{1_{lm}}^2 + a_{5_{lm}}^2 + a_{6_{lm}}^2) + i\gamma k_{ym}(a_{2_{kl}} a'_{1_{km}} - a_{5_{kl}} a'_{4_{km}}) + ik_{yl}(a'_{5_{km}} a_{4_{kl}} - a'_{2_{km}} a_{1_{kl}}) + \right. \\ & \left. + i\gamma k_{zm}(a_{3_{kl}} a'_{1_{km}} - a_{6_{kl}} a'_{4_{km}}) + ik_{zl}(a'_{6_{km}} a_{4_{kl}} - a'_{3_{km}} a_{1_{kl}}) \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{2j} = & \left[i\gamma k_{xm}(a_{1_{kl}} a'_{2_{km}} - a_{4_{kl}} a'_{5_{km}}) + ik_{xl}(a'_{4_{km}} a_{5_{kl}} - a'_{1_{km}} a_{2_{kl}}) - ik_{yn}(a_{2_{lm}}^2 + a_{4_{lm}}^2 + a_{6_{lm}}^2) + \right. \\ & \left. + i\gamma k_{zm}(a_{3_{kl}} a'_{2_{km}} - a_{6_{kl}} a'_{5_{km}}) + ik_{zl}(a'_{6_{km}} a_{5_{kl}} - a'_{3_{km}} a_{2_{kl}}) \right], \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{3j} = & \left[i\gamma k_{xm}(a_{1_{kl}} a'_{3_{km}} - a_{4_{kl}} a'_{6_{km}}) + ik_{xl}(a'_{k_{m}} a_{6_{kl}} - a'_{1_{km}} a_{3_{kl}}) + i\gamma k_{ym}(a_{2_{kl}} a'_{3_{km}} - a_{5_{kl}} a'_{6_{km}}) + \right. \\ & \left. + ik_{yl}(a'_{5_{km}} a_{6_{kl}} - a'_{2_{km}} a_{3_{kl}}) - ik_{zn}(a_{3_{lm}}^2 + a_{4_{lm}}^2 + a_{5_{lm}}^2) \right] \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\varkappa_{4j} = \left[i\gamma a'_{8_{km}} (k_{xm} a_{1_{k_l}} + k_{ym} a_{2_{k_l}} + k_{zm} a_{3_{k_l}}) - i a_{8_{k_l}} (k_{xl} a'_{1_{km}} + k_{yl} a'_{2_{km}} + k_{zl} a'_{3_{km}}) \right], \quad (2.78)$$

$$\varkappa_{5j} = \left[i(\gamma k_{xm} + k_{xl}) \hat{a}_{14_{lm}} + i\gamma k_{ym} (a_{2_{k_l}} a'_{4_{km}} - a_{5_{k_l}} a'_{1_{km}}) + i k_{yl} (a'_{5_{km}} a_{1_{k_l}} - a'_{2_{km}} a_{4_{k_l}}) \right], \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{6j} = & \left[i\gamma k_{xm} (a_{1_{k_l}} a'_{5_{km}} - a_{4_{k_l}} a'_{2_{km}}) + i k_{xl} (a'_{4_{km}} a_{2_{k_l}} - a'_{1_{km}} a_{5_{k_l}}) + i(\gamma k_{ym} + k_{yl}) \hat{a}_{25_{lm}} + \right. \\ & \left. + i\gamma k_{zm} (a_{3_{k_l}} a'_{5_{km}} - a_{6_{k_l}} a'_{2_{km}}) + i k_{zl} (a'_{6_{km}} a_{2_{k_l}} - a'_{3_{km}} a_{5_{k_l}}) \right], \quad (2.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{7j} = & \left[i\gamma k_{xm} (a_{1_{k_l}} a'_{6_{km}} - a_{4_{k_l}} a'_{3_{km}}) + i k_{xl} (a'_{4_{km}} a_{3_{k_l}} - a'_{1_{km}} a_{6_{k_l}}) + \gamma k_{ym} (a_{2_{k_l}} a'_{6_{km}} - a_{5_{k_l}} a'_{3_{km}}) + \right. \\ & \left. + i k_{yl} (a'_{5_{km}} a_{3_{k_l}} - a'_{2_{km}} a_{6_{k_l}}) + i(\gamma k_{zm} + k_{zl}) \hat{a}_{36_{lm}} \right]. \quad (2.81) \end{aligned}$$

В выражениях (2.75-2.81) использованы следующие обозначения:

$$a_{ii_{lm}}^2 = a_{i_{k_l}} a'_{i_{km}}, \quad a_{i,ii_{lm}} = a_{i_{k_l}} a'_{ii_{km}} + a_{ii_{k_l}} a'_{i_{km}}, \quad \hat{a}_{i,ii_{lm}} = a_{i_{k_l}} a'_{ii_{km}} - a_{ii_{k_l}} a'_{i_{km}}.$$

Индексы в коэффициентах f_j связаны следующим образом: когда индекс $j = 1$, то индекс $l = 3$, индекс $m = 2$, индекс $n = 1$, $\gamma = 1$, $' \rightarrow *$; когда индекс $j = 2$, то индекс $l = 3$, индекс $m = 1$, индекс $n = 2$, $\gamma = 1$, $' \rightarrow *$; когда индекс $j = 3$, то индекс $l = 1$, индекс $m = 2$, индекс $n = 3$, $\gamma = -1$, $'$ снимается.

В приближении f -плоскости при $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ взаимодействуют две магнитогравиационные волны и волна Альфвена. В таком случае, индекс $j = 1$ соответствует волне Альфвена, а индексы $j = 2, j = 3$ – магнитогравиационным волнам. При $\mathbf{k} = k_z$ взаимодействуют либо две магнитные инерционные волны с частотой ω_{z1} и одна магнитная инерционная волна с частотой ω_{z2} , либо три магнитные инерционные волны с частотами ω_{z2} . В первом случае индекс $j = 1$ соответствует магнитной инерционной волне с частотой ω_{z2} , а индексы $j = 2, j = 3$ соответствуют магнитным инерционным волнам с частотой ω_{z1} . Во втором случае индексы $j = 1, j = 2, j = 3$ соответствуют волнам с частотой ω_{z2} .

Отметим, что коэффициенты t'_j, p'_j, q'_j, w'_j и f'_j в полученной системе на амплитуды взаимодействующих волн на нестандартной f -плоскости имеют такой же вид, что и коэффициенты t_j (2.70), p_j (2.71), q_j (2.72), w_j (2.73) и f_j (2.74) на стандартной f -плоскости и отличаются только собственным вектором \mathbf{z} линейного оператора системы (2.6-2.9). Таким образом, в нестандартном приближении f -плоскости возникает магнитная инерционно-гравитационная волна при взаимодействии двух магнитострофических волн. Кроме того, может возникать магнитная инерционно-гравитационная волна при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны и магнитострофической волны при большом f_H . В первом случае индекс $j = 1$ соответствует магнитной инерционно-гравитационной волне, а индексы $j = 2, j = 3$ соответствуют магнитострофическим волнам. Во втором случае индексы $j = 1, j = 2$ соответствуют магнитным инерционно-гравитационным волнам, а индекс $j = 3$ соответствует магнитострофической волне.

Перейдем к рассмотрению сферических течений. Выпишем полученные в работе выражения для дифференциальных операторов и коэффициентов взаимодействия волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на β -плоскости.

Коэффициент \tilde{t}_j при производной по "медленному" времени имеет вид:

$$\tilde{t}_j = -iz_1 k_{yj} a_1 + \sum_{i=2}^3 z_i a_i + z_4 a_8 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-1}. \quad (2.82)$$

Коэффициент \tilde{p}_j при производной по "медленной" координате X_1 имеет вид:

$$\tilde{p}_j = -iz_1 k_{yj} (a_7 + B_{y0} a_5 + B_{z0} a_6) - B_{x0} \left(\sum_{i=2}^3 z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_1. \quad (2.83)$$

Коэффициент \tilde{q}_j при производной по "медленной" координате Y_1 имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j = & z_1 [i\omega a_1 - f_0 a_2 - ik_{xj} (a_7 + B_{y0} a_5 + B_{z0} a_6) + (2ik_{yj} B_{y0} + ik_{zj} B_{z0}) a_4] + \\ & + z_2 (a_7 + B_{x0} a_4 + B_{z0} a_6) - B_{y0} \left(z_3 a_6 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Коэффициент \tilde{w}_j при производной по "медленной" координате Z_1 имеет вид:

$$\tilde{w}_j = z_3 (a_7 + B_{x0} a_4 + B_{y0} a_5) + \rho_0 z_4 a_3 - B_{z0} \left(ik_{yj} z_1 a_4 + z_2 a_5 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_3. \quad (2.85)$$

Коэффициенты \tilde{f}_j анаогично коэффициентам f_j (2.74) представимы в виде суммы:

$$\tilde{f}_j = \sum_{s=1}^7 z_s \tilde{\chi}_{sj}. \quad (2.86)$$

Первое слагаемое в сумме (2.86) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{1j} = & \gamma (k_{yl} k_{xm} + k_{ym} k_{xl}) (a_{1lm}^2 + a_{5lm}^2 + a_{6lm}^2) + \gamma k_{ym} k_{yl} (a_{21lm} - a_{54lm}) + \\ & + \gamma k_{ym} k_{zl} (a'_{3km} a_{1kl} - a'_{6km} a_{4kl}) + \gamma k_{yl} k_{zm} (a_{3kl} a'_{1km} - a_{6kl} a'_{4km}). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Остальные слагаемые в сумме (2.86) имеют тот же вид, что слагаемые в сумме (2.74) и отличаются только собственным вектором \mathbf{z} линейного оператора системы (2.36-2.43).

На β -плоскости для волн в приближении горизонтальных течений существует три типа трехволновых взаимодействий. Первый тип определяет возникновение магнитогравитационной волны (2.20) при взаимодействии волны магнито-Россби (??) и магнитогравитационной волны (2.20). В таком случае индекс $j = 1$ соответствует волне магнито-Россби, а индексы $j = 2, j = 3$ соответствуют магнитогравитационным волнам. Второй тип описывает возникновение волны магнито-Россби при взаимодействии магнитогравитационной волны и волны магнито-Россби. В таком случае индекс $j = 1$ соответствует магнитогравитационной волне, а индексы $j = 2, j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби. Третий тип определяет взаимодействие трех волн магнито-Россби. В таком случае индексы $j = 1, j = 2, j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби. Кроме того, при

$\mathbf{k} = k_y$ взаимодействуют волна Альфвена (2.49) и две магнитогравитационные волны (2.20). При этом индекс $j = 1$ соответствует волне Альфвена, а индексы $j = 2, j = 3$ соответствуют магнито-гравитационным волнам. В низкочастотном пределе взаимодействуют три волны магнито-Россби (2.50). В таком случае индексы $j = 1, j = 2, j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби.

Перейдем к коэффициентам в амплитудных уравнениях (??) на нестандартной β -плоскости. Отметим, что коэффициенты $\tilde{t}'_j, \tilde{p}'_j$ и \tilde{w}'_j в приближении нестандартной β -плоскости имеют тот же вид, что и коэффициенты на стандартной β -плоскости и отличаются только собственным вектором \mathbf{z} линейного оператора системы (2.55-2.62). Коэффициент \tilde{q}'_j имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_j = & z_1 [i\omega a_1 - f_V a_2 + f_H a_3 - ik_{xj}(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) + (2ik_{yj}B_{y0} + ik_{zj}B_{z0})a_4] + \\ & + z_2(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{z0}a_6) - B_{y0} \left(z_3 a_6 + \sum_{i=5}^7 z_i a_{i-4} \right) + z_8 a_2. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Коэффициенты \tilde{f}'_j на нестандартной β -плоскости имеют тот же вид, что и коэффициенты \tilde{f}_j на стандартной β -плоскости и отличаются только собственным вектором \mathbf{z} линейного оператора системы (2.55-2.62). Таким образом, в нестандартном приближении β -плоскости при $k = k_y$ возникает магнитная инерционно-гравитационная волна (2.65) при взаимодействии двух магнито-строфических волн (2.66). Кроме того, может возникать магнитная инерционно-гравитационная волна при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны и магнито-строфической волны при большом f_H . В первом случае индекс $j = 1$ соответствует магнитной инерционно-гравитационной волне, а индексы $j = 2, j = 3$ соответствуют магнито-строфическим волнам. Во втором случае индексы $j = 1, j = 2$ соответствуют магнитным инерционно-гравитационным волнам, а индекс $j = 3$ соответствует магнито-строфической волне. В низкочастотном пределе реализуется трехволновое взаимодействие волн магнито-Россби (2.67) и индексы $j = 1, j = 2, j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби.

2.3.3 Неустойчивости типа распад и усиление

Система уравнений (1.142, 1.146, 1.150) имеет общий вид и описывает параметрические неустойчивости типа распад и усиление. В случае когда амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других ($\phi \gg \psi, \chi, \phi = \phi_0$) имеет место неустойчивость типа распад, когда волна с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ распадается на две волны с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ и с инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|f_2 f_3|/|t_2 t_3|} |\phi_0| > 0$. В случае когда амплитуда одной из волн много меньше амплитуд двух других ($\phi \ll \psi, \chi, \psi = \psi_0, \chi = \chi_0$) имеет место неустойчивость типа усиление, когда волна с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ усиливается двумя волнами с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ и с инкрементом неустойчивости $\Gamma = (|f_1|/|t_1|) |\psi_0 \chi_0| > 0$. Несмотря на общий вид инкрементов неустойчивости, они различны для каждого приближения силы Кориолиса и каждого типа трехволновых взаимодействий.

В приближении Буссинеска на стандартной f -плоскости получены следующие неустойчивости: распад магнито-гравитационной волны $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_1)$ на волну Альфвена $\omega_A(\mathbf{k}_2)$ и магнито-гравитационную волну $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$; распад магнитной инерционной волны с частотой $\omega_{z1}(\mathbf{k}_1)$ на магнитную инерционную волну с частотой $\omega_{z2}(\mathbf{k}_2)$ и магнитную инерционную волну с частотой $\omega_{z1}(\mathbf{k}_3)$; рас-

пад магнитной инерционной волны с частотой $\omega_{z2}(\mathbf{k}_1)$ на две магнитные инерционные волны с частотами $\omega_{z2}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{z2}(\mathbf{k}_3)$; усиление магнитогравитационной волны $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_1)$ волной Альфвена $\omega_A(\mathbf{k}_2)$ и магнитогравитационной волной $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$; усиление магнитной инерционной волны с частотой $\omega_{z1}(\mathbf{k}_1)$ магнитной инерционной волной с частотой $\omega_{z2}(\mathbf{k}_2)$ и магнитной инерционной волной с частотой $\omega_{z1}(\mathbf{k}_3)$; усиление магнитной инерционной волны с частотой $\omega_{z2}(\mathbf{k}_1)$ двумя магнитными инерционными волнами с частотами $\omega_{z2}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{z2}(\mathbf{k}_3)$.

В приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости получены следующие неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig'_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ на две магнитострофические волны $\omega_{mstr'_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{mstr'_{3D}}(\mathbf{k}_3)$; распад магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig'_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ на магнитную инерционно-гравитационную волну $\omega_{mig'_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и магнитострофическую волну $\omega_{mstr'_{3D}}(\mathbf{k}_3)$; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig'_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ двумя магнитострофическими волнами $\omega_{mstr'_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{mstr'_{3D}}(\mathbf{k}_3)$; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig'_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ магнитной инерционно-гравитационной волной $\omega_{mig'_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и магнитострофической волной $\omega_{mstr'_{3D}}(\mathbf{k}_3)$.

В приближении Буссинеска на стандартной β -плоскости получены следующие неустойчивости: распад волны Альфвена $\omega_{A_y}(k_{y1})$ на две магнитогравитационные волны $\omega_{mgr}(k_{y2})$ и $\omega_{mgr}(k_{y3})$; распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h1})$ на две магнитогравитационные волны $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_{h2})$ и $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_{h3})$; распад магнитогравитационной волны $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_{h1})$ на две волны магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h2})$ и $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h3})$; распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h1})$ на две волны магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h2})$ и $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h3})$; распад волны магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ на две волны магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_3)$; усиление волны Альфвена $\omega_{A_y}(k_{y1})$ двумя магнитогравитационными волнами $\omega_{mgr}(k_{y2})$ и $\omega_{mgr}(k_{y3})$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{mr}(k_{x1})$ двумя магнитогравитационными волнами $\omega_{mgr}(k_{x2})$ и $\omega_{mgr}(k_{x3})$; усиление магнитогравитационной волны $\omega_{mgr}(\mathbf{k}_{h1})$ двумя волнами магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h2})$ и $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h3})$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h1})$ двумя волнами магнито-Россби $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h2})$ и $\omega_{MR_1}(\mathbf{k}_{h3})$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_3)$.

В приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости получены следующие неустойчивости: распад магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig_y}(k_{y1})$ на две магнитострофические волны $\omega_{mstr_y}(k_{y2})$ и $\omega_{mstr_y}(k_{y3})$; распад магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig_y}(k_{y1})$ на магнитную инерционно-гравитационную волну $\omega_{mig_y}(k_{y2})$ и магнитострофическую волну $\omega_{mstr_y}(k_{y3})$; распад волны магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ на две волны магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_3)$; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig_y}(k_{y1})$ двумя магнитострофическими волнами $\omega_{mstr_y}(k_{y2})$ и $\omega_{mstr_y}(k_{y3})$; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны $\omega_{mig_y}(k_{y1})$ магнитной инерционно-гравитационной волной $\omega_{mig_y}(k_{y2})$ и магнитострофической волной $\omega_{mstr_y}(k_{y3})$; усиление волны магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами магнито-Россби $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_3)$.

