

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РАСПАД НЕОБЫКНОВЕННОЙ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ В НАГРЕТОЙ ПЛАЗМЕ

Красовицкий В.Б., Дорофеенко В.Г.\*, Туриков В.А.\*\*  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

\*Российский университет дружбы народов

\*\*Институт передовых исследований, Вена, Австрия

**Аннотация.** Рассмотрена параметрическая неустойчивость необыкновенной электромагнитной волны в плазме, предварительно нагретой до релятивистской температуры. Получена и исследована автомодельная система нелинейных уравнений в полных производных, учитывающая «тепловую» массу электронов. Малые возмущения параметров нагретой плазмы проанализированы на основе дисперсионного уравнения, определяющего фазовые скорости быстрой и медленной необыкновенных волн в линейном приближении. В отличие от холодной плазмы зона непрозрачности в области частот, превышающих верхнегибридную частоту электронов, исчезает и асимптоты обеих ветвей сближаются. Теоретический анализ системы нелинейных уравнений показал, что инкремент распадной неустойчивости растет с увеличением начальной температуры электронов плазмы.

### 1. СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система гидродинамических уравнений плазмы с релятивистской температурой электронов имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [G(\xi) p_x] &= e \left[ E_x - \frac{(B_y + B_0) v_z}{c} \right], \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [G(\xi) p_x] &= e \left[ E_x - \frac{(B_y + B_0) v_z}{c} \right], \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [G(\xi) p_z] &= e \left[ E_z + \frac{(B_y + B_0) v_x}{c} \right] - \frac{T}{n} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n}{\gamma} \right), \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n v_z) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$p_{x,z} = m\gamma v_{x,z}, \quad G(\xi) = \frac{K_3(\xi)}{K_2(\xi)}, \quad \xi = \frac{mc^2}{T}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

$m$ ,  $n$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  - масса, плотность, скорость и импульс электрона,  $c$  - скорость света,  $B_0$  - внешнее поперечное магнитное поле.  $K_n(\xi)$  - функция Макдональда. Учет релятивистской температуры электронов  $T$  приводит к появлению в уравнениях (1) «тепловой массы» [2]:

$$m_{\text{eff}} = mG(\xi) \approx \begin{cases} m\left(1 + \frac{5}{2} \frac{T}{mc^2}\right), & T \ll mc^2, \\ \frac{4T}{c^2} \left(1 + \frac{m^2 c^4}{8T^2}\right), & T \gg mc^2. \end{cases} \quad (2)$$

При этом компоненты самосогласованного электромагнитного поля в формулах (1)

$$E_x = -c^{-1} \partial A_x / \partial t, \quad B_y = c^{-1} \partial A_x / \partial z, \quad (3)$$

определяются следующей системой уравнений:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x = \frac{4\pi e}{c} n v_x, \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi e (n - n_0)$$

где  $A_x$  - векторный потенциал и  $E_z$  - продольное электростатическое поле.

Из уравнений (1) и (4), следуют интегралы

$$E_z = 4\pi e n_0 (z_0 - z), \quad (5)$$

$$G(\xi) p_x + \frac{e}{c} A_x + m\omega_B (z - z_0) = 0, \quad (6)$$

где  $z_0$  - координата «равновесного» электрона ( $p_x = 0$ ) в отсутствие поля  $E_z = A_x = 0$ .

Будем искать решение в виде бегущей волны, считая все величины зависящими от фазы  $\psi = \omega_p (t - z/v_{ph})$ . В безразмерных переменных

$$A = \frac{eA_x}{mc^2}, \quad E = \frac{eE_z}{m\omega_p c}, \quad a = \gamma \left( 1 - \frac{\beta v_z}{c} \right), \quad \zeta = \frac{\omega_p}{c} (z_0 - z)$$

исходная система уравнений (1) и (4) упрощается к виду

$$A'' = -\frac{\beta^3}{\beta^2 - 1} \frac{\Omega}{\sqrt{R}}, \quad \zeta' = \frac{\beta}{\beta^2 - 1} \left( \frac{\beta a}{\sqrt{R}} - 1 \right), \quad (7)$$

$$a' = \frac{\beta^2 Q_B \Omega}{\sqrt{R}} - \beta \zeta - \frac{\beta_T^2 \beta^2}{\beta - \zeta'} \left( \frac{1}{\sqrt{R}} \right)',$$

где

$$R = a^2 + (\beta^2 - 1)(1 + \Omega^2), \quad \Omega = A - Q_B \zeta, \quad \beta = v_{ph} / c,$$

$$Q_B = \omega_B / \omega_p, \quad \beta_T = (T / m_{\text{eff}} c^2)^{1/2} = [\zeta G(\zeta)]^{-1/2},$$

причем, в силу формулы (2), величина  $\beta_T$  изменяется в пределах от 0 при  $T=0$  до 1/2 при  $T=\infty$ .

