На правах рукописи

Илларионов Егор Александрович

Количественные показатели эволюции магнитных полей на Солнце

01.03.03 – Физика Солнца

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель

д.ф.-м.н., проф. Соколов Дмитрий Дмитриевич

Официальные оппоненты

к.ф.-м.н. Абраменко Валентина Изосимовна
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Крымская астрофизическая обсерватория Российской академии наук

д.ф.-м.н., проф. Петросян Аракел Саркисович
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук

Ведущая организация

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 25 января 2017 года в 11 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.113.03 Института космических исследований Российской академии наук по адресу: 117997, Москва, ул. Профсоюзная 84/32.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.

Автореферат разослан «__» __________ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Т.М. Буринская

Актуальность

Современный взгляд на природу многих активных процессов, наблюдаемых на Солнце, предполагает присутствие магнитных полей в качестве основного фактора, влияющего на их формирование. Многообразие и выраженный нестационарный характер активных процессов является свидетельством сложной структуры магнитных полей. Изучать эту структуру можно качественными методами, опираясь на современные и исторические данные о солнечной активности, и на основе теоретической модели эволюции магнитного поля, называемой теорией солнечного динамо. Для того, чтобы согласовать эти два подхода, необходимо иметь возможность их сравнения в количественных показателях.

В части наблюдательных данных сложность получения количественных значений обычно обусловлена разного рода ограниченностью данных, например, по времени или по числу наблюдаемых компонент вектора, и степенью развития методов массовой алгоритмической обработки. В то же время, изучение моделей физических систем, в который присутствует развитая турбулентность, существенно затрудняется обстоятельствами другого рода. С одной стороны, необходимый математический инструментарий, с помощью которого можно было бы эффективным образом описывать подобные процессы, окончательно оформился лишь к середине 20 века. Речь, в первую очередь, идет о вероятностном и статистическом подходе, закрепленном в работах А.Н. Колмогорова. А с другой стороны, далеко не очевидным представлялся и сам факт того, что случайные флуктуации в системе могут оказывать ненулевое результирующее действие.

Однако как показали уже первые целенаправленные исследования, случайности в среде могут не просто влиять, но и определять динамику системы и служить источником накопления энергии и прогрессивного усиления протекающих процессов. Эти результаты оказались столь неожиданными, что привели к мощному всплеску интереса к интеграции вероятностного подхода в изучение динамики.

Начиная с середины 20 века, бурно стали развиваться исследования, стоящие на стыке физических и вероятностно-статистических подходов. Впоследствии они закрепились в самостоятельные разделы, такие как статистическая гидромеханика, магнитная гидродинамика и другие. Этот союз в течение короткого промежутка времени дал множество замечательных результатов, которые успели стать классическими и лечь в основу представлений о физике данного раздела.

Одним из результатов стало понимание условий и демонстрация факта усилению векторных полей, переносимых случайной средой. Оказалось, что случайности служат основным механизмом появления выраженных структур в среде и получаемая картина разительным образом отличается от ожидаемой более или менее равномерной. Эти структуры имеют ряд особенностей: они появляются в виде пиков в случайных местах и в случайные моменты времени, в то время как промежутки между пиками характеризуются большой протяженностью и малой интенсивностью. На это явление, получившее название перемежаемости, в свое время обратил внимание, в частности, Я.Б. Зельдович в контексте магнитных задач и изучения уравнений переноса.

Интенсивность и частота появления пиков оказывается нетипичной для гауссовского случая, который по общепринятой традиции полагается в качестве основного распределения. Более того, если в гауссовском случае подобными выбросами можно пренебречь, то в условиях перемежаемой величины напротив, в этих пиках сосредотачивается почти вся энергия генерируемого поля, и именно они вносят основной вклад в среднее значение поля и его средний квадрат. Хорошей иллюстрацией данного явления служат солнечные пятна, которые занимают небольшие участки на поверхности Солнца, но при этом концентрируют магнитное поле, в сотни и тысячи раз превышающим уровень спокойного Солнца.

Другой особенностью перемежаемой величины является, опять же по сравнению с гауссовским случаем, нетипичный рост не только первого и второго момента, но и старших статистических моментов. Моменты растут прогрессивным образом, и второй момент растет быстрее квадрата первого, четвертый – быстрее квадрата второго и произведение первого с третьим и т.д. Примеры подобных величин и их связь, например, с задачей распространения света во Вселенной с неоднородностями, получили развитие в работах Я.Б. Зельдовича и продолжали исследоваться его учениками.

Нужно отметить, что, благодаря физической интуиции, значительную часть утверждений удавалось выводить из соображений размерности и общих физических принципов. При этом, однако, крайне редко удавалось получить точные числовые соотношения, и еще реже – пронаблюдать их в эксперименте. Дело в том, что многие явления носят пороговый характер, т.е. наступают при превышении некоторых критических значений, которые крайне трудно достичь в лабораторных условиях. В этой связи большие надежды возлагаются на численный эксперимент и математическое моделирование.

В то же время, математическое развитие вопроса шло, как это часто бывает, своим чередом и вне контекста астрономических задач. Отправной точной принято считать цикл математических работ Г. Ферстенберга, посвященный теории произведения случайных матриц. Теоремы, которые ему удалось доказать, открывают прямой путь по вычислению показателей роста нормы произведения случайных матриц, что является аналогом задачи о росте векторных полей в условиях т.н. короткокоррелированного приближения.