2.4 Выводы

В главе исследованы магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска (в устойчиво стратифицированном слое

с линейным профилем плотности). Получены дисперсионные соотношения для линейных магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитоострофических волн в приближении Буссинеска на f -плоскости, дисперсионные соотношения для линейных магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитоострофических волн в приближении Буссинеска на нестандартной f -плоскости, дисперсионные соотношения для горизонтальных магнитогравитационных волн и волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на β -плоскости и дисперсионные соотношения для горизонтальных магнитогравитационных волн и волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости. Проведен качественный анализ дисперсионных кривых и описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, удовлетворяющие условию синхронизма. Методом многомасштабных разложений выведены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и получены инкременты двух возможных в данной системе неустойчивостей: распад и усиление.

Глава 3. Магнитогидродинамическая теория волновых процессов в сжимаемых течениях вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в неупругом приближении

3.1 Введение

В предыдущей главе исследованы магнитогидродинамические течения несжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в приближении Буссинеска. Отметим, что приближение Буссинеска работает, когда градиент плотности пропорционален только градиенту температуры, и описывает несжимаемые стратифицированные течения. Свойство сжимаемости является важным принципиальным отличием реальных течений астрофизической плазмы и характеризует большинство наблюдаемых объектов во Вселенной.

Данная глава посвящена теоретическому исследованию волновых процессов во вращающейся сжимаемой астрофизической плазме с линейным профилем энтропии [88, 113, 124]. Отметим важные для дальнейшего понимания работы [89, 112]. В работе [89] выполнен вывод уравнений для нейтрального газа в неупругом приближении с введением «reduced pressure», наиболее адекватный для астрофизических задач. Метод, предложенный в работе [89], применен в [112] для магнитогидродинамических течений без вращения. Основываясь на данной методике вывода уравнений в настоящей работе выведены магнитогидродинамические уравнения вращающейся стратифицированной плазмы с линейным профилем энтропии в поле силы тяжести в неупругом приближении. Сила Кориолиса учтена в уравнениях в четырех различных приближениях: стандартная и нестандартная f -плоскость, стандартная и нестандартная β -плоскости. Новые дисперсионные соотношения, полученные в неупругом приближении, описывают различные типы волн, восстанавливаемыми механизмами которых являются магнитное поле, вращение, гравитация и сжимаемость. Дисперсионные кривые найденных волн проанализированы на удовлетво-

рение условию синхронизма для трех волн [74]. Для выявленных взаимодействий получены амплитудные уравнения и инкременты неустойчивостей типа распад и усиление [74]. В главе получены магнитогидродинамические уравнения сжимаемой вращающейся плазмы в неупругом приближении для четырех приближений силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости и приближение нестандартной β -плоскости. Получены законы дисперсии различных типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн и волн магнито-Россби, динамика которых определяется сжимаемостью, вращением и магнитным полем. Проведен качественный анализ дисперсионных кривых для выявления трехволновых взаимодействий. Методом многомасштабных разложений получены коэффициенты амплитудных уравнений и найдены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

3.2 Магнитогидродинамические уравнения вращающейся сжимаемой стратифицированной плазмы в неупругом приближении

Получим уравнения магнитной гидродинамики сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении. Неупругое приближение является одним из приближений, используемых при исследовании течений с малым числом Маха, в котором характерный временной масштаб изучаемых течений астрофизической плазмы значительно превышает время распространения акустических волн. В неупругом приближении для стратифицированной плазмы элемент жидкости при движении по вертикали меняет свой объем вследствие изменения давления окружающей среды. Таким образом неупругое приближение учитывает эффекты сжимаемости во вращающейся астрофизической плазме. Кроме того, в неупругом приближении возмущение плотности полагается малым, что отличает его от псевдонесжимаемого приближения. В силу разрозненности учета различных физических эффектов в системе уравнений в неупругом приближении и особенностей их вывода в различных статьях, мы сочли полезным для читателей привести в данной работе подробный вывод системы магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающейся стратифицированной плазмы. Таким образом, выведенная в данной работе система уравнений в неупругом приближении является новой относительно используемых ранее в различных работах уравнений в неупругом приближении, так как содержит одновременно силу Кориолиса и магнитное поле, а также предполагает постоянное ненулевое магнитное поле в исходном состоянии равновесия. Для вывода системы магнитогидродинамических уравнений сжимаемой стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении воспользуемся методикой, предложенной в [112]. В качестве исходной используем полную систему магнитогидродинамических уравнений сжимаемой плазмы при наличии вращения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + [\mathbf{f} \times \mathbf{u}] = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b} \times [\nabla \times \mathbf{b}]]}{4\pi\rho}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) S = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{b}]], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3.5)$$

$$\rho = \rho(p, S), \quad (3.6)$$

состоящую из уравнения Навье-Стокса (3.1), уравнения для энтропии (3.2), уравнения индукции для идеально проводящей плазмы (3.3), уравнения непрерывности (3.4), уравнения бездивергентности магнитного поля (3.5) и уравнения состояния (3.6). В системе (3.1-3.6) ρ — плотность плазмы, \mathbf{u} — вектор скорости, $\mathbf{f} = 2\Omega$ — вектор силы Кориолиса, Ω — вектор скорости вращения, p — давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — ускорение свободного падения, \mathbf{b} — вектор магнитного поля, S — энтропия. Для удобства дальнейшего анализа перейдем от энтропии к потенциальной температуре θ , используя их простую зависимость, заданную выражением $dS = c_p d \ln \theta$. Уравнение состояния (3.6) запишем в следующем виде:

$$d \ln \theta = \frac{1}{\gamma} d \ln p - d \ln \rho. \quad (3.7)$$

В качестве исходного рассмотрим состояние равновесия плазмы ($\mathbf{u}_0 = 0$) в постоянном магнитном поле ($\mathbf{b}_0 = \text{const}$) при наличии стратификации $\rho_0(z)$. Тогда давление в равновесии удовлетворяет уравнению гидростатики:

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} = \mathbf{g}, \quad (3.8)$$

а уравнение состояния (3.7) для невозмущенных величин сводится к следующему виду:

$$\frac{\nabla \theta_0}{\theta_0} = \frac{\nabla p_0}{\gamma p_0} - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0}, \quad (3.9)$$

Для получения уравнений магнитной гидродинамики вращающейся плазмы в неупругом приближении рассмотрим возмущение исходного состояния равновесия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'; \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}'; p = p_0 + p'; \rho = \rho_0 + \rho'; \theta = \theta_0 + \theta', \quad (3.10)$$

полагая возмущение плотности малым ($\rho' \ll \rho_0$).

Линеаризуя уравнения (3.1, 3.4, 3.7) по ρ' , и замыкая систему уравнениями (3.2, 3.3, 3.5) получим систему магнитогидродинамических уравнений для возмущенных переменных в неупругом приближении:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + [\mathbf{f} \times \mathbf{u}'] = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} -$$

$$-\frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0} - \frac{[\mathbf{b}' \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\theta_0 + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\theta' = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial\mathbf{b}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}_0]] + [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}']]. \quad (3.13)$$

$$\nabla(\rho_0 \cdot \mathbf{u}') = 0 \quad (3.14)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{b}') = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (3.16)$$

Ключевые отличия системы уравнений в неупругом приближении от уравнений в приближении Буссинеска 2.1-2.4 заключаются в уравнении энергии, записанном для потенциальной температуры, в уравнении непрерывности, включающем в себя исходный стратифицированный профиль плотности и в уравнении состояния, определяющем функцию плотности, как функцию не только давления, но и потенциальной температуры (энтропии). Таким образом, в неупругом приближении изменение давления и плотности жидкости связаны не только с силой плавучести, как в приближении Буссинеска, но и с изменением потенциальной температуры (энтропии).

Запишем слагаемое $\frac{\rho'}{\rho_0}$ в уравнении Навье-Стокса (3.11), используя уравнение состояния для возмущенных величин (3.16) и уравнение состояния для невозмущенных величин (3.9) следующим образом:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{\gamma p_0} - \frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{p'\nabla p_0}{\gamma p_0 \rho_0 g} - \frac{\theta'}{\theta_0} = \bar{\omega} \frac{\nabla p_0}{\gamma p_0 g} - \frac{\theta'}{\theta_0}, \quad (3.17)$$

где $\bar{\omega} = \frac{p'}{\rho_0}$ («reduced pressure») [112].

Пренебрежем в (3.11) всеми слагаемыми, пропорциональными $\bar{\omega}$, за исключением слагаемых, содержащих градиент $\bar{\omega}$. Используемый метод обеспечивает выполнение условия сохранения энергии в системе. Получим магнитогидродинамическое уравнение Навье-Стокса при наличии вращения в следующем виде:

$$\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{u}' + [\mathbf{f} \times \mathbf{u}'] = -\nabla\bar{\omega} - \frac{\theta'}{\theta_0}\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0} - \frac{[\mathbf{b}' \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi\rho_0}. \quad (3.18)$$

Полученная таким образом система (3.12-3.14, 3.18) уравнений удобна для дальнейшего исследования, поскольку не включает в явном виде слагаемых, содержащих возмущение плотности. Система (3.12-3.14, 3.18) описывает течения вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении и используется в работе для развития линейной слабонелинейной теорий волновых взаимодействий. Отметим, что система линейна относительно термодинамических

переменных и сохраняет нелинейность для поля скорости и магнитного поля. Линеаризованная система магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающейся плазмы (3.12-3.14, 3.18) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + [\mathbf{f} \times \mathbf{u}'] = -\nabla \bar{\omega} - T' \mathbf{g} - \frac{[\mathbf{b}_0 \times [\nabla \times \mathbf{b}']]}{4\pi \rho_0}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \theta_0 = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{b}_0]] \quad (3.21)$$

$$\nabla(\rho_0 \cdot \mathbf{u}') = 0. \quad (3.22)$$

Полученные системы уравнений (3.12-3.14, 3.18), (3.19-3.22) допускают аналитическое исследование для стратифицированного слоя плазмы с исходным устойчивым линейным профилем энтропии:

$$\frac{\partial S_0}{\partial z} = \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \text{const}. \quad (3.23)$$

В этом случае уравнение состояния для невозмущенных величин (3.9) определяет связь между плотностью и потенциальной температурой следующим образом:

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = -\frac{\rho_0 g}{\gamma p_0} - \frac{1}{g} \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (3.24)$$

Введем понятие частоты Брента-Вяйсяля в сжимаемых течениях стратифицированной астрофизической плазмы в следующем виде:

$$N_\theta^2 = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g \rho_0}{\gamma p_0} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial z}. \quad (3.25)$$

Учет сжимаемости в выражении (3.25) приводит к зависимости частоты Брента-Вяйсяля не только от плотности, но и от давления. Первое слагаемое в частоте Брента-Вяйсяля N_θ^2 для сжимаемых течений в неупругом приближении с линейным профилем энтропии (3.25) имеет вид, аналогичный частоте Брента-Вяйсяля в приближении Буссинеска $N^2 = -\frac{g}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z}$, где $\tilde{\rho}_0$ — постоянная фоновая плотность, а $\tilde{\rho}$ — линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию. В случае сжимаемых течений в неупругом приближении предполагается стратификация исходного профиля плотности $\rho_0(z)$, обеспечивающая линейность и устойчивость профиля энтропии ($\partial_z \ln \rho_0 = \text{const}$). Таким образом для удобства дальнейшего анализа мы обозначим первое слагаемое в (3.25) в следующем виде:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Кроме того, введем следующие переобозначения для потенциальной температуры и магнит-

ного поля:

$$T' = \frac{\theta'}{\theta_0}, \mathbf{b}_0 = \sqrt{4\pi\rho_0}\mathbf{B}_0, \mathbf{b}' = \sqrt{4\pi\rho_0}\mathbf{B}'.$$

Полученные в данном разделе магнитогидродинамические уравнения в неупругом приближении записаны для полной силы Кориолиса. Для дальнейшего исследования используем четыре различных приближения силы Кориолиса: приближение стандартной f -плоскости, когда вектор Кориолиса предполагается постоянным и направленным по вертикали, приближение нестандартной f -плоскости, когда вектор Кориолиса предполагается постоянным и произведен учет его горизонтальной составляющей, приближение стандартной β -плоскости, когда вектор Кориолиса направлен по вертикали и при малых изменениях широты слабо меняется, приближение нестандартной β -плоскости, когда произведен учет горизонтальной составляющей вектора Кориолиса и при малых изменениях широты он меняется слабо.

3.3 Линейная теория волновых процессов в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии

3.3.1 Сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в неупругом приближении на стандартной f -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на f -плоскости. Вектор Кориолиса \mathbf{f} в стандартном приближении f -плоскости полагается постоянным и направленным по вертикали: $\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$. В таком случае слагаемое $[\mathbf{f} \times \mathbf{u}']$ в уравнении (3.19) принимает вид $f_V u'_x \hat{\mathbf{y}} - f_V u'_y \hat{\mathbf{x}}$, где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ единичные вектора вдоль осей x и y соответственно. Преобразуем линеаризованную систему магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении (3.19-3.22) для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении f -плоскости с линейным профилем энтропии (3.24) к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} - f_V u'_y \hat{\mathbf{x}} + f_V u'_x \hat{\mathbf{y}} = -\nabla \bar{\omega} - T' \mathbf{g} - [\mathbf{B}_0 \times [\nabla \times \mathbf{B}']], \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_z (N_\theta^2/g) = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' - u'_z (N^2/g) = 0, \quad (3.30)$$

Представим переменные возмущения исходного состояния равновесия в виде

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}_1 \exp [i(\omega t - (\mathbf{k}\mathbf{r}))]. \quad (3.31)$$

Тогда получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с

линейным профилем энтропии на стандартной f -плоскости:

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 - \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} [f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + \\ + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. При условии когда в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикальной координаты z ($\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_{z_0})$), дисперсионное уравнение (3.32) принимает вид:

$$\omega^4 - \left[2B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 + B_{z_0}^2 k_z^2 \left[B_{z_0}^2 k_z^2 - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] = 0, \quad (3.33)$$

и его решение включает два типа волн: трехмерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные сжимаемые магнитострофические волны. Дисперсионное уравнение для трехмерных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет вид:

$$\omega_{mig_{Bz}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{2k^2} + \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{2} \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (3.34)$$

Выражение (3.34) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (2.12). Однако принципиальным отличием является присутствие в (3.34) частоты Брента-Вайсяля для сжимаемых течений N_θ^2 , которая зависит как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Таким образом для волн, описываемых дисперсионным соотношением (3.34) восстанавливающими механизмами являются не только вращение, магнитное поле и гравитация, но и сжимаемость. В частном случае отсутствия вертикального магнитного поля ($B_{z_0} = 0$) выражение (3.34) переходит в дисперсионное соотношение для трехмерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости:

$$\omega_{ig3D} = \pm \left(\frac{f_V^2 k_z^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right)^{1/2}. \quad (3.35)$$

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн в неупругом приближении имеет вид:

$$\omega_{mstr_{Bz}} = \pm \left(B_{z_0}^2 k_z^2 + \frac{f_V^2 k_z^2}{2k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{2k^2} - \frac{2}{k} \sqrt{\left(\frac{f_V^2 k_z^2}{2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{2} \right)^2 + B_{z_0}^2 k_z^4 f_V^2} \right)^{1/2}. \quad (3.36)$$

Также как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн, трехмерные магнитострофические волны в неупругом приближении описываются дисперсионным уравнением, аналогичным дисперсионному уравнению в приближении Буссинеска (2.14), с учетом эффектов

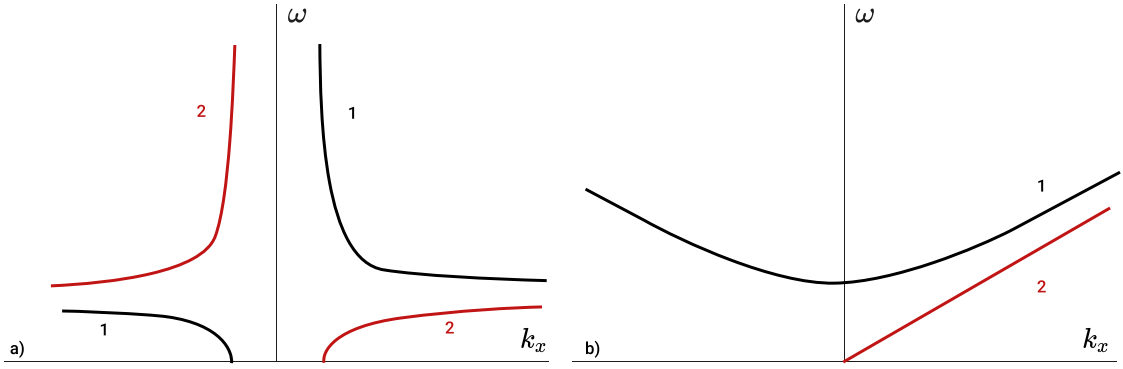


Рис. 16: Дисперсионные кривые волн на стандартной f -плоскости в неупругом приближении: а) 1 — сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{B_z}}$ и 2 — сжимаемая магнитострофическая волна $\omega_{mstr_{B_z}}$; б) 1 — сжимаемая магнитогравитационная волна ω_{mgr} и 2 — волна Альфвена ω_A .

сжимаемости в частоте Брента-Вяйсяля N_θ^2 .

В случае двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), дисперсионное уравнение (3.32) принимает вид:

$$\omega^4 - [2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] \omega^2 + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (3.37)$$

и допускает решение в виде двух типов волн. Первый тип — волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_A = \pm(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h. \quad (3.38)$$

Второй тип — двумерные магнитогравитационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mgr} = \pm \sqrt{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N_\theta^2}. \quad (3.39)$$

Выражение (3.39) в отсутствие магнитного поля описывает сжимаемые гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении с частотой $\omega_{gr} = \pm \sqrt{-N_\theta^2}$.

В противоположном случае одномерных вертикальных возмущений ($k = k_z$) дисперсионное уравнение (3.32) записывается в виде:

$$\omega^4 - [2B_{z_0}^2 k_z^2 + f_V^2] \omega^2 + B_{z_0}^4 k_z^4 = 0 \quad (3.40)$$

и описывает два типа магнитных инерционно-гравитационных волн, аналогичных волнам в приближении Буссинеска (2.16), (2.17).

