РЕГУЛЯРНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ СТОЛКНОВЕНИЙ В ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ И РАДИАЦИОННЫЕ «КОНСТАНТЫ» АТОМОВ В ПЛАЗМЕ

В.Ф. Туганов

Институт космических исследований РАН, Москва, Россия
princet@rambler.ru

Аннотация. Регулярный метод нахождения интегралов столкновений в линеаризованных кинетических уравнениях, используя флуктуационный подход, оказался эффективным в проблеме линейного отклика системы заряженных частиц плазмы (свободно-свободные переходы) на слабое внешнее электрическое поле **E**(t,**r**) [1-3]. Выявлены два существенных отличия от того, что дает используемый до сих пор «метод вторичной линеаризации» интегралов столкновений нулевого приближения (например, Ландау-Балеску-Ленарда) [4-6]: 1) интегралы столкновений имеют лишь один, зависящий от *спектральной плотности флуктуаций* член (отсутствует член, обусловленный начальными значениями линейных по полю флуктуаций – они равны здесь нулю); 2) соответствующий интеграл столкновений зависит (без каких-либо ограничений) от частоты поля ω (и волнового вектора **k)**, что отвечает известному *эффекту Крамерса-Гинзбурга* (1923, 1949), экспериментально наблюдаемому вблизи ленгмюровской частоты Ω_p. А так как *свободно-свободные переходы* это предельный случай атомных переходов, то такие же, аналогичные по пп. 1, 2 факторы должны иметь место и в проблеме уширения атомных спектров. Поэтому *атомные радиационные «константы»*, - будучи функциями ω и **k**, - не могут называться константами.

1. Введение и постановка задачи

В отличие от свободно-сводных переходов, в проблеме линейного отклика атомных систем имеют дело не с функциями распределения плотности в фазовом пространстве, а с ее матрицей. Диагональные элементы которой, описывая населенности атомных уровней, заданы интегралами столкновений нулевого приближения по полю **E**(t,**r**), а недиагональные – описывают отклик системы на это поле. Трудно представить, но и здесь (см., например, [7]) оказался востребованным метод, предлагающий получать линейные по полю интегралы столкновений из нулевого их приближения (см. (8) в [4], (41.1) в [5] и [6]).

Действительно, *флуктуационный подход* к нахождению интегралов столкновений (см. § 51 в [5]) расширен в [7]одним из его авторов на случай атомов. Исходными являются уравнения фазовой матрицы плотности атомов (N_{mn}=N_{mn}(t,**r**,**p**))

$$(\mathrm{d}/\mathrm{dt} + i\omega_{mn})N_{mn} - \frac{i}{\hbar}\sum_k \boldsymbol{e}[\mathbf{d}_{mk}N_{kn} - \mathbf{d}_{kn}N_{mk}] = 0, \qquad (1)$$

и уравнения самосогласованного поля $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(t,\mathbf{r})=-\nabla\varphi(t,\mathbf{r})$, «атомная» часть которого задана уравнением

$$\Delta\varphi(t,\mathbf{r}) = 4\pi\sum_{mn}\int \mathrm{d}\mathbf{p}\,\mathbf{d}_{mn}\nabla N_{mn} \qquad (2)$$

Здесь $\mathrm{d}/\mathrm{dt} = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$, t – время, **r**, **v** и **p** - координата, скорость и импульс атома, ω_{mn} - частота перехода. Выделив средние значения $\mathrm{N}_{mn} = \mathrm{N}_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p}), \mathbf{e} = \mathbf{e}(t,\mathbf{r})$ и флуктуации $\delta\mathrm{N}_{mn} = \delta\mathrm{N}_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$, $\delta\mathbf{e} = \delta\mathbf{e}(t,\mathbf{r})$

$$N_{mn} = \mathrm{N}_{mn} + \delta\mathrm{N}_{mn} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{e} + \delta\mathbf{e} \qquad (4)$$

усреднив точные уравнения (1), (2) и вычтя из них усредненные, автор [7] получает кинетическое уравнение

$$(\mathrm{d}/\mathrm{dt} + i\omega_{mn})\mathrm{N}_{mn} = i/\hbar\sum_s < \delta\mathbf{e}[\mathbf{d}_{ms}\delta\mathrm{N}_{sn} - \mathbf{d}_{sn}\delta\mathrm{N}_{sm}] > \qquad (5)$$