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Для малых возмущений  $A(t, z) = A_0 \exp i(\omega t - kz)$  дисперсионное уравнение линеаризованной системы уравнений (7) имеет вид:

$$\frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{1 - \omega^2 (1 - \beta_T^2 / \beta^2)}{1 + Q_B^2 - \omega^2 (1 - \beta_T^2 / \beta^2)}, \quad (8)$$

где  $\omega$  - частота волны (в единицах  $\omega_p$ ),  $\beta = \omega / ck$  - безразмерная фазовая скорость.

Зависимость  $\beta(\omega)$  представлена на Рис. 1 и Рис. 2. Условия параметрического распада быстрой необыкновенной (БН) волны с частотой  $\omega_f$  на две медленные необыкновенные (МН) волны с половинной частотой  $\omega_f/2$  показаны на рисунках точечными линиями. Границы области прозрачности холодной плазмы  $\omega_L$  и

$$\omega_R \text{ определяются формулой: } \omega_{L,R} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{Q_B^2 + 4} \mp Q_B \right).$$

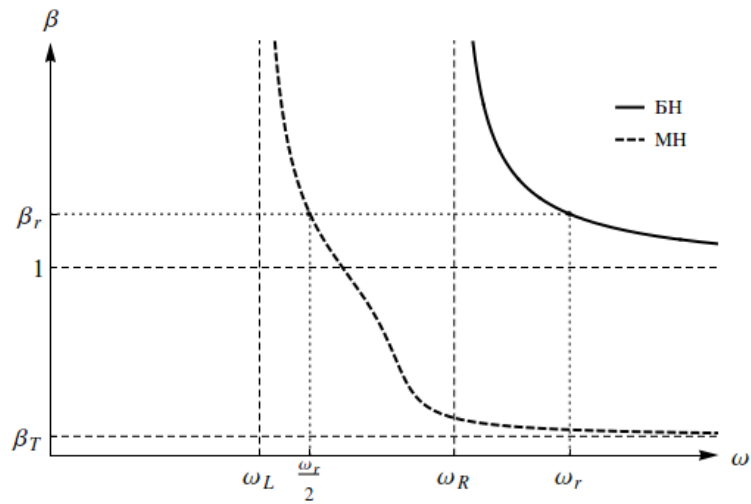


Рис. 1.  $\beta_r = \beta(\omega_r)$ ,  $Q_B=0.67$  и  $\beta_T=0.1$ .

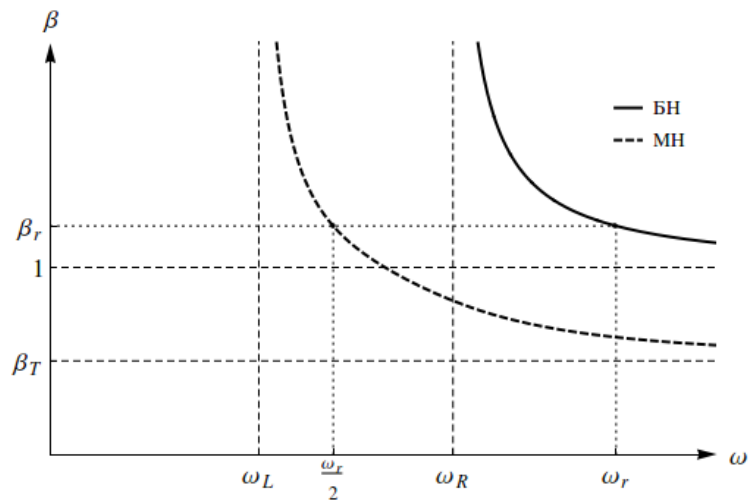


Рис. 2.  $\beta_r = \beta(\omega_r)$ ,  $Q_B=0.67$  и  $\beta_T=0.5$ .

### 3. ИНКРЕМЕНТ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Условие параметрического резонанса  $\omega = \omega_r$  и  $\omega' = \omega_r/2$ , когда частота возбуждаемой волны  $\omega'$  равна половине частоты волны накачки  $\omega$ , требует выполнения условия (8) как для

частоты накачки  $\omega_r$ , так и для частоты вторичной волны  $\omega_r/2$ . Можно показать, что для неизменной фазовой скорости волны  $\beta$  это условие реализуется только в ограниченной области значений внешнего магнитного поля  $Q_B = Q_{Br}(\omega_r, \beta_T)$  и  $\beta = \beta_r(\omega_r, \beta_T)$ , где

$$Q_{Br} = \sqrt{\frac{1}{8}(5 - \omega_r^2(1 - \beta_T^2))\left(\omega_r^2(1 - \beta_T^2) + \sqrt{\omega_r^4(1 - \beta_T^2)^2 + 16\beta_T^2}\right) - 1 - \beta_T^2}, \quad (9)$$

$$\beta_r = \omega_r \sqrt{\frac{\omega_r^2(1 + \beta_T^2) + \sqrt{\omega_r^4(1 - \beta_T^2)^2 + 16\beta_T^2}}{2(\omega_r^4 - 4)}}. \quad (10)$$