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на стандартной f -плоскости при $\omega > 0$, $k = k_x$ представлен на 16

Таким образом в приближении f -плоскости найдены сжимаемые магнитогравитационные, сжимаемые магнитострофические и сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемым с частотой Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от

исходного профиля давления. Помимо новых типов волны, найдены волны Альфвена и магнитные инерционные волны, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

3.3.2 Сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на нестандартной f -плоскости. В приближении нестандартной f -плоскости полагаем небольшое отклонение вектора Кориолиса \mathbf{f} от вертикали. Тогда вектор Кориолиса с учетом горизонтальной составляющей принимает вид $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$, где $f_V = 2\Omega \sin \theta$, а $f_H = 2\Omega \cos \theta$. В таком случае слагаемое $[\mathbf{f} \times \mathbf{u}']$ в уравнении (3.19) принимает вид $(f_H u'_z - f_V u'_y)\hat{\mathbf{x}} + f_V u'_x \hat{\mathbf{y}} - f_H u'_x \hat{\mathbf{z}}$, где $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ — единичные вектора вдоль осей x, y и z соответственно. Учет горизонтальной составляющей в нестандартном приближении f -плоскости играет ключевую роль в описании экваториальных течений, для которых вертикальная компонента вектора Кориолиса на экваторе обращается в ноль [78]. Запишем линеаризованную систему магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении нестандартной f -плоскости с линейным профилем энтропии (3.24) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (f_H u'_z - f_V u'_y)\hat{\mathbf{x}} + f_V u'_x \hat{\mathbf{y}} - f_H u'_x \hat{\mathbf{z}} = -\nabla \bar{\omega} - T' \mathbf{g} - [\mathbf{B}_0 \times [\nabla \times \mathbf{B}']], \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_z (N_\theta^2 / g) = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{B}_0]] \quad (3.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' - u'_z (N^2 / g) = 0, \quad (3.44)$$

Рассматривая возмущение в виде (3.31), получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на нестандартной f -плоскости:

$$\omega^4 - \frac{N^2 k_x f_H}{g k^2} \omega^3 - \left[2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \frac{k_h^2 N_\theta^2}{k^2} \right] \omega^2 + \frac{N^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{g k^2} \cdot [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_z k_x) - f_V k_z (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] \omega + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{k_h^2}{k^2} N_\theta^2 \right] = 0. \quad (3.45)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим возмущение, направленное вдоль тороидальной компоненты магнитного поля B_{x_0} . Тогда дисперсионное уравнение (3.45) принимает вид:

$$\left(\omega^2 - B_{x_0}^2 k_x^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H}{g k_x} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0. \quad (3.46)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении на z -компоненту скорости содержит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом в неупругом приближении дисперсионное уравнение волн (3.45) на нестандартной f -плоскости имеет значительное отличие в выражениях при первой и третьей степени частоты, что в частном случае распространения волн вдоль тороидального магнитного поля приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн.

Соотношение (3.45) описывает три типа волн. Первый тип волн — одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением:

$$\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x. \quad (3.47)$$

Второй тип линейных волн — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (3.48)$$

Выражение (3.48) значительно отличается от дисперсионного соотношения (3.34) для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущем разделе, а также и от дисперсионного соотношения для магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (2.22). Однако восстанавливающие механизмы для волн, описываемых выражениями (3.48) и (3.34), одинаковы. Тем не менее выражение (3.48) описывает физические эффекты, сопровождающие сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны в неупругом приближении с новым законом дисперсии, восстанавливающими механизмами которых являются вращение, гравитация, магнитное поле и сжимаемость. Отметим, что исходный профиль плотности связан непосредственно с горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компоненты вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль тороидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) вклад силы инерции в дисперсионное соотношение (3.48) исчезает и оно описывает одномерные сжимаемые магнито-гравитационные волны в неупругом приближении с частотой:

$$\omega_{mg_{x_1}} = \sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (3.49)$$

где $N_\theta^2 = -\frac{g^2 \rho_0}{\gamma p_0}$.

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) дисперсионное соотношение (3.48) представимо в виде:

$$\omega_{ig_{x_1}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2} \quad (3.50)$$

и описывает одномерные сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидко-

сти. Дисперсионное соотношение (3.50) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) описывает сжимаемые гравитационные волны в неупругом приближении с частотой $\omega = \sqrt{-N_\theta^2}$.

Третий тип волн — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (3.51)$$

аналогичным полученному выше (3.48) с точностью до знака перед корнем. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) данный тип волн переходит в сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении с частотой:

$$\omega_{mgr_{x_2}} = -\sqrt{B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}, \quad (3.52)$$

В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{x_0} = 0$) выражение (3.51) описывает сжимаемые инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости с частотой:

$$\omega_{ig_{x_2}} = \frac{N^2 f_H}{2gk_x} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2}{4g^2 k_x^2} - N_\theta^2}. \quad (3.53)$$

В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн (3.48), (3.51) переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_x} = \pm B_{x_0} k_x$.

Рассмотрим случай полоидального магнитного поля в состоянии покоя и одномерное возмущение, направленное вдоль магнитного поля. Тогда дисперсионное уравнение (3.45) принимает вид:

$$\omega^4 - [2B_{y_0}^2 k_y^2 + f_H^2 - N_\theta^2] \omega^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0 \quad (3.54)$$

и описывает два типа волн: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны и одномерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в неупругом приближении имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_y} = \pm \left(B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y_0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}. \quad (3.55)$$

Такой тип волн, также как и в случае трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн на стандартной f -плоскости (3.34), является сжимаемым одномерным аналогом одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска (2.22). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) выражение (3.55) переходит в дисперсионное соотношение для одномерных инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости:

$$\omega_{ig_y} = \pm \sqrt{f_H^2 - N_\theta^2}. \quad (3.56)$$

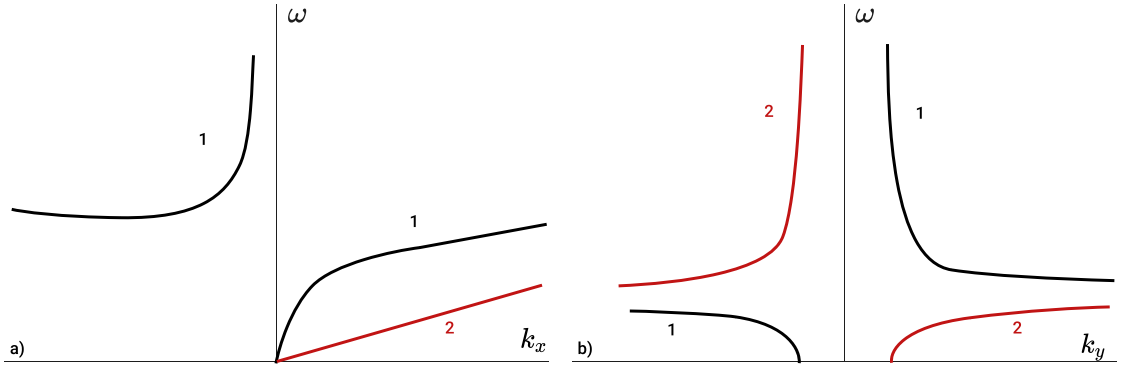


Рис. 17: Дисперсионные кривые волн на нестандартной f -плоскости в неупругом приближении: а) 1 — сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна $\omega_{mig_{x1}}$ и 2 — волна Альфвена ω_{A_x} ; б) 1 — сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна ω_{mig_y} и 2 — сжимаемая магнитострофическая волна ω_{mstr_y} .

Дисперсионное соотношение для одномерных магнитострофических волн имеет вид:

$$\omega_{mstr_y} = \pm \left(B_{y0}^2 k_y^2 + \frac{f_H^2}{2} - \frac{N_\theta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_H^2}{2} - N_\theta^2 \right)^2 + B_{y0}^2 k_y^2 f_H^2} \right)^{1/2}, \quad (3.57)$$

аналогичный дисперсионному соотношению для одномерных магнитострофических волн в приближении Буссинеска (2.23), с учетом эффектов сжимаемости, представленных частотой Брента-Вяйсяля N_θ^2 .

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на нестандартной f -плоскости представлен на 17а при $\omega > 0$, $k = k_x$ и на 17б при $\omega > 0$, $k = k_y$.

Таким образом в приближении нестандартной f -плоскости найдены новые сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с различными законами дисперсии и сжимаемые магнитострофические волны, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемыми с частотой Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн, найдены волны Альфвена, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

3.3.3 Волны в сжимаемых сферических течениях плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении на стандартной β -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированном вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии с учетом эффектов сферичности в приближении β -плоскости. В таком приближении параметр Кориолиса f слабо меняется при малых изменениях широты и раскладывается в ряд:

$$f = 2\Omega \sin \Theta \approx 2\Omega \sin \Theta_0 + 2\Omega(\Theta - \Theta_0) \cos \Theta_0 \approx f_0 + \beta y, \quad (3.58)$$

где Ω - угловая скорость вращения, Θ - широта, $f_0 = 2\Omega \sin \Theta_0$ ($f_0 \equiv f_V$), $\beta = \partial f / \partial y$. Приближение β -плоскости, в отличие от приближения f -плоскости, сохраняет первый порядок малости в разложении параметра Кориолиса. Запишем линеаризованную систему магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении β -плоскости с линейным профилем энтропии (3.24) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial y \partial t} - f_V \frac{\partial u'_y}{\partial y} - \beta u'_y = -\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(B_{y_0} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right) + B_{z_0} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial z} \right) \right), \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial u'_y}{\partial t} + f_V u'_x = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} - B_{0z} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right) + B_{0x} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right), \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} + T' g - B_{0x} \left(\frac{\partial B'_x}{\partial z} - \frac{\partial B'_z}{\partial x} \right) + B_{0y} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_z (N_\theta^2 / g) = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (3.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' - u'_z (N^2 / g) = 0. \quad (3.64)$$

Рассматривая возмущение основного состояния в виде (3.31), получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на стандартной β -плоскости:

$$k^2 \omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2 \left[f_V^2 k_z^2 + \frac{\beta N^2 f_V k_z}{g k_y} + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] - \omega [k_x \beta ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2) + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y)] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2] \quad (3.65)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим двумерные возмущения, направленные только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$). Тогда дисперсионное уравнение (3.65) принимает вид:

$$(\omega^2 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 + N_\theta^2) \left(\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \right) = 0. \quad (3.66)$$

Выражение (3.66) описывает три типа волн. Первый тип — сжимаемые магнитогравитационные волны в неупругом приближении, аналогичные волнам на f -плоскости (3.39). Второй тип — волны магнито-Россби, которые в отсутствие магнитного поля переходят в стандартные гидродинамические волны Россби. Эти волны аналогичны волнам магнито-Россби (2.46) в приближении Буссинеска. Третий тип — волны магнито-Россби, не имеющие аналога в динамике нейтральной

жидкости. Эти волны аналогичны волнам магнито-Россби (2.48) в приближении Буссинеска.

В случае одномерных возмущений, направленных только вдоль полоидальной составляющей магнитного поля, дисперсионное уравнение (3.65) принимает вид:

$$\omega^4 - \omega^2(2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) + B_{y_0}^2 k_y^2 (B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2) = 0. \quad (3.67)$$

Выражение (3.67) описывает два типа волн: одномерные волны Альфвена с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{y_0} k_y \quad (3.68)$$

и одномерные сжимаемые магнитогравиационные волны в неупругом приближении с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mgy} = \pm \sqrt{B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2}. \quad (3.69)$$

В низкочастотном пределе уравнение (3.65) описывает сжимаемую трехмерную волну магнито-Россби в неупругом приближении с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{MR3D} = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]}{\left[k_x \beta ((\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N_\theta^2) + \frac{N^2 f_V k_z}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (B_{y_0} k_x - B_{x_0} k_y) \right]}. \quad (3.70)$$

Выражение (3.70) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби, в следствие зависимости частоты Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений N_θ^2 не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (3.70) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска (2.50). Однако в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (3.70) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связанное со стратификацией плотности, которое исчезает, если в состоянии покоя магнитное поле направлено вдоль вертикали.

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на стандартной β -плоскости представлен на 18a при $\omega > 0$, $k = k_y$ для сжимаемой магнитогравиационной волны и волны Альфвена, на 18b-d для сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (b), $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (c), $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (d).

Таким образом в приближении стандартной β -плоскости найдены сжимаемые магнитогравиационные волны и сжимаемые трехмерные низкочастотные волны магнито-Россби, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемыми с частотой Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн, найдены волны Альфвена, и волны магнито-Россби аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

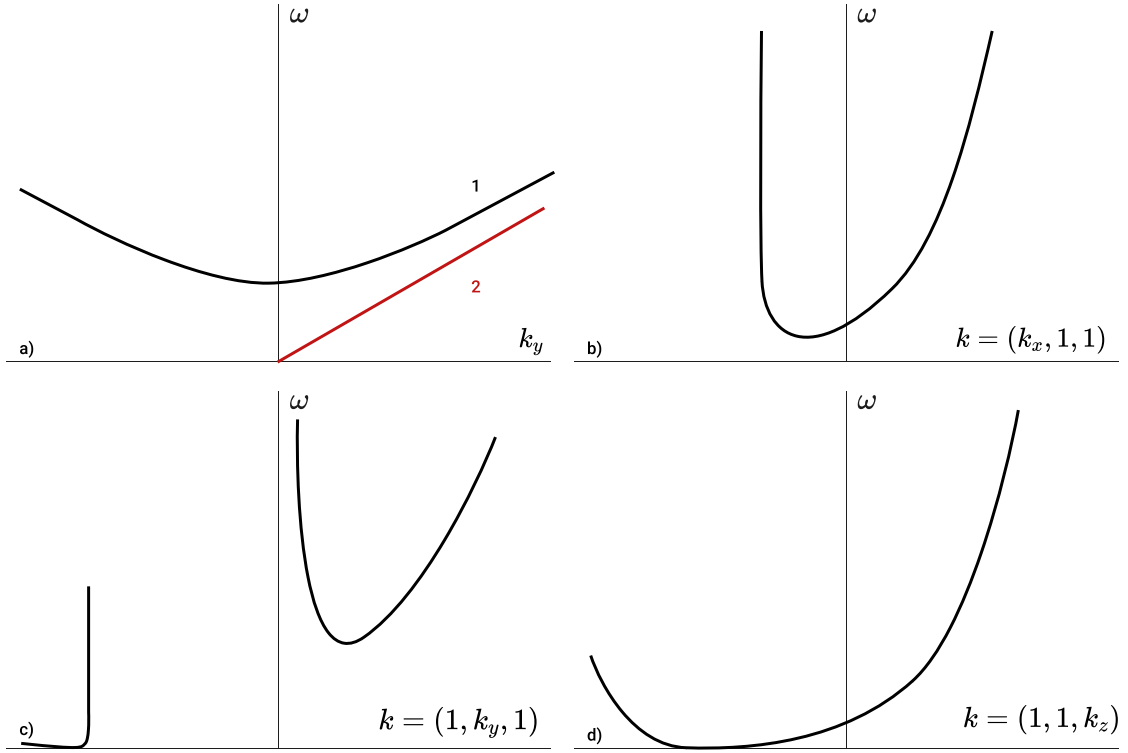


Рис. 18: Дисперсионные кривые волн на стандартной β -плоскости в неупругом приближении: а) 1 — сжимаемая магнитогравитационная волна ω_{mgy} и 2 — волна Альфвена ω_{Ay} ; б), в), д) сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби ω_{MR3D} .

3.3.4 Волны в сжимаемых сферических течениях плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости

Получим дисперсионные уравнения для волн в сжимаемом стратифицированной вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии с учетом эффектов сферичности на нестандартной β -плоскости. В нестандартном приближении β -плоскости предполагаем отклонение вектора Кориолиса \mathbf{f} от вертикали, а также его незначительное изменение при малых изменениях широты. Таким образом горизонтальная и вертикальная компоненты вектора Кориолиса раскладываются в ряд и параметр Кориолиса выглядит следующим образом:

$$\mathbf{f} = (0, f_H + \gamma y, f_V + \beta y), \quad (3.71)$$

где $f_V = 2\Omega \sin \Theta$, $\beta = \frac{2\Omega \cos \Theta}{R}$, $f_H = 2\Omega \cos \Theta$, $\gamma = -\frac{2\Omega \sin \Theta}{R}$.

Запишем линеаризованную систему магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающегося слоя сжимаемой стратифицированной плазмы в приближении нестандартной β -плоскости с линейным профилем энтропии (3.24) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial y \partial t} - f_V \frac{\partial u'_y}{\partial y} - \beta u'_y + f_H \frac{\partial u'_z}{\partial y} + \gamma u'_z = -\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(B_{y0} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right) + B_{z0} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial z} \right) \right), \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial u'_y}{\partial t} + f_V u'_x = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} - B_{0z} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right) + B_{0x} \left(\frac{\partial B'_y}{\partial x} - \frac{\partial B'_x}{\partial y} \right), \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} - f_H u'_x = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} + T' g - B_{0x} \left(\frac{\partial B'_x}{\partial z} - \frac{\partial B'_z}{\partial x} \right) + B_{0y} \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y} - \frac{\partial B'_y}{\partial z} \right), \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u'_z (N_\theta^2/g) = 0, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{B}_0]], \quad (3.76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' - u'_z (N^2/g) = 0, \quad (3.77)$$

Рассматривая возмущение в виде (3.31), получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающемся слое плазмы с линейным профилем энтропии на нестандартной β -плоскости:

$$\begin{aligned} & k^2 \omega^4 - k_x \omega^3 \left[\frac{N^2 f_H}{g} + \gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right] - \omega^2 \left[(f_H k_y + f_V k_z)^2 + \frac{\beta N^2}{g} \left(f_H + f_V \frac{k_z}{k_y} \right) + \right. \\ & \left. + 2k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2 \right] + \omega \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\gamma \frac{k_z}{k_y} - \beta \right) + \beta k_x N_\theta^2 + \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \cdot \right. \\ & \left. \cdot [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_x k_z) + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x)] \right\} + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2] \end{aligned} \quad (3.78)$$

Проанализируем решение полученного дисперсионного уравнения в частных случаях. Рассмотрим исходное состояние равновесия с тороидальным магнитным полем. Для двумерных возмущений, направленных только в горизонтальном направлении ($k_z = 0$), таких что $k_y \ll k_x$ и слагаемые $k_y^2/k_h^2 \ll 1$, $k_x^2/k_h^2 \sim 1$, дисперсионное уравнение (3.78) принимает вид:

$$\left(\omega^2 + \frac{\beta k_x}{k_h^2} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{N^2 f_H k_x}{k_h^2 g} \omega - B_{x_0}^2 k_x^2 + N_\theta^2 \right) = 0 \quad (3.79)$$

и допускает решение в виде четырех типов волн. Первый и второй тип – волны магнито-Россби, аналогичные волнам магнито-Россби на стандартной β -плоскости (и соответственно волнам магнито-Россби в приближении Буссинеска (2.46, 2.48)), с учетом однокомпонентности магнитного поля ($\mathbf{B} = (B_{x_0}, 0, 0)$). Третий тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсионным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig_1} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} + \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (3.80)$$

Дисперсионное соотношение (3.80) аналогично полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости (3.48).