и уравнения для флуктуаций

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}/\mathrm{dt} + i\omega_{mn})\delta\mathrm{N}_{mn} - \frac{i}{\hbar}\delta\mathbf{e}\mathbf{d}_{mn}(\mathrm{N}_n - \mathrm{N}_m) = \\ = \frac{i}{\hbar}\sum_k\left[\delta\mathbf{e}[\mathbf{d}_{ms}\delta\mathrm{N}_{sn} - \mathbf{d}_{sn}\delta\mathrm{N}_{sm}] - < \delta\mathbf{e}[\mathbf{d}_{ms}\delta\mathrm{N}_{sn} - \mathbf{d}_{sn}\delta\mathrm{N}_{sm}] >\right]\end{aligned} \qquad (6)$$

$$\delta\mathbf{e} = -4\pi\int \mathrm{d}\mathbf{p}\sum_{mn}\mathbf{d}_{mn}\delta\mathrm{N}_{mn} \qquad (7)$$

Правая часть (6) учитывает влияние столкновений атомов , а <…> - усреднение по физически бесконечно малым объемам фазового пространства. Для пространственно-однородной плазмы (при

$\mathbf{d}_{nn}$=0 и $N_{mn} = \delta_{mn} N_n(p)$ среднее поле $\mathbf{e} = -4\pi \sum_{mn} \int d\mathbf{p}\, \mathbf{d}_{mn} N_n \delta_{mn} = 0$) из (5) следует уравнение для населенностей

$$\partial N_n(p)/\partial t = i/\hbar \sum_s < \delta\mathbf{e}[\mathbf{d}_{ms}\delta N_{sn} - \mathbf{d}_{sn}\delta N_{sm}] > \qquad (8)$$

Однако полученные в *отсутствии внешнего поля* **E**(t,**r**) уравнения (1), (5)-(8) используются в [7] еще и для нахождения линейных по полю **E**(t,**r)** недиагональных элементов матрицы плотности. То есть, просто добавив динамическое слагаемое

$$V(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{i}{\hbar}\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\sum_s [\mathbf{d}_{ms} N_{sn} - \mathbf{d}_{sn} N_{sm}] \qquad (9)$$

к правой части (5) (и соответственно его флуктуацию δV в (6)), - в [7] совершаются те же действия, что и в [4-6], где к интегралам столкновений нулевого приближения добавляют динамические слагаемые (см. (8) в [4]), - рассчитывая затем линеаризовать получившееся «*обобщенное уравнение Власова-Ландау*» [6].

Что, как показано в [1-3], - необоснованно, тем более в задаче *линейного отклика*. Поле **E**(t,**r**,), в отличие от поля ***e***(t,**r**) (2), включается здесь в установившемся, стационарном состоянии системы, то есть, – после «включения» межчастичного взаимодействия. И система, перестав быть пространственно-однородной, вместо равного нулю среднего самосогласованного поля ($\mathbf{e} = -4\pi \int d\mathbf{p} \sum_{mn} \mathbf{d}_{mn} N_n \delta_{mn} = 0$ при d_{nn}=0), обнаруживает индуцированное внешним воздействием поле

$$\mathbf{e}(t,\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(t,\mathbf{r}) = -4\pi \sum_{mn} \int d\mathbf{p}\, \mathbf{d}_{mn} F_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p}), \qquad (10)$$

которое задано *линейными по* **E**(t,**r**) *добавками* $F_{mn}=F_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ к функциям $N_{mn}=\delta_{mn}N_n(p)$. А вместе с этими регулярными добавками возникают (как и в случае [1-3]) их флуктуации: δF_{mn} и δΦ – линейные добавки к флуктуациям нулевого приближения δN_{mn}, δφ.

Такой линеаризации регулярных функций и их флуктуаций в системе типа (5)-(8) в [7] нет. Хотя, включив (9) в (5), ее и используют в проблеме линейного отклика, копируя тем самым используемый повсеместно «метод» (см. [4-6]), где *линейные по полю интегралы столкновений* следуют из… *нулевого их приближения*. Что явно не удовлетворяет требованиям (пп. 1, 2 Аннотации), отвечающим как фактам, так и результатам [1-3, 10].

Почти так же, - правда, без *флуктуационного подхода*, - поступают, например, и в [8, 9]: полученные в отсутствие поля интегралы столкновений используют в линейных по полю кинетических уравнениях. Впрочем, при этом нельзя не отметить и справедливость признания: «*вывод интеграла столкновений* - для недиагональных элементов матрицы плотности – *одна из основных задач квантовой кинетики, еще не решенная в полной мере*» [8].

Вот эта задача здесь и решена.