Долгое время результаты Ферстенберга оставались мало задействованными в контексте прикладных задач, поскольку были сформулированы на достаточно тяжелом математическом языке и предполагали работу со сложными объектами. Получение ответов аналитическим путем представлялось возможным лишь в простейших случаях, а более менее интересные с физической точки зрения задачи не поддавались анализу без привлечения численных методов. В работах В.Н. Тутубалина удалось сформулировать результаты Ферстенберга в более простых терминах и адаптировать их под конкретные задачи, но и здесь все упиралось в решение нетривиальных интегральных уравнений.

Таким образом, применение аппарата случайных матриц к задачам о росте векторных полей является актуальным направлением и представляет собой практически неисследованную область.

Наравне с модельными задачами мы изучаем вопрос о вычислении количественных показателей в реальных наблюдаемых системах. Самым наглядным примером нетривиальной эволюции векторного поля служит феномен 11-летней солнечной цикличности. Гипотеза периодичности появления максимумов и минимумов в числе солнечных пятен была высказана еще в 19 веке, и с тех пор ведется пристальное наблюдение за особенностями каждого цикла. При этом само понятие цикла остается весьма расплывчатым и допускает известные вариации в определении его границ, что влечет за собой и неоднозначность в определении каких-либо количественных показателей. Поэтому актуальны работы по алгоритмическому решению данной задачи. Особый интерес связан с применением этих методов к историческим данным, для которых известно далеко не все то, что можно использовать при работе с современными данными. Можно надеяться на то, что разработка алгоритмов, устойчивых к различным погрешностям и способных обучаться на малых выборках, позволит восстановить важную информацию о характере солнечной активности до начала 20 века.

С точки зрения теории солнечного динамо, видимые периодические структуры в распределении пятен на широтно-временной диаграмме отражают только одну часть полного цикла. Вторая его компонента связана с механизмом альфа-эффекта, который проявляется в систематическом наклоне биполярных областей по отношению к солнечному экватору. Получение количественных оценок величины угла наклона крайне осложнено по причине неустойчивости магнитных структур и малости характерных значений угла наклона. По сути, задача сводится к сбору большого количества примеров биполярных областей и разработке специальных методов обработки данным с целью снижения уровня шума и получения устойчивых результатов.

Цель диссертации

Целью работы является количественная оценка показателей, характеризующих эволюцию магнитных полей на Солнце. Количественные значения получаются в результате изучения модели процесса и путем интерпретации данных натурных наблюдений. Поэтому работа предполагает как теоретическое исследование вопросов роста векторных полей, так и согласование моделей с наблюдательными данными.

В рамках цели диссертации ставятся следующие задачи:

1. Получить количественное значение показателя роста поля Якоби для модельного уравнения Якоби со случайным параметром кривизны в рамках теории произведения случайных матриц.

2. Получить оценки скорости роста магнитного поля и старших статистических моментов в однородном и изотропном поле скоростей.

3. Изучить структуру солнечных циклов и волн активности на основе современных и исторических наблюдений о пятенной активности.

4. Построить распределение параметров биполярных областей.

5. Установить взаимосвязь между параметрами биполярных областей.

6. Получить оценку для величины альфа-эффекта на основе данных о распределении тилт-угла биполярных областей.

Решение поставленных задач предполагает разработку новых и совершенствование известных методов обработки наблюдательных данных, адаптацию современных методик анализа больших массивов данных с учетом представлений о физике изучаемых процессов.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена плотность распределения инвариантной меры для модельного уравнения Якоби со случайным параметром кривизны, на основе найденной меры получены оценки скорости роста поля Якоби.

2. Найдены оценки скорости роста магнитного поля и старших статистических моментов в однородном и изотропном поле скоростей путем сведения к задаче о росте произведения случайных матриц.

3. Определены характеристики циклов и волн активности по современным и архивным данным на основе алгоритмической процедуры выделения структур на солнечных баттерфляй-диаграммах.

4. Представлено широтно-временное распределение тилт-угла биполярных областей на Солнце, обнаружены различия свойств больших и малых биполярных областей.

Научная новизна

В работе впервые удалось получить количественные значения скорости роста поля Якоби со случайным параметром кривизны на основе расчета по его точному аналитическому выражению. Это оказалось возможным благодаря реализации численной схемы, позволяющей найти инвариантную меру, задающую искомую скорость роста. Ранее для нахождения скорости роста использовались методы типа Монте-Карло, дающие лишь приближенную оценку, в предположении, что число реализаций достаточно велико. Наше сравнение показало высокую степень согласия оценочных значений и результатов интегрирования по инвариантной мере, что подтверждает сложившиеся представления относительно характера эволюции поля Якоби.

Изучение модельного уравнения Якоби позволило предложить дальнейшее применение теории произведения случайных матриц к вычислению скоростей роста статистических моментов магнитного поля в случайном потоке.

Здесь удалось показать, что в предположении об однородности и изотропности поля скоростей и в отсутствие магнитной диффузии, скорости роста магнитного поля и моментов старшего порядка выводятся аналитическим путем. Получены оценки для показателей роста.

Обработка и статистический анализ наблюдательных данных о солнечной магнитной активности обнаружила новые сведения, обогащающие представление о режимах работы солнечного динамо. Выделим основные положения: 1) впервые была предложена методика кластерного анализа для разделения волн активности на солнечных баттерфляй-диаграммах, предложенный метод не требует знаний о полярности пятен; 2) применение методики разделения волн активности позволило показать структуру циклов по данным исторических наблюдений и выявить необычное строение одного из циклов; 3) построены широтно-временные диаграммы распределения тилт-угла биполярных областей, изучена связь с интенсивностью солнечных циклов; 4) обнаружено различие больший и малых биполярных областей по широкому спектру свойств.