Четвертый тип — сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с дисперсион-

ным соотношением в следующем виде:

$$\omega_{mig'_2} = \frac{N^2 f_H k_x}{2k_h^2 g} - \sqrt{\frac{N^4 f_H^2 k_x^2}{4k_h^4 g^2} + B_{x_0}^2 k_x^2 - N_\theta^2}. \quad (3.81)$$

Дисперсионное соотношение (3.81) аналогично полученному при изучении волн на нестандартной f -плоскости (3.51).

Рассмотрим случай, когда в состоянии покоя магнитное поле полоидально. Для одномерных возмущений, направленных вдоль магнитного поля, дисперсионное уравнение (3.78) записывается в виде:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{g k_y^2} + 2B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2 \right] + B_{y_0}^2 k_y^2 [B_{y_0}^2 k_y^2 - N_\theta^2] = 0. \quad (3.82)$$

В неупругом приближении слагаемое с массовой силой в уравнении на z -компоненту скорости содержит потенциальную температуру, зависящую как от плотности, так и от давления. Уравнение непрерывности в неупругом приближении включает в себя исходный профиль плотности, в то время как в приближении Буссинеска является условием бездивергентности поля скоростей. Таким образом в неупругом приближении дисперсионное уравнение волн на нестандартной β -плоскости (3.78) имеет значительное отличие в выражениях при первой, второй и третьей степени частоты, что в частном случае распространения волн вдоль полоидального магнитного поля (3.82) приводит к появлению новых типов сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и сжимаемых магнитострофических волн.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_\beta} = \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2g k_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 + \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2g k_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.83)$$

Выражение (3.83) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (3.83) имеет дополнительные слагаемые, включающие в себя параметр β , характерный для волн магнито-Россби, которые непосредственно связаны с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Такая связь обусловлена учетом эффектов сжимаемости и горизонтальной компоненты вектора Кориолиса, а также распространением волн вдоль полоидального магнитного поля. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (3.83) описывает одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (3.55). В частном случае отсутствия магнитного поля ($B_{y_0} = 0$) дисперсионное соотношение (3.83) описывает новый тип сжимаемых инерционно-гравитационных волн в нейтральной жидкости с ча-

стотой

$$\omega = \sqrt{f_H^2 + \frac{\beta N^2 f_H}{g k_y^2} - N_\theta^2}. \quad (3.84)$$

Выражение (3.84) в предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) переходит в выражение (3.56), которое также описывает инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости.

Дисперсионное соотношение для сжимаемых магнитострофических волн, являющееся решением дисперсионного уравнения (3.82) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_{mstr\beta} = & \left[\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} + B_{y_0}^2 k_y^2 - \left[\left(\frac{f_H^2}{2} + \frac{\beta N^2 f_H}{2gk_y^2} - \frac{N_\theta^2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + f_H^2 B_{y_0}^2 k_y^2 + \frac{f_H \beta N^2 B_{y_0}^2}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

Волны, описываемые дисперсионным соотношением (3.85) не имеют аналога в динамике нейтральной жидкости. Выражение (3.85) имеет вид аналогичный дисперсионному соотношению для сжимаемых магнитострофических волн, полученных в предыдущих разделах. Однако дисперсионное соотношение (3.85) включает в себя параметр β , характерный для волн магнито-Россби, который как и в случае со сжимаемыми магнитными инерционно-гравитационными волнами с частотой (3.83), неразрывно связан с градиентом профиля плотности и горизонтальной составляющей силы Кориолиса. В предположении отсутствия стратификации плотности ($N^2 = 0$) дисперсионное соотношение (3.85) описывает одномерные сжимаемые магнитострофические волны, аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости (3.57). В случае полного отсутствия стратификации ($N_\theta^2 = 0$, $N^2 = 0$) оба типа волн (3.83), (3.85) переходят в одномерные волны Альфвена с частотой $\omega_{A_y} = \pm B_{y_0} k_y$.

В низкочастотном пределе дисперсионное уравнение (3.78) допускает решение в виде сжимаемой трехмерной волны магнито-Россби в неупругом приближении с частотой:

$$\begin{aligned} \omega_{MR'_{3D}} = & \{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 [k^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - k_h^2 N_\theta^2]\} \left\{ k_x (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \left(\beta - \gamma \frac{k_z}{k_y} \right) - \beta k_x N_\theta^2 - \right. \\ & \left. - \frac{N^2}{g} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) [f_H (B_{x_0} k_h^2 + B_{z_0} k_x k_z) + f_V k_z (B_{x_0} k_y - B_{y_0} k_x)] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Выражение (3.86) учитывает эффекты сжимаемости в низкочастотных трехмерных волнах Россби, в следствие зависимости частоты Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений N_θ^2 не только от исходного профиля плотности, но и от исходного профиля давления. Дисперсионное соотношение (3.86) имеет вид, аналогичный дисперсионному соотношению для трехмерных низкочастотных волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β -плоскости (2.67). Кроме того в результате учета эффектов сжимаемости в неупругом приближении выражение (3.86) имеет дополнительное слагаемое в знаменателе, связанное со стратификацией плотности, которое, однако, не исчезает при отсутствии горизонтальных компонент магнитного поля, как в случае стан-

дартного приближения β -плоскости.

Общий вид дисперсионных кривых сжимаемых волн на нестандартной β -плоскости представлен на 19a при $\omega > 0$, $k = k_x$, на 19b при $\omega > 0$, $k = k_y$, на 19c при $\omega > 0$ $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$, на 19d при $\omega > 0$ $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$, на 19e при $\omega > 0$ $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$.

Таким образом в приближении нестандартной β -плоскости найдены сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны с различными законами дисперсии и сжимаемые трехмерные низкочастотные волны магнито-Россби, в которых эффекты сжимаемости представлены слагаемыми с частотой Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений, включающей в себя зависимость как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления. Помимо новых типов волн, найдены волны магнито-Россби, аналогичные волнам в приближении Буссинеска.

3.4 Резонансные явления волн в сжимаемых вращающихся течениях плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении

3.4.1 Условия синхронизма

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в неупругом приближении для каждого случая представления силы Кориолиса. Для того, чтобы оценить возможность межволновых взаимодействий для найденных волн, проанализируем найденные дисперсионные соотношения. Чтобы определить, существуют ли такие три волны, удовлетворяющие условию синхронизма (1.125), необходимо изобразить две дисперсионные кривые, смещенные друг относительно друга, для каждого случая. Если при смещении относительно начала координат одной из дисперсионных кривых она пересечет другую в некоторой точке, то это будет означать выполнение условия синхронизма [126].

Исследуем трехволновые взаимодействия волн на f -плоскости. Изобразим на 20a дисперсионную кривую для волны Альфвена ω_A (3.38) и дисперсионную кривую для сжимаемой магнитогравитационной волны в неупругом приближении ω_{mgr} (3.39), смещенную относительно начала координат. Пересечение двух дисперсионных кривых в некоторой точке $(\omega(k_3), k_3)$ означает выполнение условия синхронизма (1.125). На 20a изображено пересечение двух дисперсионных кривых, определяющее трехволновое взаимодействие волны Альфвена и двух сжимаемых магнитогравитационных волн в неупругом приближении. Поскольку магнитные инерционные волны идентичны волнам на f -плоскости в приближении Буссинеска (2.16), (2.17), для них будут существовать идентичные трехволновые взаимодействия, а именно: взаимодействие двух магнитных инерционных волн с частотой (2.16) и магнитной инерционной волны (2.17) (рис.4); взаимодействие трех магнитных инерционных волн (2.17). Для сжимаемых трехмерных магнитных инерционно-гравитационных (3.34) и магнитострофических (3.36) при $\mathbf{k} = (k_x, 0, 1)$ найдены следующие трехволновые взаимодействия: возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны и сжимаемой магнитострофической волн 20b; возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн 20c; возникновение

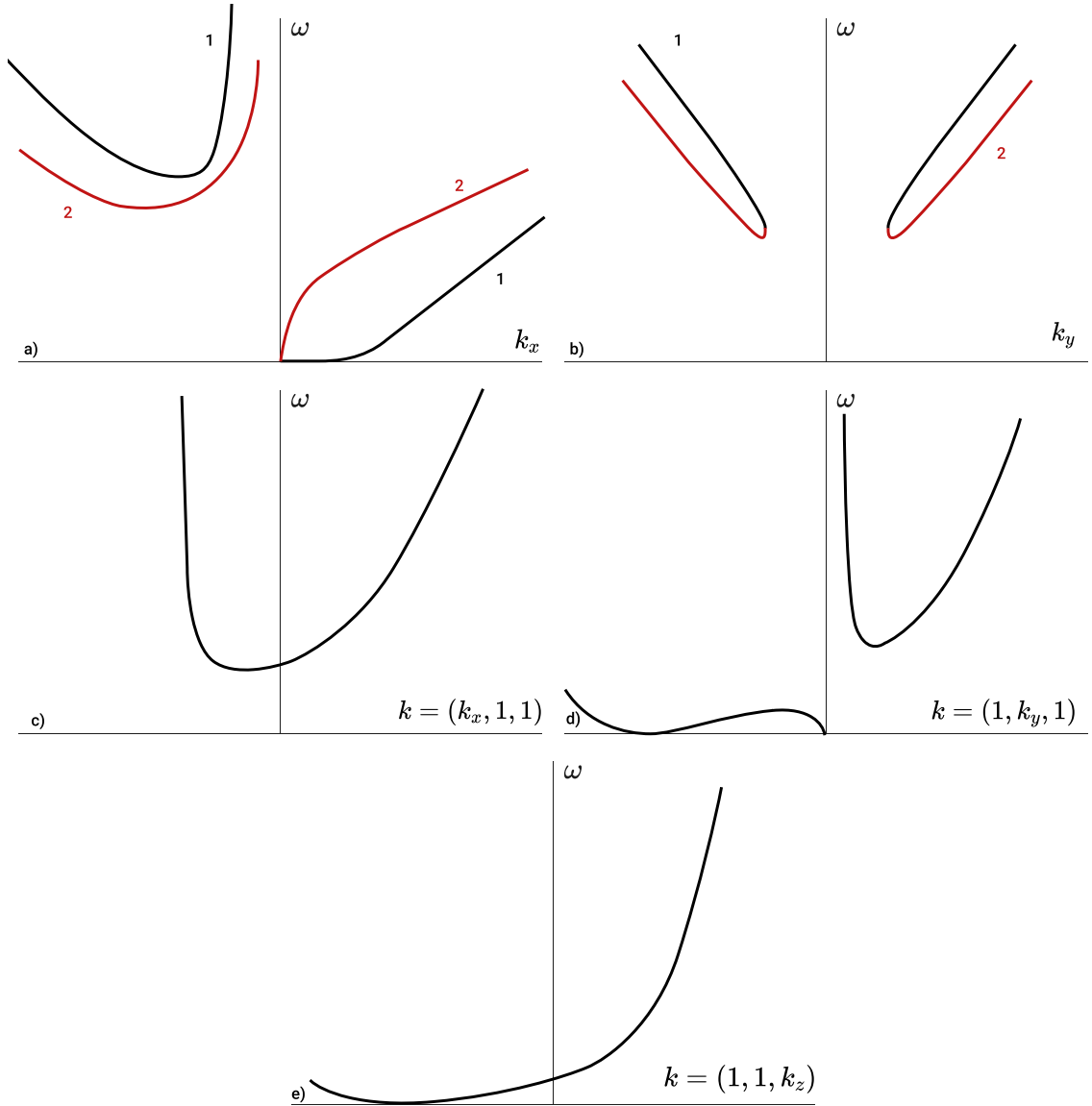


Рис. 19: Дисперсионные кривые волн на нестандартной β -плоскости в неупругом приближении: а) 1 — волна магнито-Россби ω_{MR_1} , 2 — волна Альфвена ω_{A_y} ; б) 1 — сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна ω_{mig_β} , 2 — сжимаемая магнитоустрофическая волна ω_{mstr_β} ; в) сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}$ при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$; д) сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}$ при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$; е) сжимаемая низкочастотная волна магнито-Россби $\omega_{MR'_{3D}}$ при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$.

сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии сжимаемой магнитострофической волны и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны 20d; возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн 20e; возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн 20f.

Для волн на нестандартной f -плоскости изображено пересечение дисперсионных кривых, соответствующее выполнению условия синхронизма (21a), которое определяет возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (3.48) при взаимодействии волны Альфвена (3.47) и сжимаемой магнитной-инерционно-гравитационной волны (3.48). На 21b изображено пересечение дисперсионных кривых, обеспечивающее выполнение условия синхронизма для трех сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн (3.48). Для волн (3.55), (3.57) имеющих дисперсионные кривые аналогичные волнам на стандартной f -плоскости (3.34), (3.36) имеют место и найденные трехволновые взаимодействия, а именно: возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны и сжимаемой магнитострофической волн; возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн; возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии сжимаемой магнитострофической волны и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн; возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн; возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии сжимаемой магнитострофической волны и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волн; возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн; возникновение сжимаемой магнитострофической волны при взаимодействии двух сжимаемых магнитострофических волн.

Перейдем теперь к проверке выполнения условия синхронизма (1.125) для волн на стандартной и нестандартной β -плоскостях. Для найденных волн на β -плоскости (3.68), (3.69) картина пересечения дисперсионных кривых аналогична пересечению волн на f -плоскости. Условие синхронизма обеспечивает взаимодействие волны Альфвена (3.68) и двух сжимаемых магнитогравитационных волн (3.69). Для волн на β -плоскости, аналогичных волнам полученным в приближении Буссинеска соответственно существуют следующие трехволновые взаимодействия: возникновение волны магнито-Россби (2.46) при взаимодействии двух волн магнито-Россби (2.46); возникновение сжимаемой магнитогравитационной волны (3.39) при взаимодействии магнито-Россби (2.46) и сжимаемой магнитогравитационной (3.39) волн; возникновение волны магнито-Россби (2.46) при взаимодействии сжимаемой магнитогравитационной (3.39) и магнито-Россби (2.46) волн. Для сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (3.70) выполняется условие синхронизма, обеспечивающее взаимодействие трех сжимаемых магнито-Россби волн при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (22a), при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (22b) и при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (22c).