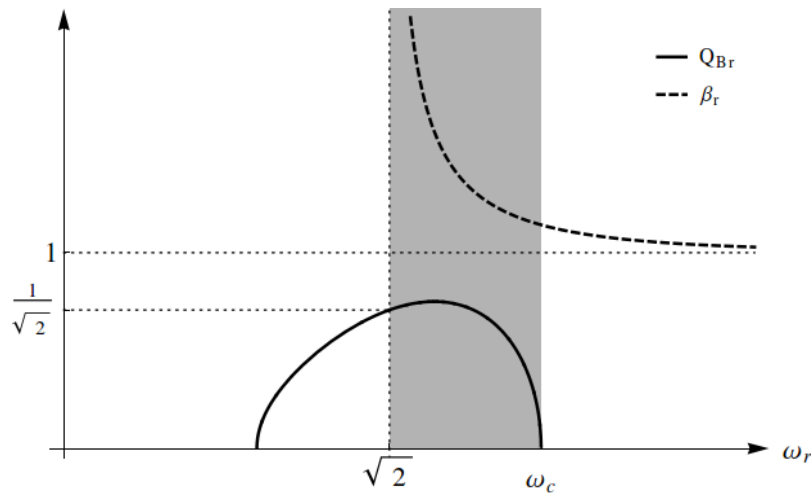


Рис. 3: Магнитное поле  $Q_{Br}$  и фазовая скорость волны  $\beta$ ,  $\beta_T=0.3$

Графики этих функций представлены на рис. 3. Как следует из этого рисунка, неустойчивость имеет место только в области резонансных частот  $\sqrt{2} < \omega_r < \omega_c = \sqrt{(4 - \beta_T^2)/(1 - \beta_T^2)}$ , закрашенной на рисунке серым цветом. При этом  $0 < Q_{Br} < 3/4$  и  $\sqrt{(4 - \beta_T^2)}/3 < \beta_r < \infty$ .

Явная зависимость инкремента от частоты  $\gamma_m(\omega)$  выглядит достаточно громоздко. Однако более простое выражение можно получить, выражая  $\gamma_m$  через вспомогательную величину  $\omega_T$ :

$$\omega_T = \omega \sqrt{1 - \frac{\beta_T^2}{\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega^2 (1 - \beta_T^2) + \sqrt{\omega^4 (1 - \beta_T^2)^2 + 16\beta_T^2} \right)}$$

Тогда расчет, выполненный для системы (7), дает:

$$\gamma_m = A_0 \frac{(1 - 2\beta_T^2/3)\omega_T^2(\omega_T^2 + \beta_T^2) - 2\beta_T^2(2 - \beta_T^2)/3}{4(1 - \beta_T^2)^2 \omega_T^8} \times \sqrt{(\omega_T^2 + 2)(\omega_T^4 - 4\beta_T^2)(4 - \omega_T^2)(\omega_T^2 - 2)^3 / (\omega_T^2 - 1)}, \quad (11)$$

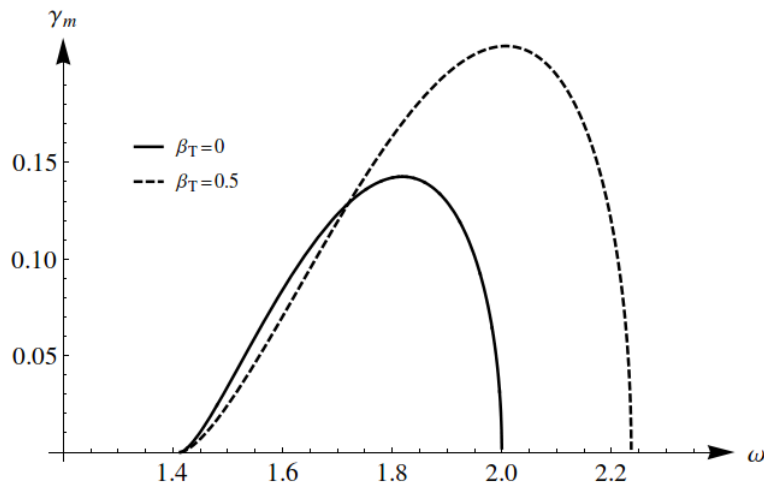


Рис. 4: Зависимость максимального инкремента параметрической неустойчивости  $\gamma_m$  от частоты волны накачки  $\omega$ .

### Литература

- [1] Красовицкий В.Б., Дорофеев В.Г., Туриков В.А., Сотников В.И.; Физика плазмы. 2006. Т. 32. С. 26;  
 [2] Джавахишвили Д.И., Цинцадзе Н.Л. ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 1314.