Практическая и теоретическая ценность результатов

Ценность результатов диссертации складывается из нескольких факторов.

Во-первых, близость получаемых результатов вычисления показателей роста поля Якоби путем интегрирования по инвариантной меры и путем моделирования методами Монте-Карло обосновывает возможность применения генераторов случайных чисел для изучения явления перемежаемости в данном примере. Аналогичные численные эксперименты позволят ответить на более тонкие вопросы о росте старших статистических моментов.

Во-вторых, применение теории произведения случайных матриц к задаче об эволюции магнитного поля продемонстрировало возможности данного подхода и открыло прямой путь по численному и аналитическому изучению эволюции магнитного поля в более сложно устроенных течениях.

В-третьих, представляют интерес как сами методики, так и результаты, полученные в ходе обработки наблюдательных данных по солнечной активности. Предложенный алгоритмический метод обработки солнечных баттерфляй-диаграмм выделяет границы циклов и волн активности, не опираясь на данные о знаке магнитного поля в пятне. Эта особенность позволяет применять алгоритм для распознавания циклов на основе исторических данных. В целом, применение алгоритмической процедуры позволяет устранять ошибки и искажения, допускаемые при проведении границ визуальной оценкой.

Представленные в работе результаты по изучению статистики биполярных областей на Солнце ориентируют наблюдателей на изучение малых областей, которые ранее предполагались распределенными случайным образом, и потому считались малоинтересными для исследования. Детальное наблюдение малых областей, потребует, безусловно, разработки новых более совершенных телескопов с высоким разрешением и более качественных методов обработки получаемого сигнала.

Степень достоверности и апробация работы

Предложенные методы и полученные результаты прошли апробацию и обсуждение на международных конференциях: «40th COSPAR Scientific Assembly» (Москва, 2014), «Space Climate 6 Symposium» (Леви, 2016), «Helicity, Structures and Singularity in Fliud and Plasma Dynamics» (Венеция, 2016), «SCOSTEP'S 13th Quadrennial Solar-Terrestrial Physics Symposium» (Сиань, 2014), «Физика Солнца: теория и наблюдения» (Научный, 2015), «Knots and Links in Fluid Flows — from helicity to knot energies» (Москва, 2015), «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность» (Москва, 2014), «Differential Rotation and Magnetism across the HR Diagram» (Стокгольм, 2013), «Теория вероятностей и ее приложения» (Москва, 2012), «Magnetic Fields in stars and exoplanets. Future directions in observational and theoretical studies» (Потсдам, 2011), «Galactic magnetism – Perspectives of observations and modeling» (Пущино, 2011); на всероссийских конференциях: «Молодежная научная школа-конференция при 40-й Ассамблее COSPAR» (Москва, 2014), «XII Колмогоровские чтения» (Ярославль, 2014), «Физика плазмы в солнечной системе» (Москва, 2014), «XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред» (Пермь, 2013), «Всероссийская конференция Солнечная и солнечно-земная физика» (Санкт-Петербург, 2012); на научных семинарах, проводимых в МГУ, НИВЦ МГУ, ИЗМИРАН, ГАО РАН.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из четырех глав, введения и заключения. **В первой главе** излагается современное состояние проблемы изучения солнечных магнитных полей и обсуждаются исторические предпосылки, оказавшие влияние на развитие этой области. Обнаруживается тесная связь рассматриваемой задачи с задачами изучения поведения векторных полей в случайных средах. Случайная среда оказывается удобной моделью описания систем с развитой турбулентностью. В случайной среде, вопреки названию, обнаруживаются элементы порядка и специфические структуры, которые обуславливают ряд удивительных свойств подобных систем. К таким свойствам относится явление перемежаемости, состоящее в том, что в среде образуются локальные участки, в которых переносимое средой поле существенно усиливается. Подобные пики перемежаются с обширными участками, в которых значение поля мало. Оказывается, что именно эти пики концентрируют в себе почти всю энергию поля и вносят основной вклад в его среднее значение. В первой главе обсуждаются примеры таких систем и их связь задачей изучения солнечных магнитных полей.

Специфика случайных сред накладывает ряд требований к методам их исследования. Если на качественном уровне описание эволюции таких систем может быть выведено из физических соображений, то переход к количественным выражениям во многих случаях является открытой проблемой. Обычно здесь прибегают к методам численного моделирования и методам типа Монте-Карло. Этот подход, однако, не гарантирует, что смоделированного числа отдельных реализаций будет достаточно для адекватной оценки, например, среднего значения поля или среднего квадрата. Очевидно, здесь требуется некий иной инструментарий, который мог бы ответить на этот вопрос.

Такой инструментарий существует в математической теории произведения случайных матриц, в основе которой лежат теоремы Ферстенберга. В терминах произведения случайных матриц определяются показатели роста векторных полей (показатели Ляпунова), а теоремы Ферстенберга открывают путь к вычислению этих показателей. Трудность состоит в том, что формула для вычисления основывается на некотором специфическом понятии – инвариантной мере, выразить которую аналитически можно лишь в ряде простейших задач, которые, впрочем, имеют мало общего с интересными для физики приложениями. В остальных случаях необходим трудоемкий численный расчет. По этой причине данный путь оставался мало разработанным. Одной из своих задач диссертация призвана восполнить этот пробел.

Удобным объектом для изучения приложения теории произведения случайных матриц является уравнение Якоби со случайным параметром кривизны, на котором воспроизводятся основные свойства явления перемежаемости. В первой главе дается обзор методов и результатов, полученных авторами предыдущий исследований.