Перейдем к анализу дисперсионных кривых на нестандартной β -плоскости. На 23a изображено пересечение дисперсионных кривых, обеспечивающее условие синхронизма, которое определяет возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной (3.80) и магнито-Россби (2.46) волн, на 23b — возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (3.80) при взаимодействии двух сжимаемых волн магнито-Россби (2.46), на 23c — возникновение волны

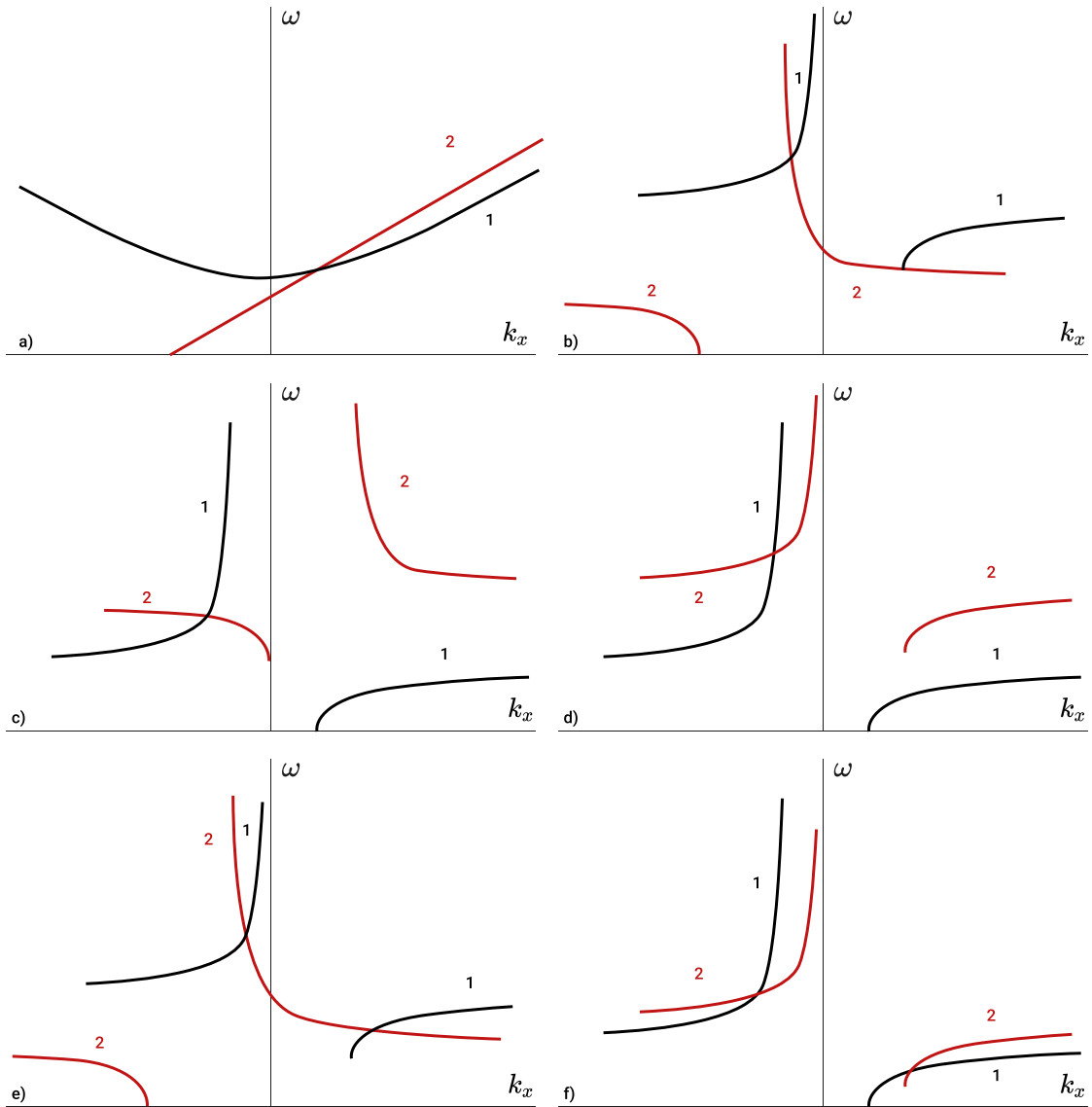


Рис. 20: Условие синхронизма для трех волн на стандартной f -плоскости: а) две магнитогравитационные волны и волна Альфвена: $1 - \omega = \omega_{mgr}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_A(k_x - k_{xc}) + \omega_{mgr}(k_{xc})$; б) две магнитоустрофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна: $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$; в) магнитоустрофическая волна и две магнитные инерционно-гравитационные волны: $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{B_z}}(k_{xc})$; д) две магнитоустрофические волны и магнитная инерционно-гравитационная волна: $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mig_{B_z}}(k_{xc})$; е) магнитная инерционно-гравитационная волна и две магнитоустрофические волны: $1 - \omega = \omega_{mig_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$; ф) три магнитоустрофические волны: $1 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mstr_{B_z}}(k_x - k_{xc}) + \omega_{mstr_{B_z}}(k_{xc})$.

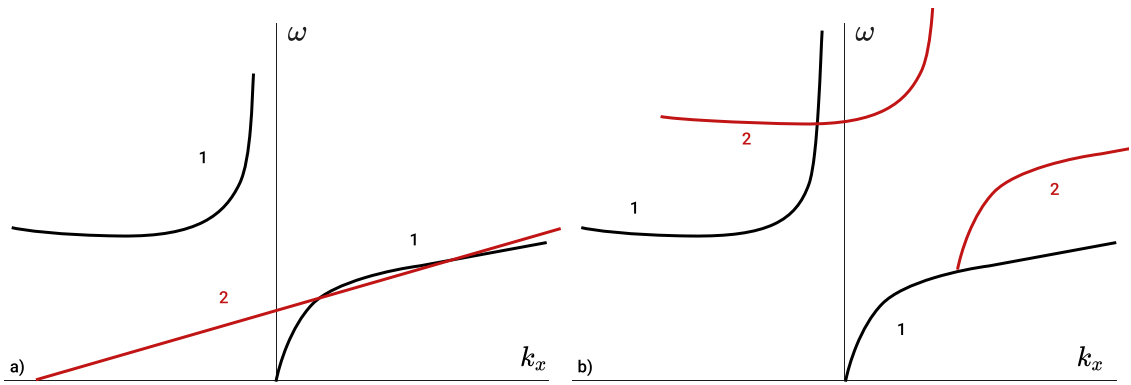


Рис. 21: Условие синхронизма для трех волн на нестандартной f -плоскости: а) две магнитные инерционно-гравитационные волны и волна Альфвена: $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{A_x}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_c})$; б) три магнитные инерционно-гравитационные волны: $1 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig_{x_1}}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_c})$.

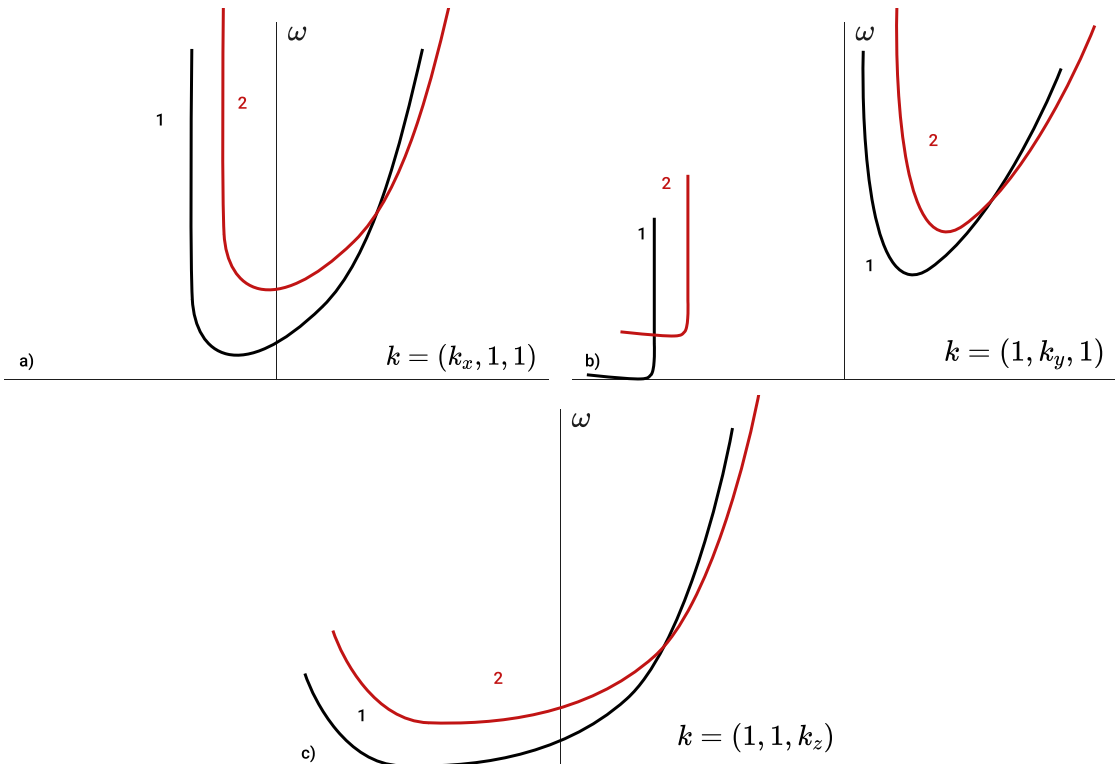


Рис. 22: Условие синхронизма для трех сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби на стандартной β -плоскости: $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k})$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) + \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_c)$ а) при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$; б) при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$; с) при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$.

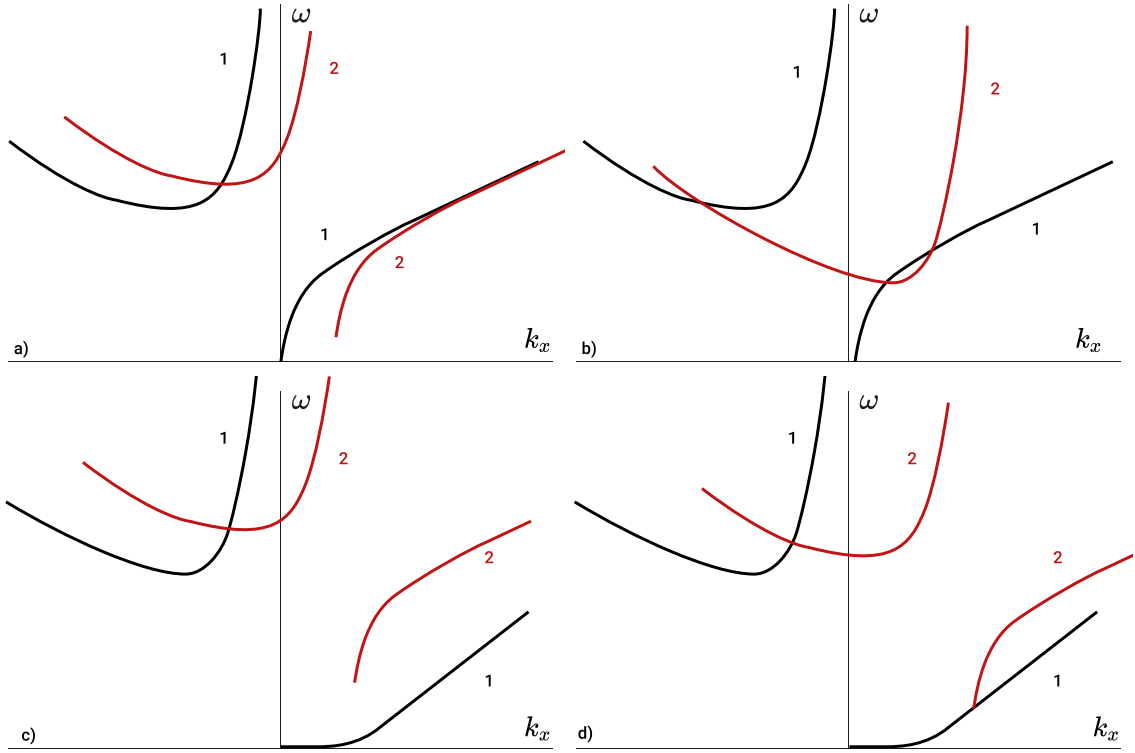


Рис. 23: Условие синхронизма для трех волн на нестандартной β -плоскости: а) две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби: $1 - \omega = \omega_{mig'_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig'_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; б) две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна: $1 - \omega = \omega_{mig'_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$; в) две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и волна магнито-Россби: $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig'_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mig'_1}(k_{x_c})$; д) две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна: $1 - \omega = \omega_{MR_1}(k_x)$, $2 - \omega = \omega_{mig'_1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{MR_1}(k_{x_c})$.

магнито-Россби (2.46) при взаимодействии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн (3.80), на 23d — возникновение волны магнито-Россби (2.46) при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной (3.80) и магнито-Россби волны (2.46).

На 24а изображено пересечение дисперсионных кривых, обеспечивающее условие синхронизма, которое определяет возникновение сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (3.83) при взаимодействии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны (3.83) и сжимаемой магнитострофической волны (3.85). Для сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (3.86) выполняется условие синхронизма, обеспечивающее взаимодействие трех сжимаемых магнито-Россби волн при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (24б), при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (24с) и при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (24д).

3.4.2 Коэффициенты взаимодействия в амплитудных уравнениях

Для анализа слабонелинейных взаимодействий используем, как и в описанных выше приближениях, асимптотический метод многомасштабных разложений для системы трехмерных магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в неупругом приближении (3.11-3.15). Как было сказано ранее, данный метод широко используется для ис-

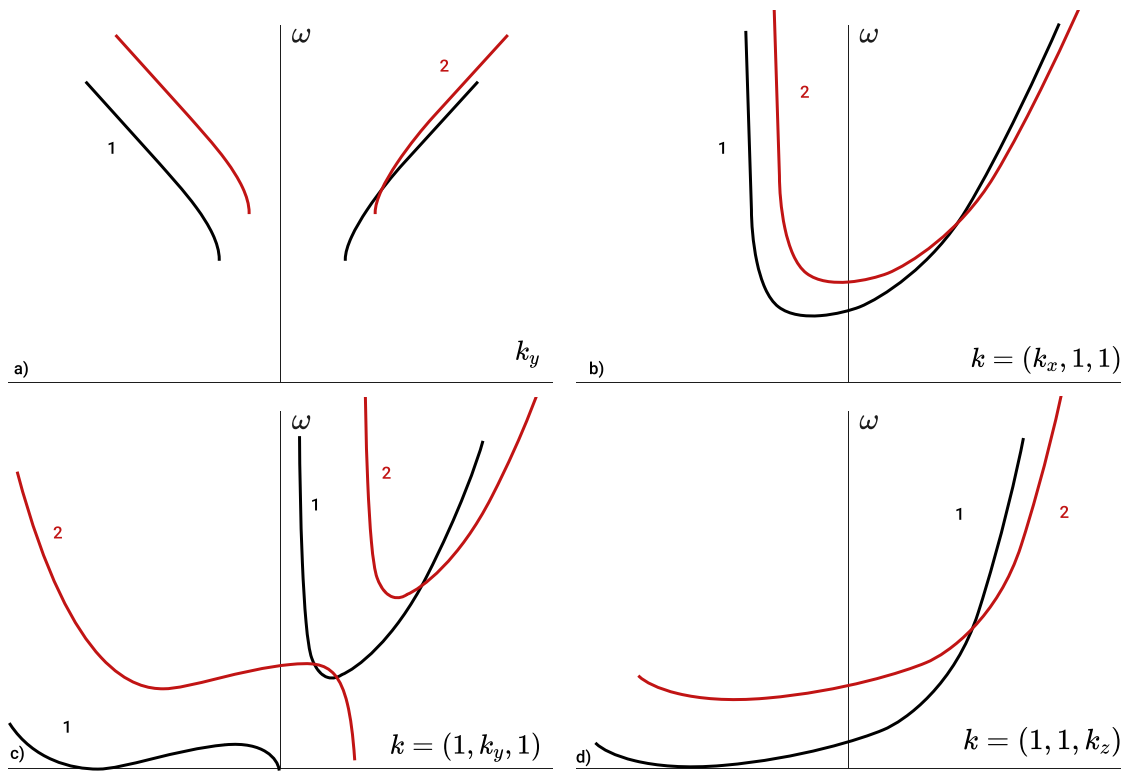


Рис. 24: Условие синхронизма для трех волн на нестандартной β -плоскости: а) две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны и сжимаемая магнитострофическая волна: $1 - \omega = \omega_{mig_\beta}(k_y)$, $2 - \omega = \omega_{mig_\beta}(k_y - k_{yc}) + \omega_{mstr_\beta}(k_{yc})$; б)–д) три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби: $1 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k})$, $2 - \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) + \omega = \omega_{MR_{3D}}(\mathbf{k}_c)$ при $\mathbf{k} = (k_x, 1, 1)$ (б); при $\mathbf{k} = (1, k_y, 1)$ (с); при $\mathbf{k} = (1, 1, k_z)$ (д).

следования слабонелинейных взаимодействий, система амплитудных уравнений имеет общий вид (1.142,1.146,1.150):

$$s_1\phi = f_1\psi^*\chi,$$

$$s_2\psi = f_2\phi^*\chi,$$

$$s_3\chi = f_3\phi\psi,$$

а существенные отличия между полученными амплитудными уравнениями для взаимодействующих волн содержатся в дифференциальных операторах и коэффициентах, зависящих от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Приведем их ниже для каждого приближения силы Кориолиса.

Запишем полученные выражения для дифференциальных операторов s_{i_f} и коэффициентов взаимодействия f_{i_f} волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении на f -плоскости. Коэффициент t_{i_f} при производной по медленному времени T_1 в приближении стандартной f -плоскости имеет следующий вид:

$$t_{i_f} = \sum_{j=1}^3 z_j a_j + z_4 a_8 + \sum_{j=5}^7 z_j a_{j-1}. \quad (3.87)$$

Выражение (3.87) совпадает с выражением, аналогичным полученному в приближении Буссинеска (2.70) с отличием в слагаемых, содержащих эффекты сжимаемости, а именно в собственном векторе z и компоненте a_8 .

Коэффициент p_{i_f} при производной по медленной координате X_1 в приближении стандартной f -плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} p_{i_f} = & z_1 (a_7 + B_{y_0} a_5 + B_{z_0} a_6) - B_{x_0} (z_2 a_5 + z_3 a_6 + \\ & + z_6 a_2 + z_7 a_3) + a_1 (B_{y_0} z_6 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_1. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Коэффициент q_{i_f} при производной по медленной координате Y_1 в (??) в приближении стандартной f -плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} q_{i_f} = & z_2 (a_7 + B_{z_0} a_6 + B_{x_0} a_4) - B_{y_0} (z_1 a_4 + z_3 a_6 + \\ & + z_5 a_1 + z_7 a_3) + a_2 (B_{x_0} z_5 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Коэффициент w_{i_f} при производной по медленной координате Z_1 в приближении стандартной f -плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} w_{i_f} = & z_3 (a_7 + B_{x_0} a_4 + B_{y_0} a_5) - B_{z_0} (z_1 a_4 + z_2 a_5 + \\ & + z_5 a_1 + z_6 a_2) + a_3 (B_{x_0} z_5 + B_{y_0} z_6) + z_8 a_3. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Здесь и далее (3.87-3.90) $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_i)$ — собственный волновой вектор, в котором $a_1 \equiv v_{x_1}$, $a_2 \equiv v_{y_1}$,

$a_3 \equiv v_{z_1}$, $a_4 \equiv B_{x_1}$, $a_5 \equiv B_{y_1}$, $a_6 \equiv B_{z_1}$, $a_7 \equiv \bar{\omega}_1$, $a_8 \equiv \theta_1$.

