

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО АТТРАКТОРА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

И.Н. Сибгатуллин

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва
E-mail: sibgat@imec.msu.ru

Аннотация. Проведено прямое численное моделирование развития режимов фокусировки внутренних волн в трапециевидальной области и образования волновых аттракторов методом спектральных элементов. Левая вертикальная граница области имеет форму половины косинуса и совершает гармонические колебания. Расчеты соответствуют экспериментальной постановке [3], в которой были получены режимы устойчивого аттрактора и режимы потери устойчивости и перехода к хаотическому течению.

1. Введение

Внутренние гравитационные волны в однородно стратифицированной жидкости могут распространяться под фиксированным углом к вертикали, который определяется только частотой вынуждающей силы [1]. При наличии наклоненной стенки волны могут фокусироваться и это приводит к образованию определенных путей, которые определяются лишь частотой. Эти пути были названы волновыми аттракторами. Необходимо отметить, что к аттракторам в фазовом пространстве из теории динамических систем данное понятие прямого отношения не имеет. Первые эксперименты, подтверждающие существование предсказанных ранее волновых аттракторов описаны в [1]. Существование подобных аттракторов и анализ их структуры, устойчивости и динамики может быть важным для понимания процессов перемешивания в морях и озерах, а также для анализа колебаний во вращающихся системах, таких как ядро Земли, поскольку инерционные волны также могут распространяться по аттракторам.

Устойчиво стратифицированное состояние жидкости обладает частотой плавучести, или частотой Брента-Вяйсяля, которая характеризует малые колебания смещенного из исходного состояния элемента жидкости. Возмущения исходного состояния с постоянной частотой, меньшей частоты плавучести, приводят к внутренним волнам, распространяющимся вдоль прямых линий. Лучи могут отражаться от поверхностей, при этом лучи по-прежнему могут распространяться под углом, равным по модулю арккосинусу отношения вынуждающей частоты и частоты плавучести. За счет такого отличия в угле отражения возникновение волнового аттрактора становится возможным, если одна из стенок области наклонена по отношению к вертикали. Также играет роль баланс фокусировки и вязкости [6]. Анализ двумерного околокритического отражения слабонелинейных внутренних гравитационных волн от наклоненной границы в однородностратифицированной жидкости приведен в [2,5]. По существу волновые аттракторы являются двумерными, что показано как теоретически, так и экспериментально [1-5].

Помимо теоретических и экспериментальных исследований волновых аттракторов, предпринимались попытки и их численного исследования: в работе [4] с помощью программного кода общей модели циркуляции (MIT general circulation model), использующей метод конечного объема, исследовались волновые аттракторы, возникающие при гармоническом вертикальном колебании всей области. Проведено сравнение с экспериментом для устойчивого аттрактора. Известно, что методы конечного объема обладают собственной численной вязкостью и их применение для анализа устойчивости сильно нелинейных режимов на больших временах требует осторожности. Помимо этого, в [4] численные исследования проводились для числа Шмидта 100, а не 770, как в эксперименте, из-за невозможности разрешения диффузионных масштабов, а на нижней и правой стенке ставилось условие проскальзывания вместо прилипания. Таким образом численная модель не вполне соответствовала эксперименту. Тем не менее при определенных параметрах удалось воспроизвести общий вид аттрактора.

В работе [7] для смежной задачи для инерционных волн в прямоугольной геометрии проведено прямое численное моделирование аттракторов вращающейся жидкости спектральным методом. Спектральный метод позволяет с высокой

точностью рассчитывать нелинейные режимы и предпочтителен по сравнению с конечно объемным для исследования нелинейных режимов, но его применение в прямоугольной геометрии с разнородными граничными условиями затруднено.

В настоящей работе проводится двумерное прямое численное внутренних волновых аттракторов методом спектральных элементов.

Раствор соли с начальной стратификацией, соответствующей частоте плавучести $N = 1059 \text{ rad/s}$ заключен в контейнере, имеющей форму трапеции, Рис.1:

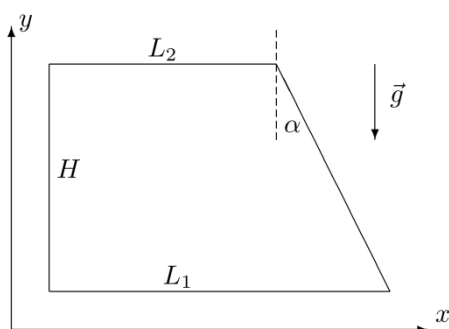


Рис. 1. Расчетная область. $H = 29\text{см}$, $L_1 = 45\text{см}$

Левая граница совершает гармонические колебания следующего вида:

$$x_b(0, y, t) = a \cos(\pi y / H) \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Уравнения сохранения импульса и диффузии соли в приближении Буссинеска можно записать в виде:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v^k \nabla_k \vec{v} \right) = -\nabla \tilde{p} + \nabla^k \mu \nabla_k \vec{v} + \rho_0 s \vec{g} \quad (2)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v^k \nabla_k s \right) = \nabla^k \lambda \nabla_k s \quad (3)$$

где $\rho = \rho_0 + \rho'$, $s = \rho' / \rho$.