Далее в первой главе показывается, как аналогичные постановки вопросов, приводящие к необходимости рассмотрения произведения большого числа независимых случайных матриц, возникают в задачах по изучению эволюции магнитных полей. Обзор результатов показывает, что даже на примере простейшего уравнения эволюции оценки для скоростей роста поля и его старший статистических моментов удавалось выразить лишь частично для некоторых моментов. Тем самым сохраняется актуальность нахождения скоростей роста всех моментов поля.

Эволюция солнечных магнитных полей задействует в себе ряд специфичных механизмов, которые описываются в рамках теории солнечного динамо. К таким механизмам относятся, например, дифференциальное вращение и альфа-эффект. Наблюдательные данные позволяют судить о характере работы этих механизмов. Здесь, однако, остро встает вопрос об интерпретации наблюдательных данных. Дело в том, что для измерения эффекта может требоваться выборка больших размеров, в то время как единичные данные весьма зашумлены. Типичным примером является угол наклона биполярных областей. Но даже в более общих вопросах, например, определении границ солнечных циклов, также нет единого мнения. Обзор современного состояния проблемы ясно показывает необходимость формализации ряда понятий и внедрения алгоритмических процедур анализа данных. В первой главе рассматривается опыт работы как с наблюдательными данными, полученными со спутников и наземных телескопов, так и с историческими данными, восстановленными из архивных записей и зарисовок.

Вторая глава посвящена приложению теорем о росте нормы произведения случайных матриц (теоремы Ферстенберга) к задачам о вычислении показателей роста векторных полей, задаваемых системами дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами.

В начале главы кратко излагается суть и основные понятия теории произведения случайных матриц. Вводится понятие инвариантной меры. Показывается, каким образом задача нахождения показателя роста (старшего показателя Ляпунова) сводится к задаче нахождения инвариантной меры. Далее формулируется ключевая теорема Ферстенберга, утверждающая строгую положительность показателя роста, и приводится выражение для показателя Ляпунова через интеграл по инвариантной мере.

Трудность получения количественного значения для показателя Ляпунова состоит в том, что инвариантная мера определяется на пространстве со сложной структурой и выражается через решения некоторого интегрального уравнения. В явном виде получить аналитическое представление удается лишь в ряде простейших случаем. Однако уже для уравнения Якоби вычисление упирается в задачу о нахождении обратного отображения для негладких функций и решении интегральных уравнений с быстро меняющимся ядром. По этой причине предыдущие попытки количественной оценки скорости роста сводились к прямому моделированию и усреднению решений уравнения Якоби методами типа Монте-Карло.

Первый блок результатов второй главы составляет вычисление инвариантной меры для уравнения Якоби со случайным параметром кривизны. Рассматривается уравнение Якоби

$$y''(x) + K(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

в котором параметр кривизны K задан в виде обновляющегося случайного процесса на луче $x > 0$ с обновлением в целочисленных точках. Это означает, что на полуинтервалах вида $[n-1, n)$ значения K полагаются постоянными и равными K_n, где K_n – независимые одинаково распределенные случайные величины. Уравнение (1) приводится к системе уравнений первого порядка, решение которой выписывается через произведение фундаментальных матриц. Фундаментальные матрицы имеют вид

$$B(n-1, n) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K_n} & -\sqrt{K_n}\sin\sqrt{K_n} \\ \sin\sqrt{K_n}\sqrt{K_n} & \cos\sqrt{K_n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

в случае неотрицательных значений K_n и

$$B(n-1, n) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sqrt{-K_n} & \sqrt{-K_n}\operatorname{sh}\sqrt{-K_n} \\ \operatorname{sh}\sqrt{-K_n}/\sqrt{-K_n} & \operatorname{ch}\sqrt{-K_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

для $K_n < 0$.

Применимость теоремы Ферстенберга к матрицам вида (2), (3) требует определенного математического обоснования. В работе рассмотрен важный частный случай, когда параметр кривизны распределен равномерно с нулевым средним или нормально $N(0, 1)$. Ряд математических выкладок, приведенных в работе, на самом деле демонстрируют применимость теоремы Ферстенберга и в более широком классе распределений, лишь бы существовало и было конечным математическое ожидание случайной величины K и K с положительной вероятностью могло принимать значения из некоторой окрестности нуля.

Теорема Ферстенберга позволяет находить показатель Ляпунова, вычисляя интеграл

$$\lambda = \iint \log(w \circ g) \mathrm{d}\mu(g) \mathrm{d}\nu(w). \tag{4}$$

В выражении (4) внутренний интеграл берется по мере $\mu(g)$, определенной на группе матриц, а внешний – по инвариантной мере $\nu(w)$, задаваемой пространстве, на которое действуют элементы группы матриц. В случае с уравнением Якоби таким пространством является единичная окружность с отождественными диаметрально противоположными точками.

Далее во второй главе описывается процедура численного нахождения инвариантной меры. Инвариантная мера ищется как стационарное распределение для цепи Маркова порождаемой действием случайных матриц на единичные векторы (вектора можно отождествлять с точками на единичной окружности). Чтобы выразить стационарное распределение, достаточно знать переходную плотность цепи Маркова.

Для нахождения переходной плотности необходимо уметь вычислять обратное отображение для функции перехода по состояниям этой цепи Маркова. Это отображение представляется возможным найти только численно, что составляет основную трудность решаемой задачи. Дело в том, что наличие у этой функции целого ряда особенностей, например, вертикальных асимптот, допускает множественность прообразов и требует использования специфических численных схем. Более того, в зависимости от амплитуды возможных уклонений параметра K, размер области, дающей основной вклад в плотность распределения, приближается к пределам точности машинной арифметики. Нахождение обратных отображений в подобных областях требует существенной модификации численных схем. Детали этой процедуры приводятся в диссертационной работе.