Коэффициенты f_{i_f} , зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн на f -плоскости, запишем в виде суммы:

$$f_{i_f} = \sum_{s=1}^8 z_s \mathcal{X}_{si_f}, \quad (3.91)$$

где $\mathcal{X}_{8i_f} = 0$. Для слагаемых \mathcal{X}_{si_f} в сумме (3.91) в случае волн на f -плоскости получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{1i_f} = & i\gamma[k_{y_m}(a_{2k_l} a_{1k_m}^* - a_{5k_l} a_{4k_m}^*) + k_{z_m}(a_{3k_l} a_{1k_m}^* - \\ & - a_{6k_l} a_{4k_m}^*)] - i[k_{x_i}(a_{1l_m}^2 + a_{5l_m}^2 + a_{6l_m}^2) + \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$+ k_{y_l}(a_{2k_m}^* a_{1k_l} - a_{5k_m}^* a_{4k_l}) + k_{z_l}(a_{3k_m}^* a_{1k_l} - a_{6k_m}^* a_{4k_l})],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{2i_f} = & i\gamma[k_{x_m}(a_{1k_l} a_{2k_m}^* - a_{4k_l} a_{5k_m}^*) + k_{z_m}(a_{3k_l} a_{2k_m}^* - \\ & - a_{6k_l} a_{5k_m}^*)] - i[k_{y_i}(a_{2l_m}^2 + a_{4l_m}^2 + a_{6l_m}^2) + \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$+ k_{x_l}(a_{1k_m}^* a_{2k_l} - a_{4k_m}^* a_{5k_l}) + k_{z_l}(a_{3k_m}^* a_{2k_l} - a_{6k_m}^* a_{5k_l})],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{3i_f} = & i\gamma[k_{x_m}(a_{1k_l} a_{3k_m}^* - a_{4k_l} a_{6k_m}^*) + k_{y_m}(a_{2k_l} a_{3k_m}^* - \\ & - a_{5k_l} a_{6k_m}^*)] - i[k_{z_i}(a_{3l_m}^2 + a_{4l_m}^2 + a_{5l_m}^2) + \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$+ k_{x_l}(a_{1k_m}^* a_{3k_l} - a_{4k_m}^* a_{6k_l}) + k_{y_l}(a_{2k_m}^* a_{3k_l} - a_{5k_m}^* a_{6k_l})],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{4i_f} = & i\gamma[a_{1k_l} k_{x_m} + a_{2k_l} k_{y_m} + a_{3k_l} k_{z_m}] a_{8k_m}^* - \\ & - i[a_{1k_m}^* k_{x_l} + a_{2k_m}^* k_{y_l} + a_{3k_m}^* k_{z_l}] a_{8k_l}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\mathcal{X}_{5i_f} = ik_{y_i}(\hat{a}_{15} - \hat{a}_{24}) + ik_{z_i}(\hat{a}_{16} - \hat{a}_{34}), \quad (3.96)$$

$$\mathcal{X}_{6i_f} = ik_{x_i}(\hat{a}_{24} - \hat{a}_{15}) + ik_{z_i}(\hat{a}_{26} - \hat{a}_{35}), \quad (3.97)$$

$$\mathcal{X}_{7i_f} = ik_{x_i}(\hat{a}_{34} - \hat{a}_{16}) + ik_{y_i}(\hat{a}_{35} - \hat{a}_{26}). \quad (3.98)$$

В выражениях (3.92-3.98) использованы следующие обозначения:

$$a_{n_l m}^2 = a_{n_k l} a_{n_k m}^*, \quad \hat{a}_{n_1 n_2} = a_{n_1 k_l} a_{n_2 k_m}^* + a_{n_1 k_m}^* a_{n_2 k_l}.$$

Выражения (3.92-3.95) аналогичны полученным в приближении Буссинеска (2.75-2.81) с отличием в собственном векторе z и компоненте a_8 .

Полученные выражения для коэффициентов дифференциальных операторов s'_{i_f} и коэффициентов взаимоействия f'_{i_f} волн в приближении нестандартной f -плоскости имеют такой же вид, как и операторы s_{i_f} (3.87-3.90) и коэффициенты f_{i_f} (3.92-3.98) на стандартной f -плоскости и отличаются только собственным вектором z линейного оператора системы (3.41-3.44).

Таким образом получены дифференциальные операторы и коэффициенты трехволновых взаимодействий для сжимаемых волн в приближении стандартной и нестандартной f -плоскостей.

Эффекты сжимаемости представлены в полученных выражениях слагаемым с потенциальной температурой a_8 , а также собственным вектором \mathbf{z} системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

Запишем теперь полученные выражения для дифференциальных операторов $s_{i\beta}$ и коэффициентов взаимодействия $f_{i\beta}$ волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в неупругом приближении на β -плоскости. Коэффициент $t_{i\beta}$ при производной по медленному времени T_1 в приближении стандартной β -плоскости имеет вид:

$$t_{i\beta} = -ik_{y_i}z_1a_1 + \sum_{j=2}^3 z_j a_j + z_4 a_8 + \sum_{j=5}^7 z_j a_{j-1}, \quad (3.99)$$

аналогичный полученному в приближении Буссинеска (2.82) с отличием в собственном векторе \mathbf{z} и компоненте a_8 .

Коэффициент $p_{i\beta}$ при производной по медленной координате X_1 в приближении стандартной β -плоскости имеет вид:

$$p_{i\beta} = -iz_1 k_{y_i} (a_7 + B_{y_0} a_5 + B_{z_0} a_6) - B_{x_0} (z_2 a_5 + z_3 a_6 + z_6 a_2 + z_7 a_3) + a_1 (B_{y_0} z_6 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_1. \quad (3.100)$$

Коэффициент $q_{i\beta}$ при производной по медленной координате Y_1 в приближении стандартной β -плоскости имеет вид:

$$q_{i\beta} = iz_1 [\omega a_1 + i f_v a_2 - k_{x_i} a_7 - B_{y_0} (k_{x_i} a_5 + 2k_{y_i} a_4) + B_{z_0} (k_{z_i} a_4 - k_{x_i} a_6)] + z_2 (a_7 + B_{z_0} a_6 + B_{x_0} a_4) - B_{y_0} (z_3 a_6 + z_5 a_1 + z_7 a_3) + a_2 (B_{x_0} z_5 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_2. \quad (3.101)$$

Коэффициент $w_{i\beta}$ при производной по медленной координате Z_1 в приближении стандартной β -плоскости имеет вид:

$$w_{i\beta} = z_3 (a_7 + B_{x_0} a_4 + B_{y_0} a_5) - B_{z_0} (iz_1 k_{y_i} a_4 + z_2 a_5 + z_5 a_1 + z_6 a_2) + a_3 (B_{x_0} z_5 + B_{y_0} z_6) + z_8 a_3. \quad (3.102)$$

Здесь и далее $\omega = \omega(\mathbf{k}_i)$.

Коэффициенты $f_{i\beta}$, зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн на β -плоскости, представим в виде суммы:

$$f_{i\beta} = \sum_{s=1}^8 z_s \mathcal{K}_{si\beta}, \quad (3.103)$$

где $\mathcal{K}_{8i\beta} = 0$.

Слагаемое $\varkappa_{1i\beta}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \varkappa_{1i\beta} = & \gamma k_{yi} [k_{ym} (a_{2k_l} a_{1k_m}^* - a_{5k_l} a_{4k_m}^*) + k_{zm} (a_{3k_l} a_{1k_m}^* - \\ & - a_{6k_l} a_{4k_m}^*)] - k_{yi} [k_{xi} (a_{1lm}^2 + a_{5lm}^2 + a_{6lm}^2) + \\ & + k_{yl} (a_{2km}^* a_{1k_l} - a_{5km}^* a_{4k_l}) + k_{zl} (a_{3km}^* a_{1k_l} - a_{6km}^* a_{4k_l})], \end{aligned} \quad (3.104)$$

Остальные слагаемые в сумме (3.103) отличаются от слагаемых в сумме (3.91) только собственным вектором z линейного оператора системы (3.59-3.64).

Отметим, что выражения для коэффициентов $t'_{i\beta}$, $p'_{i\beta}$, $w'_{i\beta}$ и $f'_{i\beta}$ волн в приближении нестандартной β -плоскости имеют такой же вид, как и коэффициенты $t_{i\beta}$ (3.99), $p_{i\beta}$ (3.100), $w_{i\beta}$ (3.102) и $f_{i\beta}$ (3.103) на стандартной β -плоскости и отличаются только собственным вектором z линейного оператора системы (3.72-3.77). Коэффициент $q'_{i\beta}$ при медленной переменной Y_1 на нестандартной β -плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} q_{i\beta} = & iz_1 [\omega a_1 - if_H a_3 + if_v a_2 - k_{xi} a_7 - B_{y_0} (k_{xi} a_5 + \\ & + 2k_{yi} a_4) + B_{z_0} (k_{zi} a_4 - k_{xi} a_6)] + z_2 (a_7 + B_{z_0} a_6 + B_{x_0} a_4) - \\ & - B_{y_0} (z_3 a_6 + z_5 a_1 + z_7 a_3) + a_2 (B_{x_0} z_5 + B_{z_0} z_7) + z_8 a_2. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Для всех найденных типов взаимодействий существует следующее соотношение между индексами в полученных коэффициентах: индексы i, m, l соответствуют одной из трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма. Таким образом, при взаимодействии трех волн с частотами $\omega_1(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ индексы $i, m, l = 1$ будут соответствовать первой волне, индексы $i, m, l = 2$ — второй, а индексы $i, m, l = 3$ — третьей. Индексы m, l , параметр γ и комплексное сопряжение вектора \mathbf{a} связаны с индексом i следующим образом: когда индекс $i = 1$, то индекс $l = 3$, индекс $m = 2$, параметр $\gamma = 1$; когда индекс $i = 2$, то индекс $l = 3$, индекс $m = 1$, параметр $\gamma = 1$; когда индекс $i = 3$, то индекс $l = 1$, индекс $m = 2$, параметр $\gamma = -1$, а комплексно сопряженные компоненты вектора \mathbf{a} заменяются на реальные ($a_n^* \rightarrow a_n$).

Таким образом получены дифференциальные операторы и коэффициенты трехволновых взаимодействий для сжимаемых волн в приближении стандартной и нестандартной β -плоскостей. Эффекты сжимаемости представлены в полученных выражениях слагаемым с потенциальной температурой a_8 , а также собственным вектором z системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

3.4.3 Неустойчивости типа распад и усиление

Система уравнений (1.142, 1.146, 1.150) имеет общий вид и описывает параметрические неустойчивости типа распад и усиление. В случае когда амплитуда одной из волн много больше амплитуд двух других ($\phi \gg \psi, \chi$, $\phi = \phi_0$) имеет место неустойчивость типа распад, когда волна с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ распадается на две волны с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ и с инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|f_2 f_3| / t_2 t_3} |\phi_0| > 0$. В случае когда амплитуда одной из волн много меньше амплитуд двух

других ($\phi \ll \psi, \chi, \psi = \psi_0, \chi = \chi_0$) имеет место неустойчивость типа усиление, когда волна с частотой $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ усиливается двумя волнами с частотами $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ и $\omega_3(\mathbf{k}_3)$ и с инкрементом неустойчивости $\Gamma = (|f_1|/|t_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$. Несмотря на общий вид инкрементов неустойчивости, они различны для каждого приближения силы Кориолиса и каждого типа трехволновых взаимодействий. Различие представлено в коэффициентах f_n, r_n . Таким образом в приведенных ниже параметрических неустойчивостях все инкременты взаимодействия различны.

Таким образом, суммируя, для волн на f -плоскости имеют место распад или усиление волны Альфвена ($\omega_1 = \omega_A(\mathbf{k}_1)$) при участии двух сжимаемых магнитогравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление вертикальной магнитной волны с частотой $\omega_1 = \omega_{z_1}(k_{z_1})$ при участии двух вертикальных магнитных волн с частотами $\omega_2 = \omega_{z_2}(k_{z_2})$ и $\omega_3 = \omega_{z_2}(k_{z_3})$; распад или усиление вертикальной магнитной волны с частотой $\omega_1 = \omega_{z_2}(k_{z_1})$ при участии двух вертикальных магнитных волн с частотами $\omega_2 = \omega_{z_2}(k_{z_2})$ и $\omega_3 = \omega_{z_2}(k_{z_3})$; распад или усиление сжимаемой магнитоострофической волны ($\omega_1 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$), либо сжимаемой магнитоострофической ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_3 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$) волн, либо двух сжимаемых магнитоострофических волн ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_2 = \omega_{mig_{B_z}}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитоострофической ($\omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$) волн, либо двух сжимаемых магнитоострофических волн ($\omega_2 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mstr_{B_z}}(\mathbf{k}_3)$). Для волн на нестандартной f -плоскости имеют место распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_1})$) при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2}), \omega_3 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_3})$), либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2})$) и волны Альфвена ($\omega_3 = \omega_{A_x}(k_{x_3})$); распад или усиление волны Альфвена ($\omega_1 = \omega_{A_x}(k_{x_1})$) при участии двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_2}), \omega_3 = \omega_{mig_{x_1}}(k_{x_3})$); распад или усиление сжимаемой магнитоострофической волны ($\omega_1 = \omega_{mstr_y}(k_{y_1})$) при участии либо сжимаемой магнитоострофической ($\omega_2 = \omega_{mstr_y}(k_{y_2})$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_3 = \omega_{mig_y}(k_{y_3})$) волн, либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_y}(k_{y_2}), \omega_3 = \omega_{mig_y}(k_{y_3})$) при $f_H \gg 1$.

Для волн на β -плоскости имеют место распад или усиление волны магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$), либо двух сжимаемых магнитогравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитогравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mgr}(\mathbf{k}_1)$) при участии двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби (ω_1) при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (ω_2, ω_3). Для волн на нестандартной β -плоскости имеют место распад или усиление волны магнито-Россби ($\omega_1 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_1)$) при участии либо двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$), либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2), \omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$), либо волны магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной

волны ($\omega_1 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_1)$), при участии либо двух сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$, $\omega_3 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_3)$), либо сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной ($\omega_2 = \omega_{mig_1}(\mathbf{k}_2)$) и магнито-Россби ($\omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$) волн, либо двух волн магнито-Россби ($\omega_2 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_2)$, $\omega_3 = \omega_{mR_1}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_1 = \omega_{mig_\beta}(\mathbf{k}_1)$), при участии сжимаемой магнитной инерционно-гравитационной волны ($\omega_2 = \omega_{mig_\beta}(\mathbf{k}_2)$) и сжимаемой магнитострофической волны ($\omega_3 = \omega_{mstr_\beta}(\mathbf{k}_3)$); распад или усиление сжимаемой низкочастотной волны магнито-Россби (ω_3) при участии двух сжимаемых низкочастотных волн магнито-Россби (ω_1, ω_2)

Таким образом получены инкременты неустойчивости двух типов (распад и усиление), имеющей место в системе для амплитуд трех взаимодействующих волн в неупругом приближении. Эффекты сжимаемости в найденных инкрементах неустойчивости неявно содержатся в коэффициентах взаимодействия f_i и коэффициентах t_i при производной по медленному времени, которые включают в себя слагаемые с потенциальной температурой a_3 , а также собственный вектор z системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

3.5 Выводы

В главе получена система магнитогидродинамических уравнений в неупругом приближении для вращающихся сжимаемых стратифицированных течений астрофизической плазмы с линейным профилем энтропии и произведена ее линеаризация. Учет силы Кориолиса произведен в четырех различных приближениях: приближение стандартной f -плоскости, приближение нестандартной f -плоскости, приближение стандартной β -плоскости и приближение нестандартной β -плоскости. Найден дисперсионные соотношения для линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и сжимаемых магнитострофических волн в неупругом приближении на f -плоскости, для различных типов линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных волн и линейных сжимаемых магнитострофических волн в неупругом приближении на нестандартной f -плоскости, дисперсионные соотношения для линейных сжимаемых волн магнито-Россби в неупругом приближении на β -плоскости и дисперсионные соотношения для различных типов линейных сжимаемых магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн и сжимаемых волн магнито-Россби в неупругом приближении на нестандартной β -плоскости. Описаны возможные для всех найденных типов волн трехволновые взаимодействия, удовлетворяющие условию синхронизма; приведены полученные дифференциальные операторы и коэффициенты для трехволновых взаимодействий во всех четырех приближениях силы Кориолиса; получены инкременты неустойчивостей типа распад и усиление.

Глава 4. Заключение

В первой главе диссертации развита теория течений тонкого слоя стратифицированной плазмы в поле силы тяжести со свободной границей во внешнем вертикальном магнитном поле при

наличии вращения. Получены магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды при разбиении плазмы на два слоя различной плотности. В частном случае равенства высот и плотностей каждого слоя магнитогидродинамические уравнения двуслойной мелкой воды сводятся к уравнениям однослойной мелкой воды во внешнем магнитном поле, полученным в [30, 31]. Показано, что, несмотря на двухкомпонентность и двумерность поля скоростей в каждом из слоев, магнитное поле является трехкомпонентным и осесимметричным в приближении мелкой воды.

Развитая теория обобщена на случай сферических течений в приближении бета-плоскости для силы Кориолиса. Изучены дисперсионные уравнения для двух стационарных течений: внешнее вертикальное магнитное поле и горизонтальное магнитное поле. Показано, что в линейном приближении полученная система допускает решение в виде волн магнито-Пуанкаре и магнито-Россби, характеристики которых модифицированы соотношением плотностей слоев плазмы. Показано, что волны магнито-Пуанкаре на β -плоскости определяются высокочастотными возмущениями, которыми ранее пренебрегали. Получено дисперсионное уравнение для волн магнито-Пуанкаре и приведено подробное сравнение волн Пуанкаре на β -плоскости с волнами Пуанкаре на f -плоскости. Найдено, что поправка к частоте, связанная со стратификацией во внешнем вертикальном магнитном поле, увеличивает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре при малых k_x , уменьшает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре при больших k_x и для любых k_x уменьшает групповую скорость и увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби. Поправка к частоте, связанная со стратификацией в горизонтальном магнитном поле, увеличивает фазовую и групповую скорости волны магнито-Пуанкаре, уменьшает групповую скорость волны магнито-Россби, увеличивает фазовую скорость волны магнито-Россби при малых k_x и уменьшает фазовую скорость волны магнито-Россби при больших k_x .