На нижней и правой границе ставятся граничные условия прилипания, на верхней условия отсутствия вязких касательных напряжений, на левой скорость изменяется в соответствии с (1):

$$u(0, y, t) = a\omega_0 \cos(\pi y/H) \sin(\omega_0 t), v = 0.$$

Постановка соответствует экспериментальной работе [3] при $H=30\text{см}$, $L=45\text{см}$. Поскольку стратификация в эксперименте у границ неидеальна (особенно у верхней), расчетная высота бралась равной 28см .

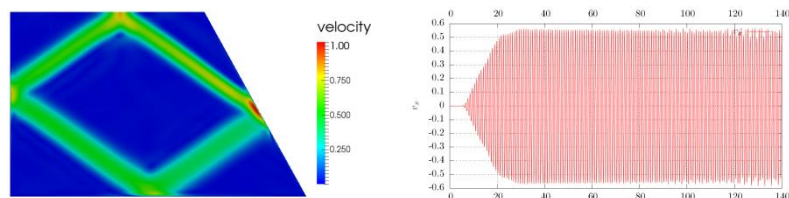


Рис. 2 Поле модуля скорости и значение горизонтальной составляющей скорости в точке $x = 28.2\text{см}$, $y = 20\text{см}$.

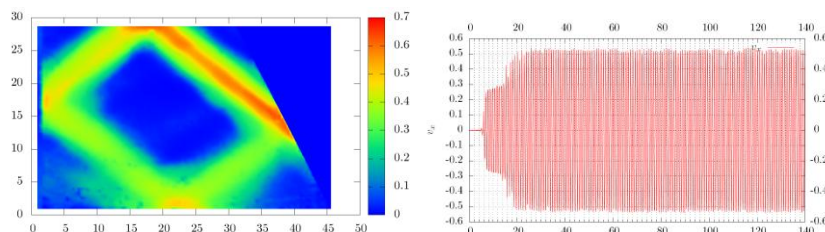


Рис. 3 Экспериментальное распределение поля модуля скорости, полученное авторами [3] и соответствующее колебание горизонтальной компоненты скорости в точке $x = 28.2\text{см}$, $y = 20\text{см}$. По горизонтали отложены периоды вынужденных колебаний.

На рис. 3 показаны поле модуля скорости по данным экспериментов, предоставленных авторами [3]. На рисунке 2 расчеты, проведенные с теми же параметрами, за исключением того, что высота на два сантиметра меньше, поскольку в эксперименте стратификация у горизонтальных границ неидеальна, и при меньшей амплитуде вынужденных колебаний.

По рисункам 4 и 5 видно, что имеется совпадение структуры аттрактора и амплитуды. В тоже время видно, что в эксперименте аттрактор устойчив, а в расчете на больших временах проявляется неустойчивость. Небольшое увеличение вязкости в расчете стабилизирует аттрактор. Возможно это связано с тем, что в эксперименте имеется влияние передней и задней стенок, которое немного стабилизирует течение. В целом можно сделать вывод, что метод спектральных элементов позволяет эффективно изучать свойства волновых аттракторов в стратифицированных жидкостях для реальных граничных условий и числа Шмидта. Отдельно планируется работа по сравнению с конечнообъемным методом, что может быть полезно в сложных геометриях. Характер развития неустойчивости в точности соответствует приведенному в [3], что подтверждает гипотезы о механизме разрушения аттрактора. Дальнейшие исследования численных результатов с помощью преобразования Гильберта позволят сделать более точные выводы о развитии неустойчивых режимов, лучше понять динамику разрушения аттракторов.

Численные исследования проводятся при поддержке суперкомпьютера МГУ “Ломоносов” и вэб-лаборатории unihub.ru с использованием кода nek5000.

Литература

1. Maas, L. R. M. & Lam, F.-P. A.// Geometric focusing of internal waves. *J. Fluid Mech*, 1995,. 300, 1–41
2. Dauxois, Thierry; Young, W.// *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, vol. 390, Issue 01, p.271-295
3. Scolan, H., Ermanyuk, E., Dauxois, T.// 2013, *Physical Review Letters*, 110, 234501
4. Grisouard, N., Staquet, C., Pairaud, I.// 2008, *Journal of Fluid Mechanics*, 614, 1
5. Hazewinkel, J., van Breevoort, P., Dalziel, S.~B., Maas, L.~R.~M.// 2008, *Journal of Fluid Mechanics*, 598, 373
6. Frans-Peter A. Lam, Leo R.M. Maas. Internal wave focusing revisited; a reanalysis and new theoretical links // *Fluid Dynamics Research* 40 (2008) 95 – 122.
7. Jouve, L., Ogilvie, G.~I.// *Journal of Fluid Mechanics*, 2014, 745, 223.