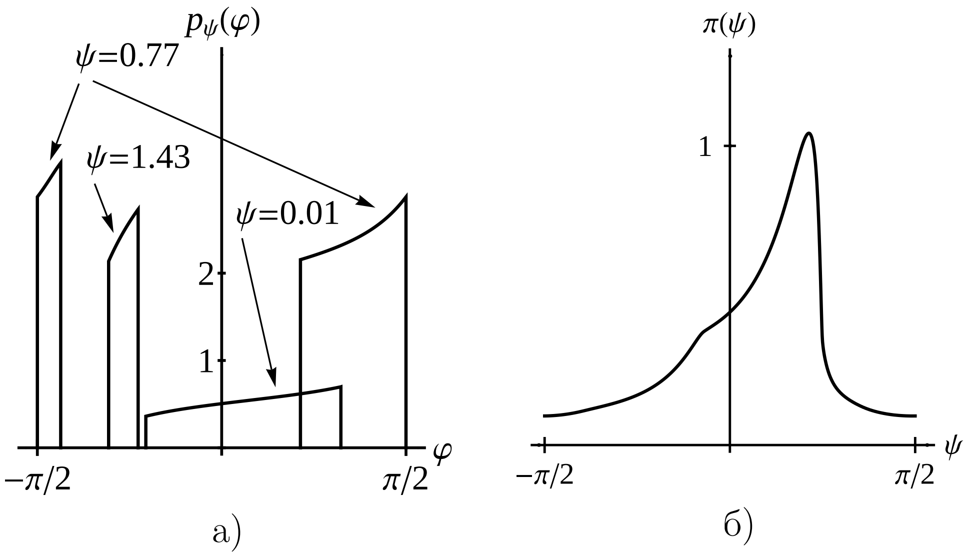

Рисунок 1. (а) Вид переходной плотности $p_\psi(\varphi)$ для некоторых фиксированных значений ψ. (б) График плотности стационарного распределения $\pi(\psi)$. В обоих случаях параметр кривизны K распределен равномерно на отрезке $[-1, 1]$.

В результате достаточно трудоемких вычислений, для которых был задействован суперкомпьютер СКИФ МГУ, удалось построить графики переходной плотности. Примеры таких графиков представлены на Рис. 1а.

Переходная плотность является ядром интегрального уравнения на стационарную плотность:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{p}(\varphi, \psi)\pi(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \pi(\psi). \tag{5}$$

Решение этого уравнения основано на методе вычислении последовательных приближений. В работе найдено стационарное распределение для различных распределений параметра кривизны K и приведены графики полученных функций. Пример одного из графиков изображен на Рис. 1б.

Численное интегрирование по инвариантной мере, согласно формуле (4), позволило найти значение показателя Ляпунова, характеризующего скорость роста поля Якоби. Сопоставление полученных значений с результатами численного моделирования решений уравнения Якоби методом Монте-Карло показывает высокую степени согласия оценок.

Ввиду сложности прямого нахождения инвариантной меры, в работе предложен метод построения ее эмпирической оценки. Показано, что относительно небольшое число реализаций позволяет с хорошей точностью восстановить плотность стационарного распределения и получить близкие к точным значения показателя Ляпунова.

В следующем разделе второй главы показано, что вид формулы (4), вообще говоря, не обобщается на вычисление старших статистических моментов, характеризующих скорость роста квадрата вектора поля, третьей степени и т.д. Исключение составляют случаи, обладающие определенной степенью симметрии в распределении перемножаемых матриц. К таким случаям относится задача о эволюции магнитного поля в однородном изотропном поле скоростей, которая исследуется далее.

Уравнение эволюции магнитного поля $\mathbf{H}$ в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{H}\hat{A} \tag{6}$$

является отправной точкой для изучения более сложных процессов, в частности, на Солнце. В этом уравнении матрица $\hat{A}$ составлена из частных производных компонент поля скорости $\mathbf{v}$. Для нашей задачи мы ограничиваемся рассмотрением однородного и изотропного поля скорости, для которого корреляционный тензор V_{ij} имеет вид

$$V_{ij} = \langle v_i(\mathbf{x}),\, v_j(\mathbf{y})\rangle = \frac{v^2}{3}(F(r^2)\delta_{ij} + \frac{r}{2}F'(r^2)(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}))\,, \tag{7}$$

где $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Для определенности полагается $\langle v_i(\mathbf{x}), v_i(\mathbf{y})\rangle = v^2 f(r^2)$ и $f(r^2) = \exp(-r^2)$. В таком случае продольная корреляционная функция $F(r^2) = \exp(-3r^2/5l^2)$, за единицу длины берется характерный масштаб l, а время обновления τ определяется характерным временем l/v. Мы рассматриваем задачу в условиях так называемого короткокоррелированного приближения. Полагается, что существует малый интервал времени памяти такой, что на разных интервалах времени вектора $\mathbf{v}$ считаются независимыми. Что касается матриц частных производных $\hat{A}_n$, то предполагается, что они имеют гауссовское распределение с нулевым средним.