Подробный анализ условий синхронизма волн магнито-Пуанкаре и волн магнито-Россби продемонстрировал возможность трехволновых взаимодействий этих волн: две волны магнито-Пуанкаре и волна магнито-Россби; две волны магнито-Россби и волна магнито-Пуанкаре; три волны магнито-Россби. Методом многомасштабных разложений выписаны уравнения трехволновых взаимодействий и коэффициенты взаимодействия этих волн. Показано, что реализуются следующие неустойчивости: распад волны магнито-Пуанкаре на волну магнито-Россби и волну магнито-Пуанкаре; распад волны магнито-Россби на волну магнито-Пуанкаре и волну магнито-Россби; распад волны магнито-Россби на две волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Пуанкаре в поле волны магнито-Россби и волны магнито-Пуанкаре; усиление волны магнито-Россби в поле волны магнито-Пуанкаре и волны магнито-Россби; усиление волны магнито-Россби в поле двух волн магнито-Россби. Несмотря на универсальность полученных уравнений трехволновых взаимодействий, коэффициенты взаимодействия в полученных уравнениях, и как следствие, характеристики найденных неустойчивостей, различаются для каждого рассмотренного случая. Исследованные трехволновые взаимодействия могут играть важную роль в обмене энергией в течениях астрофизической плазмы.

Во второй главе диссертации исследованы магнитогидродинамические волны в стратифи-

цированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска (в устойчиво стратифицированном слое с линейным профилем плотности). Для течений на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (2.12), которые в отсутствие магнитного поля переходят в трехмерные инерционно-гравитационные волны в приближении Буссинеска в нейтральной жидкости (2.13), и трехмерные магнитострофические волны (2.14), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Найдено, что наличие магнитного поля нарушает условие перпендикулярности групповой скорости инерционно-гравитационных волн волновому вектору. В частном случае распространения волн в горизонтальной плоскости ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$) на стандартной f -плоскости найдены решения в виде волн Альфвена (2.19) и магнитогравитационных волн (2.20). В частном случае распространения волн в горизонтальной плоскости ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$) на нестандартной f -плоскости найдены решения в виде двумерных магнитных инерционно-гравитационных волн (2.25) и двумерных магнитострофических волн (2.26). В частном случае вертикальных возмущений на f -плоскости и на нестандартной f -плоскости найдены решения в виде магнитных инерционных волн с частотой ω_{z1} (2.16) и магнитных инерционных волн с частотой ω_{z2} (2.17). Для сферических течений на β -плоскости и на нестандартной β -плоскости также получены дисперсионные уравнения и найдены решения в виде магнитогравитационных волн (2.20), одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (2.65) и одномерных магнитострофических волн (2.66), аналогичных волнам в плоских течениях, волн магнито-Россби (2.46), которые в отсутствие магнитного поля превращаются в гидродинамические волны Россби (2.47), и волн магнито-Россби (2.48), исчезающих в отсутствие магнитного поля. Отметим, что в низкочастотном пределе найдены дисперсионные соотношения для трехмерных волн магнито-Россби на β -плоскости (2.50) и трехмерных волн магнито-Россби на нестандартной β -плоскости (2.67).

Качественный анализ полученных дисперсионных соотношений показывает условие синхронизма для следующих типов трехволновых взаимодействий. Для течений на f -плоскости реализуются три типа трехволновых взаимодействий: возникновение магнитогравитационной волны при взаимодействии альфвеновской волны и магнитогравитационной волны с частотой; возникновение магнитной инерционной волны (2.16) при взаимодействии магнитной инерционной волны (2.17) и магнитной инерционной волны (2.16); возникновение магнитной инерционной волны (2.17) при взаимодействии двух магнитных инерционных волн (2.17). На нестандартной f -плоскости при малой горизонтальной компоненте параметра Кориолиса ($f_H < 1$) при взаимодействии двух магнитострофических волн возникает магнитная инерционно-гравитационная волна. Кроме того, исследуя влияние горизонтальной составляющей параметра Кориолиса на общий вид дисперсионных кривых на нестандартной f -плоскости обнаружено, что помимо описанного выше трехволнового взаимодействия, возможно возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны при взаимодействии магнитострофической волны и магнитной инерционно-гравитационной волны при $f_H \gg 1$. Для сферических течений на β -плоскости реализуются следующие типы трехволновых взаимодействий: возникновение магнитогравитационной волны при взаимодействии волны Альфвена с магнитогравитационной волной; возникновение магнитогра-

витационной при взаимодействии волны магнито-Россби и магнитогравитационной волны; возникновение волны магнито-Россби при взаимодействии магнитогравитационной волны и волны магнито-Россби; возникновение волны магнито-Россби при взаимодействии двух волн магнито-Россби; возникновение низкочастотной волны магнито-Россби при взаимодействии двух низкочастотных волн магнито-Россби. На нестандартной β -плоскости существуют следующие типы трехволновых взаимодействий: взаимодействия одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн и одномерных магнитострофических волн, аналогичные взаимодействиям на нестандартной f -плоскости; взаимодействие трех низкочастотных волн магнито-Россби. Методом многомасштабных разложений получены амплитудные уравнения для взаимодействующих волн и инкременты двух типов неустойчивостей, имеющих место в системе: распад и усиление. Для каждого из найденных типов трехволновых взаимодействий показано отличие в коэффициентах и дифференциальных операторах в системе трехволновых взаимодействий.

В третьей главе получена система магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся плазмы с устойчивой стратификацией в поле силы тяжести в неупругом приближении. Исследованы магнитогидродинамические течения в слое сжимаемой устойчиво стратифицированной вращающейся плазмы с линейным профилем энтропии в неупругом приближении. Развита теория линейных волн в сжимаемых течениях на стандартной и нестандартной f -плоскостях, получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие различные типы волн. В приближении f -плоскости найдены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: сжимаемые трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (3.34), которые в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые трехмерные инерционно-гравитационные волны в нейтральной жидкости в неупругом приближении (3.35); трехмерные магнитострофические волны (3.36), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости; двумерные волны Альфвена (3.38); двумерные сжимаемые магнитогравитационные волны (3.39); вертикальные магнитные инерционные волны, аналогичные найденным в приближении Буссинеска (2.16,2.17). На нестандартной f -плоскости найдены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: одномерные волны Альфвена (3.47); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (3.48, 3.51), которые при равенстве нулю горизонтальной компоненты вектора Кориолиса переходят в одномерные сжимаемые магнито-гравитационные волны в (3.49,3.52), а в отсутствие магнитного поля переходят в сжимаемые инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (3.50, 3.53); одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (3.55) и магнитострофические волны (3.57), аналогичные найденным в приближении Буссинеска, с точностью до слагаемых с частотой Брента-Вяйсяля для сжимаемых течений. Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента-Вяйсяля N_θ^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления.

Для сферических течений в приближении стандартной и нестандартной β -плоскостях также развита теория линейных волн и получены дисперсионные уравнения. В приближении стан-

дартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: двумерные сжимаемые магнитогравитационные волны; волны магнито-Россби (2.46), которые в отсутствие магнитного поля переходят в стандартные гидродинамические волны Россби (2.47); волны магнито-Россби (2.48), не имеющие аналога в динамике нейтральной жидкости; одномерные волны Альфвена (3.68); низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (3.70). В приближении нестандартной β -плоскости получены дисперсионные соотношения, описывающие следующие типы волн: волны магнито-Россби (2.46, 2.48), аналогичные волнам на β -плоскости; двумерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с новыми законами дисперсии (3.80, 3.81), аналогичные волнам на нестандартной f -плоскости; одномерные сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные (3.83) и магнитострофические (3.85) волны с новыми законами дисперсии, включающими слагаемые с параметром β ; низкочастотные сжимаемые трехмерные волны магнито-Россби (3.86). Эффекты сжимаемости в найденных типах волн представлены слагаемыми с частотой Брента-Вяйсяля N_θ^2 для сжимаемых стратифицированных течений, зависящей как от исходного профиля плотности, так и от исходного профиля давления.

В рамках магнитогидродинамических уравнений сжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в неупругом приближении для каждого из четырех различных приближений силы Кориолиса развита нелинейная теория волновых процессов. Качественный анализ дисперсионных кривых всех найденных типов волн выявил существование следующих видов трехволновых взаимодействий, удовлетворяющих условию синхронизма. В приближении стандартной f -плоскости могут взаимодействовать три вертикальные магнитные волны с частотой ω_{z_2} , две вертикальные магнитные волны с частотой ω_{z_1} и вертикальная магнитная волна с частотой ω_{z_2} , две сжимаемые магнитогравитационные волны и волна Альфвена, сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig_{B_z}}$ и две сжимаемые магнитострофические волны с частотой $\omega_{mstr_{B_z}}$, сжимаемая магнитострофическая волна с частотой $\omega_{mstr_{B_z}}$ и две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig_{B_z}}$, три сжимаемые магнитострофические волны с частотой $\omega_{mstr_{B_z}}$. В приближении нестандартной f -плоскости могут взаимодействовать две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig_{x_1}}$ и волна Альфвена, три сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig_{x_1}}$, сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой ω_{mig_y} и две сжимаемые магнитострофические волны с частотой ω_{mstr_y} , две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой ω_{mig_y} и сжимаемая магнитострофическая волна с частотой ω_{mstr_y} при $f_H \gg 1$. В приближении стандартной β -плоскости могут взаимодействовать две сжимаемые магнито-гравитационные волны и волна Альфвена, три волны магнито-Россби, две сжимаемые магнито-гравитационные волны и волна магнито-Россби, две волны магнито-Россби и сжимаемая магнито-гравитационная волна, три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби. В приближении нестандартной β -плоскости могут взаимодействовать две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой $\omega_{mig'_1}$ и волна магнито-Россби, две волны магнито-Россби и сжимаемая магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'_1}$, две сжимаемые магнитные инерционно-гравитационные волны с частотой ω_{mig_β} и сжимаемая магнитострофическая волна с частотой ω_{mstr_β} , три сжимаемые низкочастотные волны магнито-Россби.

С использованием метода многомасштабных разложений получена универсальная система амплитудных уравнений для взаимодействующих волн. В каждом из четырех различных приближений силы Кориолиса выписаны дифференциальные операторы и коэффициенты в амплитудных уравнениях и для всех найденных типов трехволновых взаимодействий показано различие в них. Также в каждом из перечисленных случаев найдены инкременты двух типов неустойчивостей, имеющих место в системе — распад и усиление. Эффекты сжимаемости в найденных коэффициентах взаимодействия, дифференциальных операторах и инкрементах содержатся в слагаемых с потенциальной температурой (энтропией) и в собственном векторе системы магнитогидродинамических уравнений вращающейся сжимаемой астрофизической плазмы в неупругом приближении.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики "Базис" и Российским фондом фундаментальных исследований (грант №19-02-00016).

Автор глубоко признателен своему научному руководителю, Петросяну Аракелу Саркисовичу, за постановку задач, за помощь в исследованиях и в интерпретации результатов, за поддержку и готовность к научному общению на протяжении всего времени выполнения работы. Также автор благодарит коллектив сектора 53.9 за продуктивные обсуждения. Автор выражает благодарность всему коллективу кафедры Космической физики во главе с Л.М.Зеленым, в особенности А.М.Садовскому, Д.Р.Шкляру и Т.М.Буринской за курсы лекций по физике плазмы, прочитанные ими автору.

Список литературы

- [1] Miesch M. S., Gilman P. A. Thin-shell magnetohydrodynamic equations for the solar tachocline //Solar Physics. – 2004. – Т. 220. – №. 2. – С. 287-305.
- [2] Hughes D. W., Rosner R., Weiss N. O. (ed.). The solar tachocline. – Cambridge University Press, 2007.
- [3] Gilman P. A. Magnetohydrodynamic "shallow water" equations for the solar tachocline //The Astrophysical Journal Letters. – 2000. – Т. 544. – №. 1. – С. L79.
- [4] Dikpati M., Gilman P. A. Analysis of hydrodynamic stability of solar tachocline latitudinal differential rotation using a shallow-water model //The Astrophysical Journal. – 2001. – Т. 551. – №. 1. – С. 536.
- [5] Zaqarashvili T. V. et al. Rossby waves in "shallow water" magnetohydrodynamics //Astronomy & Astrophysics. – 2007. – Т. 470. – №. 3. – С. 815-820.
- [6] Zaqarashvili T. V. et al. Rossby waves and polar spots in rapidly rotating stars: implications for stellar wind evolution //Astronomy & Astrophysics. – 2011. – Т. 532. – С. A139.
- [7] Gilman, Peter A, Stability of baroclinic flows in a zonal magnetic field: Part I, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 24, 2, p. 101-118, 1967

- [8] Braithwaite J., Spruit H. C. Magnetic fields in non-convective regions of stars //Royal Society Open Science. – 2017. – Т. 4. – №. 2. – С. 160271.
- [9] Philidet J. et al. Magnetohydrodynamics of stably stratified regions in planets and stars //Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. – 2020. – Т. 114. – №. 3. – С. 336-355.
- [10] Böning V. G. A., Hu H., Gizon L. Signature of solar g modes in first-order p-mode frequency shifts //Astronomy & Astrophysics. – 2019. – Т. 629. – С. A26.
- [11] Löptien B. et al. Global-scale equatorial Rossby waves as an essential component of solar internal dynamics //Nature Astronomy. – 2018. – Т. 2. – №. 7. – С. 568-573.
- [12] Dikpati M. et al. Phase speed of magnetized rossby waves that cause solar seasons //The Astrophysical Journal. – 2018. – Т. 862. – №. 2. – С. 159.
- [13] Stone J. M. et al. Three-dimensional magnetohydrodynamical simulations of vertically stratified accretion disks //The Astrophysical Journal. – 1996. – Т. 463. – С. 656.
- [14] Batygin K., Stanley S., Stevenson D. J. Magnetically controlled circulation on hot extrasolar planets //The Astrophysical Journal. – 2013. – Т. 776. – №. 1. – С. 53.
- [15] McIntosh S. W. et al. The detection of Rossby-like waves on the Sun //Nature Astronomy. – 2017. – Т. 1. – №. 4. – С. 1-5.
- [16] Zaqarashvili T. V., Gurgenchvili E. Magneto-Rossby waves and seismology of solar interior //Frontiers in Astronomy and Space Sciences. – 2018. – Т. 5. – С. 7.
- [17] Gizon L., Fournier D., Albeikioni M. Effect of latitudinal differential rotation on solar Rossby waves: Critical layers, eigenfunctions, and momentum fluxes in the equatorial β plane //Astronomy & Astrophysics. – 2020. – Т. 642. – С. A178.
- [18] Zeitlin V. Remarks on rotating shallow-water magnetohydrodynamics //Nonlinear Processes in Geophysics. – 2013. – Т. 20. – №. 5. – С. 893-898.
- [19] Hunter S. Waves in shallow water magnetohydrodynamics : дис. – University of Leeds, 2015.
- [20] Карельский К. В., Петросян А. С., Тарасевич С. В. Нелинейная динамика магнитогидродинамических течений тяжелой жидкости в приближении мелкой воды //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2011. – Т. 140. – №. 3. – С. 606-620.
- [21] Karelsky K. V., Petrosyan A. S., Tarasevich S. V. Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic shallow water flows over an arbitrary surface //Physica Scripta. – 2013. – Т. 2013. – №. T155. – С. 014024.
- [22] De Sterck H. Hyperbolic theory of the “shallow water” magnetohydrodynamics equations //Physics of plasmas. – 2001. – Т. 8. – №. 7. – С. 3293-3304.

- [23] Dellar P. J. Dispersive shallow water magnetohydrodynamics //Physics of Plasmas. – 2003. – Т. 10. – №. 3. – С. 581-590.
- [24] Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large-scale eddies in shallow water //Journal of applied mechanics and technical physics. – 1991. – Т. 32. – №. 2. – С. 189-194.
- [25] Федотова М. А., Климачков Д. А., Петросян А. С. Магнитогиродинамическая теория мелкой воды для течений стратифицированной вращающейся астрофизической плазмы. приближение бета-плоскости, магнитные волны Россби //Физика плазмы. – 2020. – Т. 46. – №. 1. – С. 57-71.
- [26] Petrosyan A. et al. Shallow water magnetohydrodynamics in plasma astrophysics. Waves, turbulence, and zonal flows //Atmosphere. – 2020. – Т. 11. – №. 4. – С. 314.
- [27] Karelsky K. V., Petrosyan A. S., Tarasevich S. V. Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic flows of a heavy fluid on slope in the shallow water approximation //Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2014. – Т. 119. – №. 2. – С. 311-325.
- [28] Климачков Д. А., Петросян А. С. Нелинейные взаимодействия волн в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы со свободной границей в поле силы тяжести //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2016. – Т. 149. – №. 5. – С. 965-983.
- [29] Климачков Д. А., Петросян А. С. Нелинейная теория магнитогиродинамических течений сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2016. – Т. 150. – №. 3. – С. 602-624.
- [30] Климачков Д. А., Петросян А. С. Волны Россби в магнитной гидродинамике вращающейся плазмы в приближении мелкой воды //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2017. – Т. 152. – №. 4. – С. 705-721.
- [31] Klimachkov D. A., Petrosyan A. S. Parametric instabilities in shallow water magnetohydrodynamics of astrophysical plasma in external magnetic field //Physics Letters A. – 2017. – Т. 381. – №. 2. – С. 106-113.
- [32] Zaqarashvili T. V., Oliver R., Ballester J. L. Global shallow water magnetohydrodynamic waves in the solar tachocline //The Astrophysical Journal Letters. – 2009. – Т. 691. – №. 1. – С. L41.
- [33] Heng K., Spitkovsky A. Magnetohydrodynamic shallow water waves: linear analysis //The Astrophysical Journal. – 2009. – Т. 703. – №. 2. – С. 1819.
- [34] Márquez-Artavia X., Jones C. A., Tobias S. M. Rotating magnetic shallow water waves and instabilities in a sphere //Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. – 2017. – Т. 111. – №. 4. – С. 282-322.