2. Метод нахождения линейных по полю интегралов столкновений для атомов

Если в момент включения внешнего поля (t=0) появилось самосогласованное поле (10), а значит - и флуктуации $\delta\Phi(t,\mathbf{r})$, $\delta F_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$, то начальные условия этих линейных по полю добавок одинаковы и равны нулю (до момента t=0 их не было)

$$\Phi(0,\mathbf{r})=F_{mn}(0,\mathbf{r},\mathbf{p})=\delta\Phi(0,\mathbf{r})=\delta F_{mn}(0,\mathbf{r},\mathbf{p})=0 \tag{11}$$

То есть в проблеме линейного отклика следует не просто, как в [7], использовать систему (1), (5)-(9), а линеаризовать ее, выделив слагаемые нулевого и первого приближения по $\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$. Полная система линеаризованных уравнений, включая и (10), примет тогда вид ($\delta\mathbf{E}=-\nabla\delta\Phi$):

$$\delta\mathbf{E} = -4\pi\int d\mathbf{p}\sum_{mn}\mathbf{d}_{mn}\delta F_{mn} \;, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}(d/dt + i\omega_{mn})F_{mn} = \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{mn}(\mathbf{E}-\nabla\Phi)(N_n - N_m) + \\ +\frac{i}{\hbar}\Big[\sum_s (\mathbf{d}_{ms} < \delta\mathbf{e}\delta F_{sn} > -\mathbf{d}_{sn} < \delta\mathbf{e}\delta F_{ms} >)\Big]\end{gathered} \tag{13}$$

$$(d/dt + i\omega_{mn})\delta F_{mn} - \frac{i}{\hbar}\delta\mathbf{E}\mathbf{d}_{mn}(N_n - N_m) = \frac{i}{\hbar}\delta\mathbf{e}\sum_s(\mathbf{d}_{mk}F_{kn} - \mathbf{d}_{kn}F_{mk}) \,. \tag{14}$$

Здесь опущены члены, задающие перенормировку взаимодействия атомов и влияние их столкновений на флуктуации, нет и корреляторов типа $<\delta\mathbf{E}\delta N_{mn}>$, зато учтено среднее поле $\boldsymbol{E}=\mathbf{E}-\nabla\Phi$.

Этой системы достаточно, чтобы решить «*основную задачу квантовой кинетики*» [8]. Действительно, уравнения (13), (14) и

(5), - где вместо (6) имеем в пренебрежении правой частью и при $N_{mn} = \delta_{mn} N_n(p)$

$$(d/dt + i\omega_{mn})\delta N_{mn} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{mn}\delta\mathbf{e}(N_n - N_m) = \mathbf{0}, \tag{15}$$

- легко решаются переходом к фурье-преобразованиям [4]

$$\delta N_{mn}(q,\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r}\int_0^\infty dt\,\exp(i\Omega t - i\mathbf{qr})\delta N_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) \tag{16}$$

$$\delta N_{mn}(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = \int dq/(2\pi)^4 \exp(-i\Omega t + i\mathbf{qr})\delta N_{mn}(q,\mathbf{p}), \tag{17}$$

где q=(Ω,**q**), dq=dΩd**q**/(2π)^4. При этом соответствующие решения

$$\delta N_{mn}(q,\mathbf{p}) = G_{mn}(q,\mathbf{p})\left[\frac{\delta\mathbf{e}_q\mathbf{d}_{mn}}{\hbar}(N_n - N_m) + \frac{\delta N_{mn}(0,\mathbf{q},\mathbf{p})}{i}\right] \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\delta F_{mn}(q,\mathbf{p}) = G_{mn}(q,\mathbf{p})\Bigg[&\frac{\delta\mathbf{E}_q\mathbf{d}_{mn}}{\hbar}(N_n - N_m) + \frac{\delta F_{mn}(0,\mathbf{q},\mathbf{p})}{i} + \\ &+ \frac{i}{\hbar}\int dq'dq''\delta(q - q' - q'')\delta\mathbf{e}_{q'}\sum_s\left(\mathbf{d}_{ms}F_{sn}(q'',\mathbf{p}) - \mathbf{d}_{sn}F_{ms}(q'',\mathbf{p})\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{19}$$

с функцией

$$G_{mn}(q,\mathbf{p}) = 1/(\mathbf{qv} - \Omega + i\omega_{mn} - i0) \tag{20}$$

определяют и спектральную плотность флуктуаций потенциала ($f_c = f_c(p)$ – функции распределения электронов и ионов, c=e,i [1-3])

$$(\delta\varphi^2)_q = \frac{32\pi^2}{|\varepsilon(q)|^2 q^4}\int d\mathbf{p}\sum_{mn}\mathrm{Im}G_{mn}(q,\mathbf{p})\left[\sum_c e_c^2 f_c\delta_{mn} + \frac{|\mathbf{qd}_{mn}|^2}{\hbar}\frac{N_n + N_m}{2}\right], \tag{21}$$