В таких предположениях решение уравнения (6) записывается через произведение матричных экспонент от матриц $\hat{A}$. Для нахождения показателя роста нормы произведения подобных матриц необходимо рассматривать их действие на пространстве, которым является сфера S^2 со склеенными диаметрально противоположными точками. Действие матриц на этом пространстве порождает цепь Маркова, и вновь возникает задача нахождения стационарного распределения (инвариантной меры). Рассмотренное ранее модельное уравнение Якоби, в котором, заметим, участвуют матрицы меньшей размерности, не дает, вообще говоря, оснований рассчитывать, что процедура нахождения инвариантной меры сколь либо упростится при переходе к матрицам большей размерности. Тем не менее, наличие определенных симметрий в характере распределения перемножаемых матриц, позволяет сделать ряд предположений, относительно устройства инвариантной меры. В работе показывается, что искомая мера задается мерой Хаара. Благодаря этому, становится возможным аналитическое вычисление показателей Ляпунова и моментов старших порядков. Приводимые в работе выкладки показывают, что показатель Ляпунова с точностью до слагаемых порядка τ^2 задается выражением

$$\lambda = \frac{3}{10}\frac{v}{l}\ , \tag{8}$$

а моменты старшего порядка выражением

$$\lambda_p = \frac{(3+p)}{10}\frac{v}{l}\ . \tag{9}$$

В конце второй главы проводится сопоставление оценок скорости роста второго момента, полученных в работе в рамках лагранжевого подхода, с аналогичными результатами, известными ранее в рамках эйлерова подхода, и указывается на определенное различие двух точек зрения.

Результаты этой главы являются отправной точкой для дальнейшего изучения более сложных систем и процессов эволюции магнитных и в более широком смысле – векторных полей. Такие процессы рассматриваются в последующих главах диссертации.

В третьей главе изучается ключевое понятие для описания эволюции солнечного магнитного поле – понятие солнечного цикла. Трактовка этого термина требует уточнений для устранения неоднозначностей в интерпретации наблюдательных данных. Возникает потребность в разработке алгоритмической процедуры выделения циклов на баттейрфляй-диаграммах.

В работе мы рассмотрели временной ряд, покрывающий весь современный период наблюдений и дополненный данными за исторический период. Современные данные за период 1874–2010 гг. (циклы 14–22) представлены каталогами наблюдений солнечных пятен Гринвеческой обсерватории, службы US Air Force (USAF) и US National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA). Исторические данные о пятнах в циклах 1–4 (1749–1797 гг.) основываются на зарисовках диска Солнца немецким астрономом Й. Штаудахером. Группе исследователей из Потсдамского астрофизического института, возглавляемой с Р. Арльтом, удалось провести оцифровку этих зарисовок и путем последовательного сопоставления изображений восстановить гелиографические координаты пятен.

В работе предложен метод выделения циклов и волн активности, сочетающий в себе два известных алгоритма кластерного анализа. Первый из них выделяет области повышенной плотности на баттейрфляй-диаграммах, а второй использует байесовский подход для уточнения результатов. Метод опирается на информацию о положении пятен и не задействует полярность пятен, что делает его применимым к архивным данным. Показано, что метод успешно разделяет циклы активности и выделяет по две волны в каждом цикле на протяжении всей части современных данных. Делается вывод о целесообразности применения кластерного анализа для определения границ циклов. Пример результата разделения представлен на Рис. 2.

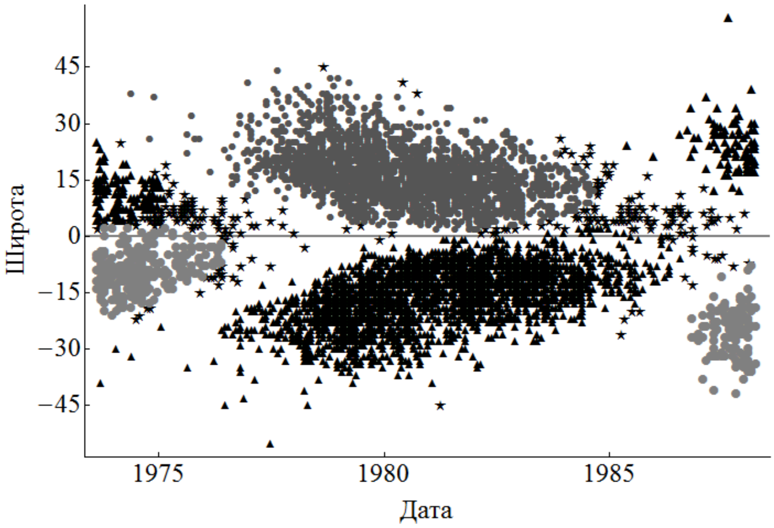

Рисунок 2. Результат разделения на кластеры в цикле 21. Серыми кружками и черными треугольниками показаны кластеры, которые интерпретируются как волны активности. Отдельные точки, обозначенные звездочками, алгоритм не смог на заданном уровне значимости отнести к какому-либо кластеру или определил как шум.

Ожидаема структура циклов, состоящая из двух волн активности, распространяющихся от высоких широт к низким, наблюдается для циклов 2–4. Несмотря на существенно более низкую плотность наблюдений и наличие пропусков, алгоритмам удалось выделить в них циклы и волны активности. На этом фоне показана необычная структура цикла 1, представляющего собой единый кластер (Рис. 3). Этот факт является дополнительным указанием