- [35] Zaqarashvili T. Equatorial magnetohydrodynamic shallow water waves in the solar tachocline //The Astrophysical Journal. – 2018. – Т. 856. – №. 1. – С. 32.
- [36] Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. – Энергоатомиздат, 1989.
- [37] Vallis G. K., Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation - Cambridge University Press, 2006.
- [38] Zeitlin V. Geophysical fluid dynamics: understanding (almost) everything with rotating shallow water models. – Oxford University Press, 2018.
- [39] Kaladze T. D. et al. Zonal flows and magnetic fields driven by large-amplitude Rossby-Alfvén-Khantadze waves in the E-layer ionosphere //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2013. – Т. 118. – №. 12. – С. 7822-7833.
- [40] Balk A. M. Large-scale quasi-geostrophic magnetohydrodynamics //The Astrophysical Journal. – 2014. – Т. 796. – №. 2. – С. 143.
- [41] Должанский Ф. Основы геофизической гидродинамики. – Litres, 2018.
- [42] Незлин М. В. Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
- [43] Saio H. R-mode oscillations in uniformly rotating stars //The Astrophysical Journal. – 1982. – Т. 256. – С. 717-735.
- [44] Sturrock P. A. et al. Indications of r-mode oscillations in SOHO/MDI solar radius measurements //The Astrophysical Journal. – 2015. – Т. 804. – №. 1. – С. 47.
- [45] Wolff C. L. Linear r-mode oscillations in a differentially rotating star //The Astrophysical Journal. – 1998. – Т. 502. – №. 2. – С. 961.
- [46] Dikpati M. et al. The origin of the “seasons” in space weather //Scientific reports. – 2017. – Т. 7. – №. 1. – С. 1-7.
- [47] Онищенко О. Г. и др. Генерация крупномасштабных вихрей и зональных ветров в атмосферах планет //Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178. – №. 6. – С. 605-618.
- [48] Onishchenko O. G. et al. Generation of zonal flows by Rossby waves in the atmosphere //Nonlinear Processes in Geophysics. – 2004. – Т. 11. – №. 2. – С. 241-244.
- [49] Dikpati M., Charbonneau P. A Babcock-Leighton flux transport dynamo with solar-like differential rotation //The Astrophysical Journal. – 1999. – Т. 518. – №. 1. – С. 508.
- [50] Dikpati M. et al. Physics of magnetohydrodynamic Rossby waves in the sun //The Astrophysical Journal. – 2020. – Т. 896. – №. 2. – С. 141.

- [51] Mandal K., Hanasoge S. Properties of solar Rossby waves from normal mode coupling and characterizing its systematics //The Astrophysical Journal. – 2020. – T. 891. – №. 2. – C. 125.
- [52] Raphaldini B., Raupp C. F. M. Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic Rossby waves and the cyclic nature of solar magnetic activity //The Astrophysical Journal. – 2015. – T. 799. – №. 1. – C. 78.
- [53] Raphaldini B. et al. A new mechanism for maunder-like solar minima: phase synchronization dynamics in a simple nonlinear oscillator of magnetohydrodynamic Rossby waves //The Astrophysical Journal Letters. – 2020. – T. 890. – №. 1. – C. L13.
- [54] Cho J. Y. K. Atmospheric dynamics of tidally synchronized extrasolar planets //Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2008. – T. 366. – №. 1884. – C. 4477-4488.
- [55] Heng K., Workman J. Analytical models of exoplanetary atmospheres. I. atmospheric dynamics via the shallow water system //The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2014. – T. 213. – №. 2. – C. 27.
- [56] Heng K., Showman A. P. Atmospheric dynamics of hot exoplanets //Annual Review of Earth and Planetary Sciences. – 2015. – T. 43. – C. 509-540.
- [57] Andersson N., Kokkotas K., Schutz B. F. Gravitational radiation limit on the spin of young neutron stars //The Astrophysical Journal. – 1999. – T. 510. – №. 2. – C. 846.
- [58] Lou Y. Q. Magnetohydrodynamic tidal waves on a spinning magnetic compact star //The Astrophysical Journal Letters. – 2001. – T. 563. – №. 2. – C. L147.
- [59] Lou Y. Q., Lian B. Three-dimensional hydrodynamic instabilities in stellar core collapses //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2012. – T. 420. – №. 3. – C. 2147-2161.
- [60] Spitkovsky A., Levin Y., Ushomirsky G. Propagation of thermonuclear flames on rapidly rotating neutron stars: extreme weather during type I X-ray bursts //The Astrophysical Journal. – 2002. – T. 566. – №. 2. – C. 1018.
- [61] Inogamov N. A., Sunyaev R. A. Spread of matter over a neutron-star surface during disk accretion: Deceleration of rapid rotation //Astronomy Letters. – 2010. – T. 36. – №. 12. – C. 848-894.
- [62] Inogamov N. A., Sunyaev R. A. Spread of matter over a neutron-star surface during disk accretion: Deceleration of rapid rotation //Astronomy Letters. – 2010. – T. 36. – №. 12. – C. 848-894.
- [63] Liang Z. C. et al. Time-distance helioseismology of solar Rossby waves //Astronomy & Astrophysics. – 2019. – T. 626. – C. A3.
- [64] Dikpati M. et al. Role of interaction between magnetic Rossby waves and tachocline differential rotation in producing solar seasons //The Astrophysical Journal. – 2018. – T. 853. – №. 2. – C. 144.

- [65] Lou Y. Q. Rossby-type wave-induced periodicities in flare activities and sunspot areas or groups during solar maxima //The Astrophysical Journal. – 2000. – Т. 540. – №. 2. – С. 1102.
- [66] Dikpati M., McIntosh S. W. Space weather challenge and forecasting implications of Rossby waves //Space Weather. – 2020. – Т. 18. – №. 3. – С. e2018SW002109.
- [67] Dikpati M., McIntosh S. W., Wing S. Simulating Properties of “Seasonal” Variability in Solar Activity and Space Weather Impacts //Frontiers in Astronomy and Space Sciences. – 2021. – Т. 8. – С. 71.
- [68] Kuhn J. R. et al. Rossby waves on the Sun as revealed by solar ‘hills’ //Nature. – 2000. – Т. 405. – №. 6786. – С. 544-546.
- [69] Gibson S. E. et al. Solar physics from unconventional viewpoints //Frontiers in Astronomy and Space Sciences. – 2018. – Т. 5. – С. 32.
- [70] Zaqarashvili T. V. et al. Magnetic Rossby waves in the solar tachocline and Rieger-type periodicities //The Astrophysical Journal. – 2010. – Т. 709. – №. 2. – С. 749.
- [71] Zaqarashvili T. V. et al. Long-term variation in the Sun’s activity caused by magnetic Rossby waves in the tachocline //The Astrophysical Journal Letters. – 2015. – Т. 805. – №. 2. – С. L14.
- [72] McIntosh S. W. et al. The solar magnetic activity band interaction and instabilities that shape quasi-periodic variability //Nature Communications. – 2015. – Т. 6. – №. 1. – С. 1-11.
- [73] Климачков Д. А., Петросян А. С. КРУПНОМАСШТАБНАЯ СЖИМАЕМОСТЬ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2018. – Т. 154. – №. 6. – С. 1239-1257.
- [74] Falkovich G. Fluid mechanics: A short course for physicists. – Cambridge University Press, 2011.
- [75] Ostrovsky L. Asymptotic perturbation theory of waves. – World Scientific, 2014.
- [76] Федотова М. А., Петросян А. С. Волновые процессы в трехмерных стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска //Журн. экспериментальной и теоретической физики. – 2020. – Т. 158. – №. 2 (8). – С. 374.
- [77] Billant P., Chomaz J. M. Self-similarity of strongly stratified inviscid flows //Physics of fluids. – 2001. – Т. 13. – №. 6. – С. 1645-1651.
- [78] Yano J. I. Inertio-gravity waves under the non-traditional-plane approximation: singularity in the large-scale limit //Journal of Fluid Mechanics. – 2017. – Т. 810. – С. 475-488.
- [79] Lee S., Takada R. Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations //Indiana University Mathematics Journal. – 2017. – С. 2037-2070.

- [80] Takehiro S. Penetration of Alfvén waves into an upper stably-stratified layer excited by magnetoconvection in rotating spherical shells //Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2015. – Т. 241. – С. 37-43.
- [81] Takehiro S., Sasaki Y. Penetration of steady fluid motions into an outer stable layer excited by MHD thermal convection in rotating spherical shells //Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2018. – Т. 276. – С. 258-264.
- [82] Nakagawa T. Effect of a stably stratified layer near the outer boundary in numerical simulations of a magnetohydrodynamic dynamo in a rotating spherical shell and its implications for Earth's core //Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 2011. – Т. 187. – №. 3-4. – С. 342-352.
- [83] Berkoff N. A. The Anelastic Approximation: Magnetic Buoyancy and Magnetoconvection : дис. – University of Leeds, 2011.
- [84] Spiegel E. A., Veronis G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid //The Astrophysical Journal. – 1960. – Т. 131. – С. 442.
- [85] Spiegel E. A., Weiss N. O. Magnetic buoyancy and the Boussinesq approximation //Geophysical Astrophysical Fluid Dynamics. – 1982. – Т. 22. – №. 3-4. – С. 219-234.
- [86] К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, Нелинейная динамика течений тяжелого сжимаемого газа в приближении мелкой воды, ЖЭТФ 141, 1206 (2012).
- [87] Карельский, К. В., А. С. Петросян, А. В. Черняк, Нелинейная теория течений сжимаемого газа в поле силы тяжести в приближении мелкой воды над неоднородной границей, Журнал экспериментальной и теоретической физики 143.4 (2013): 779-798.
- [88] Федотова М. А., Петросян А. С. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ С УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ //Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2020. – Т. 158. – №. 6. – С. 1188-1214.
- [89] Brown B. P., Vasil G. M., Zweibel E. G. Energy conservation and gravity waves in sound-proof treatments of stellar interiors. Part I. Anelastic approximations //The Astrophysical Journal. – 2012. – Т. 756. – №. 2. – С. 109.
- [90] Almgren A. S. et al. A new low Mach number approach in astrophysics //Computing in Science & Engineering. – 2009. – Т. 11. – №. 2. – С. 24-33.
- [91] Batchelor G. K. The conditions for dynamical similarity of motions of a frictionless perfect gas atmosphere //Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 1953. – Т. 79. – №. 340. – С. 224-235.
- [92] Charney J. G., Ogura Y. A numerical model for thermal convection in the atmosphere //Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II. – 1960. – Т. 38. – №. 6. – С. 19a-19a.

- [93] Gough D. O. The anelastic approximation for thermal convection //Journal of Atmospheric Sciences. – 1969. – T. 26. – №. 3. – C. 448-456.
- [94] Bannon P. R. On the anelastic approximation for a compressible atmosphere //Journal of Atmospheric Sciences. – 1996. – T. 53. – №. 23. – C. 3618-3628.
- [95] Calkins M. A., Julien K., Marti P. The breakdown of the anelastic approximation in rotating compressible convection: implications for astrophysical systems //Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2015. – T. 471. – №. 2175. – C. 20140689.
- [96] Paolucci S. Filtering of sound from the Navier-Stokes equations //NASA STI/Recon Technical Report N. – 1982. – T. 83. – C. 26036.
- [97] Botta N., Klein R., Almgren A. Dry atmosphere asymptotics. – Potsdam Inst. for Climate Impact Research, 1999.
- [98] Klein R. et al. Asymptotic adaptive methods for multi-scale problems in fluid mechanics //Journal of Engineering Mathematics. – 2001. – T. 39. – №. 1. – C. 261-343.
- [99] Braginsky S. I., Roberts P. H. GEOPHYS ASTROPHYS FLUID DYN //Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. – 1995. – T. 79. – C. 1-97.
- [100] Glatzmaier G. A., Roberts P. H. An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1996. – T. 97. – №. 1-3. – C. 81-94.
- [101] Olson P., Christensen U. R. Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos //Earth and Planetary Science Letters. – 2006. – T. 250. – №. 3-4. – C. 561-571.
- [102] Jones C. A., Kuzanyan K. M., Mitchell R. H. Linear theory of compressible convection in rapidly rotating spherical shells, using the anelastic approximation //Journal of Fluid Mechanics. – 2009. – T. 634. – C. 291-319.
- [103] Gilman P. A., Glatzmaier G. A. Compressible convection in a rotating spherical shell. I-Anelastic equations. II-A linear anelastic model. III-Analytic model for compressible vorticity waves //The Astrophysical Journal Supplement Series. – 1981. – T. 45. – C. 335-388.
- [104] Yadav R. K., Bloxham J. Deep rotating convection generates the polar hexagon on Saturn //Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2020. – T. 117. – №. 25. – C. 13991-13996.
- [105] Glatzmaier G. A. Numerical simulations of stellar convective dynamos. I. The model and method //Journal of Computational Physics. – 1984. – T. 55. – №. 3. – C. 461-484.
- [106] Lantz S. R., Fan Y. Anelastic magnetohydrodynamic equations for modeling solar and stellar convection zones //The Astrophysical Journal Supplement Series. – 1999. – T. 121. – №. 1. – C. 247.

- [107] Miesch M. S. et al. Three-dimensional spherical simulations of solar convection. I. Differential rotation and pattern evolution achieved with laminar and turbulent states //The astrophysical journal. – 2000. – Т. 532. – №. 1. – С. 593.
- [108] Brun A. S., Miesch M. S., Toomre J. Global-scale turbulent convection and magnetic dynamo action in the solar envelope //The Astrophysical Journal. – 2004. – Т. 614. – №. 2. – С. 1073.
- [109] Brown B. P. et al. Rapidly rotating suns and active nests of convection //The Astrophysical Journal. – 2008. – Т. 689. – №. 2. – С. 1354.
- [110] Brown B. P. et al. Magnetic cycles in a convective dynamo simulation of a young solar-type star //The Astrophysical Journal. – 2011. – Т. 731. – №. 1. – С. 69.
- [111] Smolarkiewicz P. K., Charbonneau P. EULAG, a computational model for multiscale flows: An MHD extension //Journal of Computational Physics. – 2013. – Т. 236. – С. 608-623.
- [112] Goldstein J., Townsend R. H. D., Zweibel E. G. The Tayler Instability in the Anelastic Approximation //The Astrophysical Journal. – 2019. – Т. 881. – №. 1. – С. 66.
- [113] Fedotova M., Klimachkov D., Petrosyan A. Variable Density Flows in Rotating Astrophysical Plasma. Linear Waves and Resonant Phenomena //Universe. – 2021. – Т. 7. – №. 4. – С. 87.
- [114] Федотова М. А., Климачков Д. А., Петросян А. С. Волны Россби в магнитной гидродинамике стратифицированной плазмы в приближении двуслойной мелкой воды //Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 19–25 ноября 2018 года. Фундаментальная и прикладная физика.— 2018. – С. 227-229.
- [115] Федотова М. А., Климачков Д. А., Петросян А. С. Магнитогидродинамическая теория двуслойной мелкой воды для вращающейся стратифицированной плазмы. Трехволновые взаимодействия волн Россби. //Сборник тезисов XVI конференции молодых учёных. Фундаментальные и прикладные космические исследования.— 2019. – С. 178.
- [116] Федотова М. А., Климачков Д. А., Петросян А. С. Магнитогидродинамическая теория мелкой воды. Волны Россби //Труды 62-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 18–24 ноября 2019 года. Фундаментальная и прикладная физика.— 2019. – С. 253.
- [117] Федотова М. А., Климачков Д. А., Петросян А. С. Приближение двуслойной мелкой воды для стратифицированных течений плазмы во внешнем магнитном поле. Волны Россби. //XVI Курчатовская междисциплинарная молодежная научная школа. Сборник аннотаций. 2–5 декабря 2019 года. Термоядерные реакторы и физика плазмы.— 2019. – С. 162.
- [118] Fedotova, M., Klimachkov, D., Petrosyan, A., Resonant interactions of magneto-Poincaré and magneto-Rossby waves in quasi-two-dimensional rotating astrophysical plasma, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 509(1), p.312, 2022

- [119] Федотова М. А., Петросян А. С. Волновые процессы во вращающейся плазме в приближении Буссинеска //Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 23–29 ноября 2020 года. Фундаментальная и прикладная физика.— 2020. – С. 128.
- [120] Федотова М. А., Петросян А. С. Линейные волны в трёхмерных с тратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска //Фундаментальные и прикладные космические исследования. – 2020. – С. 146-148.
- [121] Федотова М.А., Петросян А.С. Линейные волны в трёхмерных стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска. //Сборник тезисов XVII конференции молодых учёных. Фундаментальные и прикладные космические исследования.— 2020. – С. 62.
- [122] Fedotova M., Petrosyan A. Linear and nonlinear waves in three-dimensional stratified rotating astrophysical flows in the Boussinesq approximation //EGU General Assembly Conference Abstracts. – 2020. – С. 1540.
- [123] Fedotova M., Petrosyan A. Magnetohydrodynamic Waves in Rotating Stratified Fows of Astrophysical Plasma in the Boussinesq Approximation //AGU Fall Meeting Abstracts. – 2020. – T. 2020. – С. NG011-04.
- [124] Федотова М. А., Петросян А. С. Волны в сжимаемых устойчиво стратифицированных течениях вращающейся плазмы. //Сборник тезисов XVIII конференции молодых учёных. Фундаментальные и прикладные космические исследования.— 2021. – С. 152.
- [125] Raymond D. J., Physics 589 - Geophysical Fluid Dynamics. Wave modes of a resting atmosphere. Chapter 3: Sound, Inertia-Gravity Waves, and Lamb Waves // Physics Internal Website. – <http://kestrel.nmt.edu/raymond/classes/ph589/notes/ssmodes/ssmodes.pdf>.
- [126] Newell A. C. Rossby wave packet interactions //Journal of Fluid Mechanics. – 1969. – Т. 35. – №. 2. – С. 255-271.