и диэлектрическую проницаемость (ДП) плазмы

$$\varepsilon(q) = 1 - \frac{4\pi}{q^2}\int d\mathbf{p}\sum_{mn}G_{mn}(q,\mathbf{p})\left[\sum_c e_c^2\,\mathbf{q}\frac{\partial f_c}{\partial\mathbf{p}}\delta_{mn} + \frac{|\mathbf{qd}_{mn}|^2}{\hbar}(N_n - N_m)\right] \tag{22}$$

и интегралы столкновений в (5) и (13). Которые, даже при полном подобии их выражений, приводят к разным по форме результатам. Это обусловлено разными начальными условиями для флуктуаций (18) и (19): они отличны от нуля в (18) ($\delta N_{mn}(0,\mathbf{q},\mathbf{p}) \neq 0$) и, наоборот, равны нулю в (19) ($\delta F_{mn}(0,\mathbf{q},\mathbf{p}) = 0$). Поэтому в уравнении (5) коррелятор $<\delta\mathbf{e}(t,\mathbf{r})\delta N_{mn}(0,\mathbf{r},\mathbf{p})> \neq 0$, а в (13) (см. (19))

$$<\delta\mathbf{e}(t,\mathbf{r})\delta F_{mn}(0,\mathbf{r},\mathbf{p})> = 0 \tag{23}$$

А так как в интеграле столкновений уравнения (13) более 2-х зависящих от t и **r** сомножителей, то в фурье-преобразовании (13)

$$i(\mathbf{kv}-\omega+\omega_{mn}-\Gamma_{mn}(k,\mathbf{p}))F_{mn}(k,\mathbf{p})=\frac{i}{\hbar}(\mathbf{E}-\nabla\Phi)_k\,\mathbf{d}_{mn}(N_n-N_m) \qquad (24)$$

этот интеграл оказывается функцией k=(ω,**k**). И определяя сдвиг частоты ($\Delta\omega_{mn}=\mathrm{Re}\,\Gamma_{mn}(k,\mathbf{p})$) и ширину линии ($\gamma_{mn}=\mathrm{Im}\,\Gamma_{mn}(k,\mathbf{p})$), он содержит лишь член, задаваемый спектральной плотностью (21)

$$\Gamma_{mn}(k,\mathbf{p})=\int dq(\delta\varphi^2)_q\sum_s\frac{[|\,\mathbf{qd}_{ms}\,|^2\;G_{sn}(k-q,\mathbf{p})+|\,\mathbf{qd}_{sn}\,|^2\;G_{ms}(k-q,\mathbf{p})]}{\hbar^2} \qquad (25)$$

- второе слагаемое, связанное с коррелятором (23), отсутствует. Значит, вопреки [7] (§ 3 гл. 9), нет и его влияния на ширину линий и сдвиг частоты. А из-за условия типа (23) нет, кстати, и *кулоновской динамической силы трения* в уравнениях излучающих ионов [1-3, 10], поэтому факты сужения, сдвига и асимметрии нелинейных резонансов требуют иной, чем в [9] интерпретации.

Выявленные свойства (пп. 1, 2 Аннотации) - существенно отличают столкновения с «частотой» (25) и диффузионным оператором в [1-3], от того, что используют в [7-9]. Вот так и решается *основная задача квантовой кинетики*, отмеченная в [8].

Литература:

1. Туганов В.Ф. Препринт ГНЦ РФ ТРИНИТИ N 0096-А (2002)
2. Туганов В.Ф. Международная конференция МСС-09, 23-25 ноября 2009, Москва, ИКИ РАН. Сб. трудов, С. 100-105. - М.: ЛЕНАНД, 2009
3. Туганов В.Ф. там же, с.147-152
4. Ландау Л.Д. ЖЭТФ, 1937. т. **7.** с. 203
5. Лифшиц Е.М., Питаевский В.П. Физическая кинетика, М. Наука, 1979, 2003
6. Александров А.Ф, Рухадзе А.А. Физика плазмы. 1997. т. 23, с. 474
7. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов. Монография.- М.: Наука. 1980
8. Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М. Нелинейные резонансы в атомных спектрах. Новосибирск. Наука. 1979
9. Шапиро Д.А. Дис. … д.ф.-м. н.: 01.04.04: Новосибирск, 1992
10. Туганов В.Ф. XV Всероссийская конференция (ДВП-15). 3-7 июня 2013 г., Звенигород. Тезисы докладов, с. 123-125