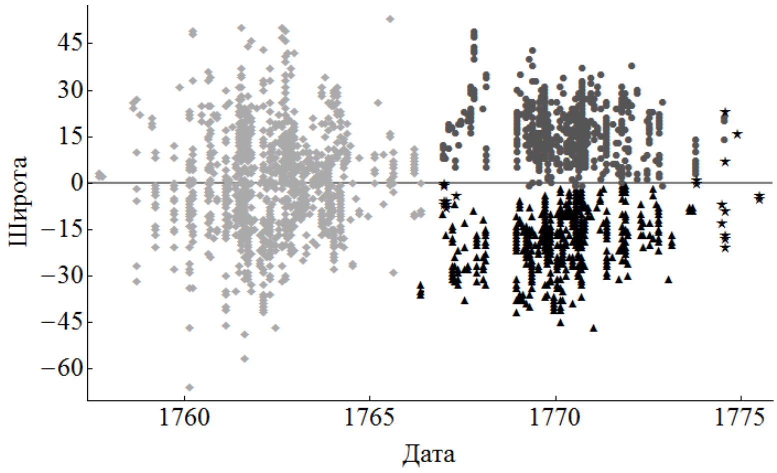

Рисунок 3. Кластеры, выделенные для циклов 1 и 2. Серыми кружками и черными треугольниками показаны кластеры, которые интерпретируются как волны активности. Цикл 1 представляет собой единый кластер и показан светло-серым цветом. Отдельные точки, обозначенные звездочками, алгоритм не смог на заданном уровне значимости отнести к какому-либо кластеру или определил как шум.

на наличие особой конфигурации крупномасштабного магнитного поля Солнца, по-видимому, имевшей место в середине 18 века.

В качестве приложения, метод выделения волн активности позволяет оценивать скорость миграции пятен в цикле. В работе получены количественные значения скорости миграции пятен в циклах для современного периода наблюдений. Эти значения служат оценки интенсивности циклов.

Идеи кластерного анализа для дискретного сигнала, представленного координатами наблюдений пятен, обобщены для работы с непрерывным сигналом (цифровым изображением). Показано, что предложенный метод дает согласованные результаты для баттерфляй-диаграммы, преобразованной гауссовским фильтром в изображение, составленное из пикселей.

Результаты третьей главы позволяют характеризовать распределение и миграцию тороидальной компоненты крупномасштабного поля Солнца. Механизм генерации второй – полоидальной – компоненты изучается в заключительной главе основной части диссертации.

В четвертой главе ставится вопрос о количественной оценке альфа-эффекта, являющегося одним из ключевых элементов теории солнечного динамо. Рассматриваются проявления альфа-эффекта, доступные для измерения по наблюдательным данным.

В начале главы дано краткое описание современного взгляда на роль альфа-эффекта в механизме генерации крупномасштабных магнитных полей на Солнце и приведен обзор предыдущих результатов по практике оценки этого эффекта через измерение угла наклона биполярных областей (тилт-угла). Делается вывод об общем согласии теории вопроса с наблюдаемым характером поведения тилт-угла, однако указывается, что накопленные на сегодня данные позволяют проводить и более детальное изучение альфа-эффекта.

Более детальных анализ достигается путем обогащения выборки биполярных областей, представленных, в основном, пятнами, областями меньших размеров. В работе приводится описание методики выделения биполярных структур на солнечных магнитограмма, существенным отличием которой является расширение спектра обнаруживаемых областей. В работе использованы данные ежедневных наблюдений с наземного телескопа обсерватории Кит-Пик (KPVT) за период в 3 цикла с 1975 по 2003 год, орбитального магнитографа Michelson Doppler Imager (MDI) за период 1996–2011 гг. и новейшего магнитометра Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) за период 2010–2012 гг.

Показано, что в части крупных областей (площадью более 300 м.д.п.), поведение среднего тилт-угла в зависимости от широты согласуется с общим характером закона Джоя. С небольшими поправками на коэффициенты результаты повторяет выводы работы Стенфло и Косовичева, в которой был впервые представлен систематический анализа биполярных областей.

Однако включение в выборку биполярных областей площадью до 300 м.д.п. выявило определенные различия в свойствах тилт-угла при переходе к малых областям. Показано, что тилт-угол для малых областей противоположен по знаку большим областям, но при этом сохраняет тенденцию к росту абсолютного значения с широтой, описываемую законом Джоя. Приведено подтверждение этого результата путем сравнения результатов обработки данных с различных источников (KPVT, MDI и HMI) и за различные циклы.

Для детального изучения распределения тилт-угла предложен метод сопоставления баттерфляй-диаграмм и среднего тилт-угла, вычисленного по отдельным пространственно-временным ячейкам Метод позволил продемонстрировать, что для больших биполей в пределах одного цикла сохраняется преимущественный знак тилт-угла в каждом полушарии: положительный в южном полушарии и отрицательный в северном. Отдельные нарушения этого

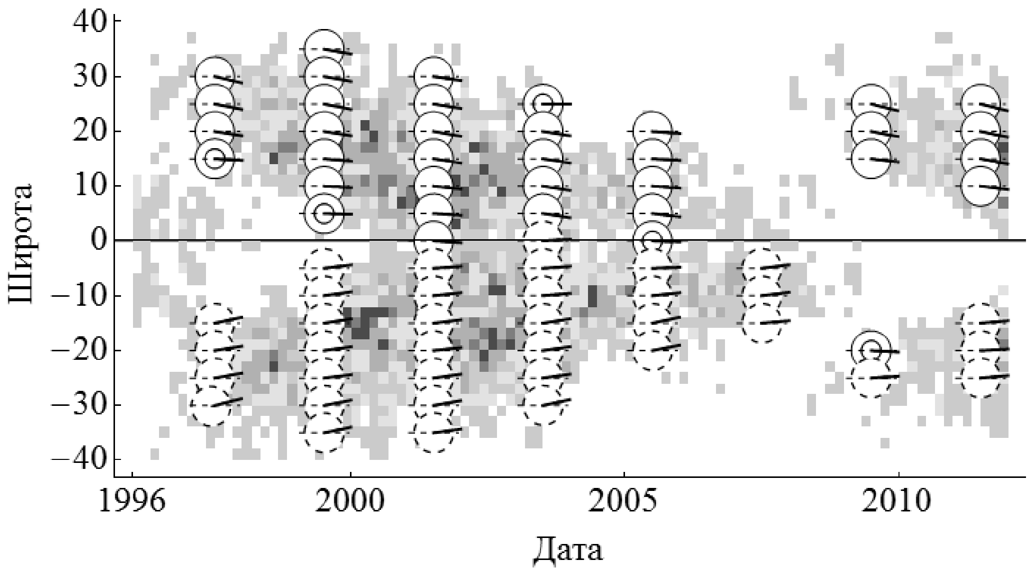

Рисунок 4. Баттерфляй-диаграмма распределения тилт-угла, наложенная на распределения плотности солнечных пятен в цикле 23. Кружки со сплошной границей отмечают области положительного тилт-угла, пунктирной – отрицательного, двойные кружки обозначают области, в которых средний угол значимо не отличается от нуля.

правила встречаются на границах волн активности, но отсутствуют внутри (Рис. 4). Аналогичная картинка приведена для малых биполей, в которой показан противоположный знак тилт-угла по отношению большим биполям. Высказано предположение о связи больших и малых биполей с различными компонентами магнитного поля Солнца.

Далее из сравнения графиков закона Джоя для разных циклов и анализа широтно-временной диаграммы распределения тилт-угла в течение 3 циклов сделан вывод об отсутствии выраженной зависимости величины тилт-угла больших биполей от интенсивности цикла. При этом отмечается, что данный вопрос продолжает оставаться дискуссионным и в ряде работ приводятся как подкрепляющие, так и обратные аргументы.

В работе исследована связь тилт-угла с различными параметрами биполярных областей (магнитным потоком, размером области), приведена доля биполей, нарушающих правило полярности Хейла, получены зависимости магнитного потока и биполярного момента от площади области. Отмечено, что найденные зависимости оказываются не однородными по всему спектру областей, а определенным образом различаются, образуя две группы, соответствующие большим и малым областям, с границей раздела, лежащей вблизи 300 м.д.п.

Исходя из интерпретации тилт-угла как механизма генерации полоидальной компоненты магнитного поля, получена оценка величины альфа-эффекта как отношения

$$\sum_{\text{биполи}} \Phi \sin(p\mu) / \sum_{\text{биполи}} \Phi, \tag{10}$$

где Φ – магнитный поток, p – знак ведущей полярности, а μ – величина тилт-угла биполярной области. Суммирование по всем биполям, ограниченных периодом 1998–2007 гг., дает значение 0.1, что совпадает с простейшей оценкой в 10%, выводимой из соотношение характерного значения тилт-угла к величине полного угла.

В конце четвертой главы приводится интерпретация полученных результатов в свете представлений современной теории солнечного динамо и делаются выводы о том, в какой мере работа подтверждают стандартные предположения теории и где обнаруживают новые результаты.

В заключении подводится общий итог диссертационной работы:

– численно найдена инвариантная мера для модельного уравнения Якоби, на ее основе получены оценки скорости роста поля Якоби

– получены оценки скорости роста магнитного поля и старших статистических моментов в однородном изотропном поле скоростей;

– разработан алгоритмический метод выделения волн активности на солнечных баттерфляй-диаграммах и даны оценки скорости миграции пятен в циклах;

– предложены методы статистической обработки данных по распределению тилт-угла биполярных областей на Солнце, обнаружены различия свойств больших и малых активных областей, получена оценка альфа-эффекта.

Объем диссертации составляет 125 страниц, содержит 47 рисунков, 11 таблиц и список литературы из 95 публикаций.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях в международных и российских научных журналах, из которых 2 входят в перечень ВАК, 4 индексируется базой данных ISI Web of Science (в том числе 1 – в высокорейтинговом журнале):

1. Tlatov A. G., Illarionov E. A., Sokoloff D. D., Pipin V. V. A new dynamo pattern revealed by the tilt angle of bipolar sunspot groups // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 432. Issue 4. P. 2975–2984.
2. Illarionov E., Tlatov A., Sokoloff D. The properties of the tilts of bipolar solar regions // Solar Physics. 2015. Vol. 290. Issue 2. P. 351–361.
3. Sokoloff D., Illarionov E. A. Intermittency and random matrices // Journal of Plasma Physics. 2015. Vol. 81. Issue 4. P. 1–13.
4. Illarionov E., Sokoloff D., Arlt R., Khlystova A. Cluster analysis for pattern recognition in solar butterfly diagrams // Astronomische Nachrichten. 2011. Vol. 332. P. 590–596.
5. Илларионов Е. А. Стационарное распределение для уравнения Якоби с большим случайным параметром кривизны // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 38–43.
6. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами. // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 218–225.
7. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Перемежаемость и произведение случайных матриц // Современные проблемы математики и механики. 2015. Т. 10. № 3. С. 94–100.
8. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д. Алгоритмическое выделение крыльев баттерфляй-диаграмм // Астрономический циркуляр. 2012. № 1580. С. 1–4.
9. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д. Образование структур и произведение случайных матриц // Сборник трудов Международной конференции MCC-14: Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность. 2014. С. 191–196.
10. Илларионов Е. А., Тлатов А. Г. Средний профиль пятен в 24-м цикле активности // Труды XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика – 2015». 2015. С. 169–172.
11. Михайлов Е. А., Илларионов Е. А., Модяев И. И. Скорость роста галактического магнитного поля в модели динамо со случайными коэффициентами // Сборник трудов XI конференции молодых учёных «Фундаментальные и прикладные космические исследования» под ред. А.М. Садовского. 2014. С. 83–87.